Langages formels, calculabilité et complexité

Examen

24 janvier 2014, durée 3h, sans documents

Exercice 1 – *Automates : des petits calculs*

On considère le langage L sur $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ de tous les mots $a_1 \dots a_n$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \equiv 2 \mod 3.$$

1. Calculez son monoïde syntaxique.
2. Est L sans étoile ? Justifiez.
3. Définissez-le en logique FO ou MSO.

Exercice 2 – *Un langage de mots infinis*

On considère le langage L de tous les mots infinis sur $\{a, b\}$ qui contiennent une infinité de fois les motifs $ab^{2n}a$ (on ne demande pas que n soit le même).

1. Trouvez une expression ω-régulière définissant L.
2. Trouvez un automate de Büchi reconnaissant L.
3. Trouvez une formule MSO définissant L.

Exercice 3 – *Énumération monotone*

Prouver qu'un ensemble non-vide $A \subset \mathbb{N}$ est décidable si et seulement s'il existe une fonction récursive totale monotone croissante[1] g telle que $A = \mathrm{Im}(g)$. *Indication: n'oubliez pas le cas simple où A est fini*

Exercice 4 – *Langage non-régulier*

On considère le langage M de tous les mots sur $\{a, b\}$ qui ont la forme ww.

1. Pourquoi M n'est-il pas hors contexte ? *Indication: si vous n'y arrivez pas prouvez au moins la non-régularité*
2. Montrez que son complément $\overline{M}$ est hors contexte, et donnez une grammaire ET un automate à pile le reconnaissant. *Indication: voir le dessin.*

Exercice 5 – *Expressions régulières et complexité*

On étudie la complexité des problèmes de décision sur les expressions régulières. Dans tous les problèmes de l'exercice e et f sont des expressions sur l'alphabet Σ ; le langage défini par e est dénoté $[\![e]\!]$. *Indication: questions 1 et 4 sont faciles, 2 moyenne et 3 difficile*

1. Problème EmptyRE : $\boxed{\text{Pour } e \text{ et } \Sigma \text{ donnés, est-ce que } [\![e]\!] = \emptyset\,?}$ Montrez que EmptyRE $\in$ P.
2. Problème UniversalRE : $\boxed{\text{Pour } e \text{ et } \Sigma \text{ donnés, est-ce que } [\![e]\!] = \Sigma^*\,?}$ Montrez que UniversalRE $\in$ PSPACE. *Indication: utilisez les automates ; trouvez un algorithme nondéterministe d'espace polynomial pour* $\neg$UniversalRE *; déduisez le résultat demandé.*
3. Montrez que UniversalRE est PSPACE–complet[2]. *Indication: Un calcul accepteur d'une machine non-déterministe M d'espace $p(n)$ sur un mot w peut être représenté par un mot (comment ?). Construisez une expression e qui décrit tous les mots qui **ne correspondent pas** à un tel calcul. Déduisez une réduction du langage de la machine M à* UniversalRE.
4. En admettant les points précédents trouvez les classes de complexité des problèmes
   - $[\![f]\!] \cap [\![e]\!] = \emptyset$?
   - $[\![f]\!] = [\![e]\!]$?
   - $[\![f]\!] \subset [\![e]\!]$?

---

1. on n'exige pas la croissance stricte
2. je ne sais pas le faire par réduction de QSAT, si vous y arrivez vous aurez un petit bonus