Langages formels, calculabilité et complexité
TD5

24 octobre 2014

Exercice 1 Logique (*base*)

Donner des formules MSO pour les langages suivants :

1. $(aa)^*$
2. Les mots dans $\{a,b\}^*$ de longueur impair avec un nombre impair de a.

Exercice 2 Exemples d'automates de Büchi (*base*)

Donner un automate de Büchi reconnaissant les langages suivants sur l'alphabet $\{a,b,c\}$:

1. Il y a un nombre infini de a mais pas le facteur aa.
2. S'il y a un nombre infini de a, alors aussi un nombre infini de b.
3. Soient L_1 et L_2 des langages ω-réguliers. Montrer par une construction d'automates de Büchi que l'intersection $L_1 \cap L_2$ est ω-régulier.

Exercice 3 Automates de Büchi déterministes (*avancé*)

Soit A un alphabet fini de cardinal au moins 2, et soit $L \subseteq A^*$. On définit

$$\overrightarrow{L} = \{u \in A^\omega \mid u \text{ a une infinité de préfixes dans } L\} \ .$$

1. Calculer $\overrightarrow{L}$ dans les cas suivants : $L = a^*b$, $L = (ab)^+$, et $L = (a^*b)^+$.
2. Soit $X = (a+b)^*a^\omega$. Montrer qu'il n'existe pas de langage $L \subseteq A^*$ tel que $X = \overrightarrow{L}$.
3. Soit $L \subseteq A^*$ un langage de mots finis reconnaissable. Montrer que $\overrightarrow{L}$ est reconnaissable par un automate de Büchi.
4. Soit $\mathscr{A} = (Q, A, \delta, \{i\}, F)$ un automate déterministe. On considère les langages $L^+(\mathscr{A})$ et $L^\omega(\mathscr{A})$ correspondant respectivement à l'ensemble des mots finis reconnus par $\mathscr{A}$ et l'ensemble des mots infinis reconnus par $\mathscr{A}$ au sens de Büchi. Montrer que $L^\omega(\mathscr{A}) = \overrightarrow{L^+(\mathscr{A})}$.
5. En déduire qu'un langage $X \subseteq A^\omega$ est reconnu par un automate de Büchi déterministe si et seulement si il existe un langage reconnaissable L de A^* tel que $X = \overrightarrow{L}$.

Exercice 4 Arithmétique de Presburger (*avancé*)

L'arithmétique de Presburger est la théorie logique du premier ordre des entiers positifs munis de l'addition. Le but de cet exercice est de montrer que cette théorie est décidable, c'est-à-dire qu'il est décidable de savoir si une formule close est vraie.

Soit ϕ une formule logique avec n quantificateurs. On suppose cette formule sous forme prénexe : $\phi = Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n\psi$, où $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ et ψ est une formule sans quantificateurs, qui est une combinaison booléenne de formules de la forme $x_i = x_j$ ou $x_i + x_j = x_k$.

Pour toute formule ϕ à variables libres $x_1, x_2, \ldots, x_k$, on définit son langage $L(\phi)$ en posant

$$L(\phi) = \{\text{encode}(n_1, n_2, \ldots, n_k) \mid \phi(n_1, n_2, \ldots, n_k) \text{ est vraie}\}$$

où encode$(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ rassemble les chiffres de $n_1, n_2, \ldots, n_k$ pour toute puissance de 2 dans une représentation binaire de même longueur. Si nécessaire, on ajoute des 0 au début. C'est-à-dire

$$\text{encode}(x, y) = (x_m, y_m, x_{m-1}, y_{m-1}, \ldots, x_0, y_0)$$

si $x = \sum_{i=0}^{m} x_i 2^i$ et $y = \sum_{i=0}^{m} y_i 2^i$.

1. Montrer que $L(\phi)$ est rationnel si ϕ est sans quantificateurs.
2. Montrer que $L(\phi)$ est rationnel même si ϕ a des quantificateurs.
3. Conclure.