Langages formels, calculabilité et complexité
TD4

17 octobre 2014

Exercice 1 Monoïdes (*base*)

1. Combien d'éléments a le monoïde syntaxique du langage $\{a,b\}^* aa\{a,b\}^*$? Combien d'états a son automate minimal ?
2. Est-ce que tout monoïde fini est isomorphe au monoïde syntaxique d'un langage rationnel ?
3. Soit L un langage reconnu par un morphisme $\mu : \Sigma^* \to G$ où G est un groupe fini. Le monoïde syntaxique de L est-il un groupe fini ? Est-ce que tout groupe fini est isomorphe au monoïde syntaxique d'un langage rationnel ?
4. Quelles sont les parties du monoïde $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$ qui sont reconnaissable par morphisme ?

Exercice 2 Langages sans étoile (*base*)

Les langages sur l'alphabet $\Sigma = \{a,b\}$ suivants sont-ils sans étoile ?

1. $\{w \in \Sigma^* \mid |w| \equiv 2 \pmod 5\}$
2. $b\Sigma^* ab\Sigma^* \cap \Sigma^* bb\Sigma^*$
3. $(ab+ba)^*$
4. $(a+bab)^*$
5. $(aa)^*(a+bb)$

Soient $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ et $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ sans étoile et soit $\mu : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ un morphisme.

6. Le langage $\mu^{-1}[L_2]$ est-il sans étoile ?
7. Le langage $\mu[L_1]$ est-il sans étoile ?

Exercice 3 Logique (*base*)

Donner des formules MSO pour les langages suivants :

1. $(aa)^*$
2. Les mots dans $\{a,b\}^*$ tel que la lettre a ne se trouve qu'à des positions paires ou qu'à des positions impaires.
3. Les mots dans $\{a,b\}^*$ de longueur impair avec un nombre impair de a.

Exercice 4 Arithmétique de Presburger (*avancé*)

L'arithmétique de Presburger est la théorie logique du premier ordre des entiers positifs munis de l'addition. Le but de cet exercice est de montrer que cette théorie est décidable, c'est-à-dire qu'il est décidable de savoir si une formule close est vraie.

Soit ϕ une formule logique avec n quantificateurs. On suppose cette formule sous forme prénexe : $\phi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \psi$, où $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ et ψ est une formule sans quantificateurs, qui est une combinaison booléenne de formules de la forme $x_i = x_j$ ou $x_i + x_j = x_k$.

Pour toute formule ϕ à variables libres $x_1, x_2, \ldots, x_k$, on définit son langage $L(\phi)$ en posant

$$L(\phi) = \{\text{encode}(n_1, n_2, \ldots, n_k) \mid \phi(n_1, n_2, \ldots, n_k) \text{ est vraie}\}$$

où encode$(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ rassemble les chiffres de $n_1, n_2, \ldots, n_k$ pour toute puissance de 2 dans une représentation binaire de même longueur. Si nécessaire, on ajoute des 0 au début. C'est-à-dire

$$\text{encode}(x, y) = (x_m, y_m, x_{m-1}, y_{m-1}, \ldots, x_0, y_0)$$

si $x = \sum_{i=0}^{m} x_i 2^i$ et $y = \sum_{i=0}^{m} y_i 2^i$.

1. Montrer que $L(\phi)$ est rationnel si ϕ est sans quantificateurs.
2. Montrer que $L(\phi)$ est rationnel même si ϕ a des quantificateurs.
3. Conclure.