Langages formels, calculabilité et complexité
TD7

14 novembre 2014

Exercice 1 Langage inhéremment ambigu (*avancé*)

On rappelle le lemme d'Ogden :

Lemme d'Ogden. Soit L un langage algébrique. Il existe un entier N tel que pour tout mot $z \in L$ dans lequel au moins N positions distinctes sont distinguées, il est possible de décomposer z sous la forme $z = uxvyw$ avec

- x ou y contient au moins une position distinguée,
- xvy contient au plus N positions distinguées,
- pour tout $i \geq 0$, $ux^i vy^i w \in L$.

Soit $L = \{a^m b^m c^n \mid m, n \geq 0\} \cup \{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 0\}$. On veut montrer qu'il n'existe pas de grammaire non-ambiguë qui engendre ce langage.

1. Donner une grammaire engendrant ce langage.
2. Déduire du lemme d'Ogden appliqué à $z = a^k b^k c^{k+k!}$ pour un k assez grand la forme des dérivations possible pour z.
3. En déduire que le mot $a^{k+k!} b^{k+k!} c^{k+k!}$ se dérive d'au moins deux manières différentes.

Exercice 2 Automates à pile (*base*)

Construire un automate à pile pour chacun des langages algébriques suivants :

1. $\{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$
2. $\{a,b\}^* \setminus \{a^n ba^n ba^n \mid n \geq 0\}$
3. $\{va^n \mid v \in \{a,b\}^* \text{ et } |v|_a = n\}$
4. $\{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a / |w|_b = 3/2\}$

Exercice 3 Intersection d'un langage algébrique avec un rationnel (*base*)

1. Donner un exemple de deux langages algébriques dont l'intersection n'est pas algébrique.
2. Montrer que l'intersection d'un langage algébrique et un langage rationnel est algébrique.

Exercice 4 Clôture par image inverse (*avancé*)

Soit $\mu : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ un morphisme et soient $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ et $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ algébriques.

1. Le langage $\mu[L_1]$ est-il algébrique ?

Le but de cet exercice est de montrer que l'image inverse $\mu^{-1}[L_2]$ est algébrique. Dans un premier temps, nous le montrons pour le cas que le morphisme μ est *alphabétique*, c'est-à-dire $|\mu(a)| \leq 1$ pour toute lettre $a \in \Sigma_1$.

2. Montrer que $\mu^{-1}[L_2]$ est algébrique si μ est alphabétique.

3. Montrer la factorisation suivante : Pour tout morphisme $\mu : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ il existe un alphabet Σ_0, deux morphismes $\nu : \Sigma_0^* \to \Sigma_2^*$ et $\pi : \Sigma_0^* \to \Sigma_1^*$ et un langage rationnel $K \subseteq \Sigma_0^*$ tels que

$$\mu^{-1}[w] = \pi\left[\nu^{-1}[w] \cap K\right]$$

pour tout mot $w \in \Sigma_2^*$.

4. Conclure que $\mu^{-1}[L_2]$ est algébrique pour tout morphisme μ.