Langages formels, calculabilité et complexité
TD3

10 octobre 2014

Exercice 1 Semi-linéarité (*avancé*)

Un ensemble d'entiers positifs est linéaire s'il est de la forme $c + d \cdot \mathbb{N}$. Un ensemble d'entiers positifs est semi-linéaire s'il est réunion finie d'ensembles linéaires.

1. Soit L un langage rationnel sur l'alphabet $\{a\}$. Montrer que l'ensemble $\{k \mid a^k \in L\}$ est semi-linéaire.
2. Montrer que l'ensemble $\lambda(L) = \{|w| \mid w \in L\}$ est semi-linéaire pour tout langage rationnel L.
3. Soit L un langage rationnel accepté par un automate $\mathscr{A}$ à n états. Soient $c \geq 0$ et $d \geq 1$ minimaux tels que l'ensemble linéaire $c + d \cdot \mathbb{N}$ est une partie de $\lambda(L)$. Trouver des bornes supérieures pour c et d.

Exercice 2 Algorithme de Brzozowski (*avancé*)

Un automate est émondé si tout état est contenu dans un chemin acceptant. Un automate est co-déterministe si l'automate retourné (dérivé en invertissant tous les arcs et les ensembles des états initiaux et finaux) est déterministe.

1. Soit $\mathscr{A}$ un automate co-déterministe émondé et $\mathscr{B}$ le déterminisé de $\mathscr{A}$ par construction par sous-ensembles. Montrer que $\mathscr{B}$ est minimal.
2. En déduire une nouvelle méthode de minimisation.

Exercice 3 Lemme de l'étoile (*base*)

Les langages suivants sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ sont-ils rationnels ?

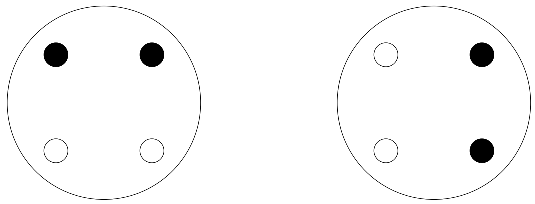
1. $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
2. $\{a^m b^n \mid m \equiv n \pmod{d}\}$ où $d \in \mathbb{N}$
3. $\{a^p \mid p \text{ est premier}\}$
4. $\{a^{F(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$ où F est un polynôme réel
5. $\{vcw \mid v, w \in \{a, b\}^* \text{ et } w \neq v^R\}$

Exercice 4 Monoïdes (*base*)

1. Trouver les langages formels sur l'alphabet $\Sigma = \{a\}$ dont le monoïde syntaxique a exactement 2 éléments.
2. Trouver le monoïde syntaxique du langage $\{a, b\}^* aa \{a, b\}^*$.
3. Est-ce que tout monoïde fini est isomorphe au monoïde syntaxique d'un langage rationnel ?
4. Soit L un langage reconnu par un morphisme $\mu : \Sigma^* \to G$ où G est un groupe fini. Le monoïde syntaxique de L est-il un groupe fini ? Est-ce que tout groupe fini est isomorphe au monoïde syntaxique d'un langage rationnel ?
5. Quelles sont les parties du monoïde $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ qui sont reconnaissable par morphisme ?

Exercice 5 Le barman aveugle (*base*)

On dispose en carré 4 verres sur un plateau, chacun pouvant être à l'endroit ou à l'envers. Un joueur (le barman) a les yeux bandés. Son but est de retourner les 4 verres dans la même position (tous à l'endroit ou tous à l'envers). Dès que les 4 verres sont dans la même position, la partie s'arrête et le barman a gagné). Pour cela, il peut retourner à chaque tour 1, 2 ou 3 verres. Il ne peut pas déterminer l'orientation des verres. Un autre joueur perturbe le jeu en tournant le plateau sur lequel reposent les jetons d'un quart de tour, d'un demi-tour ou de trois quarts de tour entre chaque opération du barman.



1. Montrer que le barman a une stratégie gagnante, c'est-à-dire que quoi que fasse le tourneur de plateau, il a moyen de gagner.
2. En combien de coups peut-il gagner ?