Langages formels, calculabilité et complexité
TD8

Thomas Nowak

21 novembre 2014

Exercice 1 Clôture par image inverse (*avancé*)

Le but de cet exercice est de montrer que l'image inverse $\mu^{-1}[L_2]$ est algébrique. Dans un premier temps, nous le montrons pour le cas que le morphisme μ est *alphabétique*, c'est-à-dire $|\mu(a)| \leq 1$ pour toute lettre $a \in \Sigma_1$.

1. Montrer que $\mu^{-1}[L_2]$ est algébrique si μ est alphabétique.
2. Montrer la factorisation suivante : Pour tout morphisme $\mu : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ il existe un alphabet Σ_0, deux morphismes $\nu : \Sigma_0^* \to \Sigma_2^*$ et $\pi : \Sigma_0^* \to \Sigma_1^*$ et un langage rationnel $K \subseteq \Sigma_0^*$ tels que
$$\mu^{-1}[w] = \pi\left[\nu^{-1}[w] \cap K\right]$$
pour tout mot $w \in \Sigma_2^*$.
3. Conclure que $\mu^{-1}[L_2]$ est algébrique pour tout morphisme μ.

Exercice 2 Fonctions récursives primitives (*base*)

Montrer que les fonctions suivantes sont récursives primitives.

1. $\text{divise}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ divise } y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. $\text{estPremier}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est premier} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. $x \mapsto \lfloor \sqrt{x} \rfloor$
4. la suite de Fibonacci
5. Soit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ récursive primitive. La fonction f definie par $f(1) = f(2) = 1$ et $f(n) = g\big(f(n-1), f(n-2)\big)$ pour $n \geq 3$ est-elle récursive primitive ?
6. L'ensemble des fonction récursives primitives $\mathbb{N} \to \{0, 1\}$ est-il dénombrable ?
7. Existe-t-il une fonction récursive primitive $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que l'image inverse $f^{-1}[\{n\}]$ est infinie pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 3 Fonction d'Ackermann (*avancé*)

1. Montrer que pour toute fonction récursive primitive f il existe une fonction récursive primitive et croissante g telle que $f \leq g$.
2. Montrer que pour toute fonction récursive primitive f il existe un k tel que $f(m, \ldots, m) \leq 2 \uparrow^k m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.
3. Conclure que la fonction d'Ackermann n'est pas récursive primitive.