Langages formels, calculabilité et complexité
TD2

3 octobre 2014

Exercice 1 Automates et expressions régulières (*base*)

1. Construire un automate, un automate déterministe et l'automate minimal de l'expression régulière $a(b+bc^*c)^*c$.
2. Soit L le langage des mots sur l'alphabet $\{a,b,c\}$ satisfaisant les contraintes suivantes :
   – Il n'y a pas deux a adjacents.
   – S'il y a un b, au moins une occurrence de b est suivie d'un c.
   Écrire une expression régulière pour L et construire l'automate minimal de L.

Exercice 2 Myhill-Nerode (*base*)

Trouver les quotients à gauche et l'automate minimal des langages suivants :

1. $b(ba^*)^*$
2. $\{a^i b^j \mid i+j \text{ est pair}\}$
3. $\left\{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ contient exactement une occurrence du facteur } aaba\right\}$

Exercice 3 Transformations régulières (*base*)

Soit L un langage rationnel. Montrer que les langages suivants sont rationnels.

1. $\text{Init}(L) = \{u \mid \exists v : uv \in L\}$
2. $\text{Min}(L) = \{w \mid w \in L \text{ et aucun préfixe propre de } w \text{ n'est dans } L\}$
3. $\text{Max}(L) = \{w \mid w \in L \text{ et } w \text{ n'est pas un préfixe propre d'un mot dans } L\}$
4. $\text{Cycle}(L) = \{uv \mid vu \in L\}$
5. $\frac{1}{2}L = \{u \mid \exists v : uv \in L \text{ et } |u| = |v|\}$

Exercice 4 Semi-linéarité (*avancé*)

Un ensemble d'entiers positifs est linéaire s'il est de la forme $c + d \cdot \mathbb{N}$. Un ensemble d'entiers positifs est semi-linéaire s'il est réunion finie d'ensembles linéaires.

1. Soit L un langage rationnel sur l'alphabet $\{a\}$. Montrer que l'ensemble $\{k \mid a^k \in L\}$ est semi-linéaire.
2. Montrer que l'ensemble $\lambda(L) = \{|w| \mid w \in L\}$ est semi-linéaire pour tout langage rationnel L.
3. Soit L un langage rationnel accepté par un automate $\mathscr{A}$ à n états. Soient $c \geq 0$ et $d \geq 1$ minimaux tels que l'ensemble linéaire $c + d \cdot \mathbb{N}$ est une partie de $\lambda(L)$. Trouver des bornes supérieures pour c et d.

Exercice 5 Algorithme de Brzozowski (*avancé*)

Un automate est émondé si tout état est contenu dans un chemin acceptant. Un automate est co-déterministe si l'automate retourné (dérivé en invertissant tous les arcs et les ensembles des états initiaux et finaux) est déterministe.

1. Soit $\mathscr{A}$ un automate co-déterministe émondé et $\mathscr{B}$ le déterminisé de $\mathscr{A}$ par construction par sous-ensembles. Montrer que $\mathscr{B}$ est minimal.
2. En déduire une nouvelle méthode de minimisation.
3. Quelle est la complexité en temps du nouvel algorithme au pire cas ?