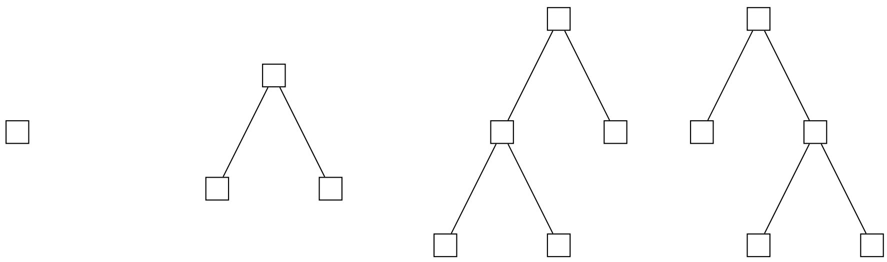
Langages formels, calculabilité et complexité
TD1

26 septembre 2014

Exercice 1 Récurrence structurelle (*base*)

Un arbre d-aire complet est un arbre enraciné ordonné dont chaque nœud intérieur a éxactement d enfants. Voici des exemples d'arbres binaires (2-aires) complets :



1. Donner une définition par récurrence structurelle de l'ensemble des arbres d-aires complets.
2. Quels sont les nombres de nœuds possibles d'un arbre d-aire complet ? Démontrer par récurrence structurelle.
3. Quelles sont les cardinalités des répartitions possibles en feuilles et nœuds intérieurs d'un arbre d-aire complet ? Démontrer par récurrence structurelle.
4. Trouver et démontrer par récurrence structurelle une borne inférieure et une borne supérieure sur le nombre de nœuds d'un arbre d-aire complet de hauteur h.

Exercice 2 Automates (*base*)

Trouver des automates finis pour les langages suivants :

1. Les mots sur l'alphabet $\{a,b\}$ contentant le facteur aab ou $aaab$.
2. Les mots sur l'alphabet $\{a,b\}$ contentant un nombre pair de a et un nombre impair de b.
3. Les mots sur l'alphabet $\{a\}$ dont la longueur est un multiple de 3.
4. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, les mots sur l'alphabet $\{a\}$ dont la longueur est un multiple de d.
5. Les représentations binaires des entiers positifs pairs.
6. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, les représentations binaires des entiers positifs qui sont multiples de d.
7. Pour tout $c, d \in \mathbb{N}$, les représentations binaires des entiers positifs ayant la forme $c + k \cdot d$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 Mots (*avancé*)

Deux mots v et w sont dits conjugués s'il existe x et y tels que $v = xy$ et $w = yx$.

1. Montrer que cette relation est une relation d'équivalence.
2. Soient x et y non-vide. Montrer l'équivalence de :

a) $xy = yx$
b) Il existe $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $x^k = y^l$.
c) Il existe un mot z et $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $x = z^k$ et $y = z^l$.

Exercice 4 Mots infinis périodiques (*avancé*)

Un mot infini w sur un alphabet Σ est une série infinie $(w_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de Σ. Le mot w est périodique s'il existe un entier strictement positif p tel que $w_{n+p} = w_n$ pour tout $n \geq 0$. Dans ce cas, p est une période de w.

1. Soient p et q deux périodes d'un mot infini périodique w. Montrer que $\mathrm{pgcd}(p,q)$ est une période de w. En particulier, l'ensemble des périodes de w est de la forme $p_0 \cdot \mathbb{N}$ où p_0 est sa période minimale.

Un mot infini w est ultimement périodique s'il existe un entier strictement positif p et un entier positif N_p tel que $w_{n+p} = w_n$ pour tout $n \geq N_p$. Dans ce cas, p est une période ultime de w et N_p une prépériode de w correspondante à p.

2. Soient p et q deux périodes ultimes d'un mot infini ultimement périodique w. Montrer que $\mathrm{pgcd}(p,q)$ est une période ultime de w.
3. Montrer que l'ensemble des prépériodes d'un mot w est independant de la période ultime p.

Un mot infini w est uniformément récurrent si pour tout facteur fini v il existe un entier positif n_v tel que v est un facteur de tout facteur de w de longeur n_v. Autrement dit, tout facteur est uniformément contenu dans w.

4. Montrer que tout mot périodique est uniformément récurrent. Un mot ultimement périodique est-il nécessairement uniformément récurrent ?

Le mot de Thue-Morse τ est defini par la récurrence $\tau_0 = 0$, $\tau_{2n} = \tau_n$ et $\tau_{2n+1} = 1 - \tau_n$. Il est donc un mot sur l'alphabet $\{0,1\}$. On a $\tau_n = 0$ si et seulement si le nombre de 1 dans la répresentation binaire de n est pair.

5. Montrer que le mot de Thue-Morse est uniformément récurrent.
6. Montrer que le mot de Thue-Morse n'est pas ultimement périodique.