Langages formels, calculabilité et complexité

Examen du 2 février 2012

Durée: 3 heures, sans documents

Exercice 1 – *Grammaires : un petit exercice*

On considère le problème EstFini suivant

> Étant donné une grammaire hors contexte, décider si elle engendre un langage fini.

1. Analyser la décidabilité/complexité de ce problème.

Exercice 2 – *Calculabilité : problème de Collatz et fonctions analytiques*

Une séquence de Collatz générale est définie par l'affectation

$$x := \mathrm{Col}(x) = \begin{cases} a_1x + b_1 & \texttt{si} \quad x \mod p = r_1 \\ \dots & \dots \quad \dots \\ a_kx + b_k & \texttt{si} \quad x \mod p = r_k \end{cases}$$

Les coefficients a_i et b_i sont des constantes rationnelles ; p et r_i des constantes entières, toutes les r_i sont différentes. On itère cette affectation jusqu'a ce que x devienne 1(ou jusqu'à l'infini). Si x devient non-entier, on s'arrête aussi (une pathologie à éviter).

On analyse le problème Collatz suivant :

> Étant donnés un système de Collatz général et une valeur initiale de x (naturelle), décider si la séquence commençant par x atteint éventuellement la valeur 1.

1. Montrer que Collatz est semi-décidable (récursivement énumérable).

2. Montrer que Collatz est indécidable

Indication: on pourra coder la configuration de la machine à 2 compteurs avec état q_i*, et les valeurs de compteurs* m *et* n*, par la variable de système de Collatz général* $x = 2^m3^nS + i$ *(où* S *est une grande constante).*

3. Construire une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définissable par une formule trigonométrique explicite telle que pour les x naturels $f(x) = 1$ si $x \mod p = 0$ et $f(x) = 0$ sinon.

4. Construire une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définissable par une formule trigonométrique explicite qui coïncide avec Col sur tous les x naturels.

5. Déduire un théorème d'indécidabilité pour les itérations des fonctions trigonométriques. Formuler précisément l'énoncé et achever la preuve.

Exercice 3 – *Complexité : étude d'un problème*

On analyse le problème EVALUER-FAMILLE suivant :

On a une famille C de sous-ensembles d'un ensemble A et un entier J. Est-il possible d'obtenir tous les éléments de C à partir de singletons en utilisant l'opération $\cup$ (union) au plus J fois ?

1. Montrer que EVALUER-FAMILLE est dans la classe NP.
2. Montrer que EVALUER-FAMILLE est NP-complet.
   Indication: Pour réduire le problème TRANSVERSAL (en anglais VERTEX-COVER), on peut représenter chaque arête (u, v) *du graphe par* $\{a_0, u, v\} \in C$. *Comment profiter d'un petit ensemble transversal de sommets pour obtenir* C *en peu d'opérations ?*

Exercice 4 – *Automates et langages : mots biinfinis*

Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, I, \Delta, F)$ un automate fini (I, F sont deux ensembles d'états). Un calcul sur un mot bi-infini

$$u = \ldots a_{-1} a_0 a_1 \ldots$$

est une suite bi-infinie d'états $(q_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ telle que : $\forall i, (q_i, a_i, q_{i+1}) \in \Delta$. Un calcul est *accepteur* s'il existe une infinité de $i \leqslant 0$ tels que $q_i \in I$ et une infinité de $i \geqslant 0$ tels que $q_i \in F$. Un mot bi-infini est *reconnu* par l'automate $\mathcal{A}$ s'il possède un calcul accepteur. On définit de façon immédiate l'ensemble des langages *reconnaissables* de mots bi-infinis sur un alphabet Σ.

1. Donner un automate sur l'alphabet $\{a, b\}$ qui reconnaît l'ensemble des mots bi-infinis ayant un nombre fini de b.
2. Soit L_0 l'ensemble de tous les mots bi-infinis sur $\{a, b\}$ avec la lettre b en position 0. Est-il reconnaissable ?
3. Étudier les propriétés de clôture des langages bi-infinis. *Indication: Commencer par l'union, si le temps permet traiter d'autres opérations.*
4. Définir (formellement) les expressions régulières bi-infinies (BRE) et leur sémantique. Donner une BRE pour le langage du premier point de cet exercice. *Indication: Vous pouvez définir et utiliser l'opérateur* $^{-\omega}$ *qui correspondra au produit infini à gauche :* $a^{-\omega} = \ldots aaa$.
5. Démontrer qu'un langage de mots bi-infinis est reconnaissable si et seulement si il peut être exprimé par une BRE.