Algorithmique — M1

Examen du 9 janvier 2009

Université Paris Diderot

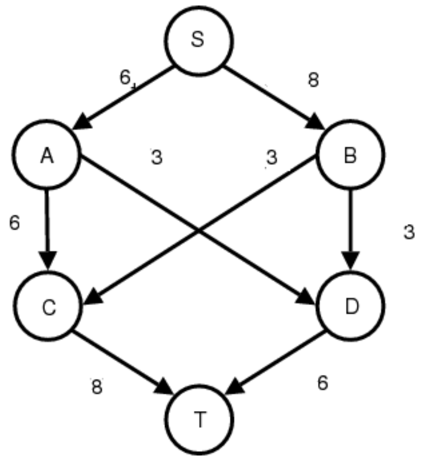
Documents autorisés : Deux feuilles de papier format A4
Durée : 3h

On applique les algorithmes de cours

Exercice 1 – *Les reines*

Placer les 4 reines sur un tableau 4×4 en utilisant l'algorithme *backtracking* du cours. Sans énoncer l'algorithme montrez toutes les configuration considérées lors de son fonctionnement.

Exercice 2 – *Flux maximum*



Pour le réseau ci-dessus on cherche à trouver le flux (flot) maximum en appliquant un algorithme de cours.

1. Choisissez un algorithme (écrivez juste son nom s'il s'agit d'un algorithme connu).

2. Appliquez l'algorithme (dessinez toutes ses itérations).

3. Donnez le résultat final : flux maximum et sa valeur.

On adapte un algorithme de cours

Exercice 3 – *Magasin*

Le nouveau magasin “Galeries Fulkerson" a n rayons $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$. Pour travailler dans le magasin il y a $m \geq 2n$ vendeurs candidats $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$. Les compétences des vendeurs sont représentées par une relation

$$C = \{(i, j) \mid \text{ vendeur } v_i \text{ peut travailler dans le rayon } r_j\}.$$

On cherche un algorithme qui décide s'il est possible d'embaucher $2n$ vendeurs et de les affecter aux rayons en respectant les conditions suivantes :
- chaque vendeur embauché est affecté à un rayon et un seul ;
- dans chaque rayon il y a exactement deux vendeurs ;
- chaque vendeur est compétent dans son rayon.

L'algorithme doit aussi proposer quels candidats embaucher et comment les affecter aux rayons.

1. Proposez un algorithme efficace pour ce problème.
2. Justifiez la correction de votre algorithme (donnez une ébauche de preuve).
3. Analysez sa complexité.

On invente des algorithmes

Exercice 4 – *Le champion*

Les éléments d'un tableau donné $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ sont des objets dont on peut tester l'égalité, mais qu'on ne peut pas comparer (ou non plus classer). Le **champion** de B est l'élément présent dans le tableau strictement plus que n/2 fois.

1. Démontrer qu'un tableau peut contenir soit 0 soit 1 champion.
2. Programmez une fonction booléenne isChamp(x, B, s, f) qui teste est-ce que x est champion de $(b_s, \ldots, b_f)$. Indication : c'est très facile.
3. Proposez un algorithme itératif “naïf” qui trouve le champion ou répond qu'il n'y en a pas. Quelle est sa complexité ?
4. Proposez un algorithme plus efficace de type Diviser-Pour-Régner qui trouve le champion ou répond qu'il n'y en a pas.
   Indication.
   - On cherche à programmer la fonction $\mathrm{Champ}(B, s, f)$ qui renvoie la valeur du champion de $(b_s, \ldots, b_f)$ ou null s'il n'y a pas de champion
   - Coupez le tableau en deux moitiés.
   - Chaque moitié peut avoir ou non son champion (il y a en tout 4 cas). Qu'est-ce qu'on peut affirmer sur le champion du grand tableau pour chacun de ces 4 cas. Justifiez vos réponses.
   - Donnez un algorithme récursif pour $\mathrm{Champ}(B, s, f)$.
5. Analysez la complexité de votre algorithme Diviser-Pour-Régner.

Exercice 5 – *La monnaie*

On a un stock illimité de pièces de monnaie de chacune de m valeurs différentes $\alpha = p_1, p_2, \dots, p_m$. On peut représenter certains montants A avec ces monnaies. Par exemple, pour les pièces de $2, 3, 5$ (centimes) et le montant $A = 11$ il existe des représentations suivantes (et d'autres - à la fin de l'exercice on saura combien)

$$\begin{aligned} 11 &= 2+2+2+5 \\ 11 &= 2+3+3+3 \end{aligned}$$

Le problème algorithmique à résoudre dans cet exercice est le suivant : étant donné $\alpha = p_1, p_2, \dots, p_m$ et A trouver **le nombre de représentations** différentes (sans tenir compte de l'ordre) du montant A par les pièces α. On utilisera la programmation dynamique pour concevoir un algorithme qui résolve ce problème.

1. Soit $R(i, j)$ le nombre de représentations du montant j avec les i premières pièces $p_1, \dots, p_i$ Écrivez les équations de récurrence pour cette fonction sans oublier les cas de base.
2. Écrivez un algorithme efficace (récursif avec “marquage” ou itératif) pour calculer R .
3. En sachant calculer la fonction choisie R , comment répondre à la question initiale : trouver le nombre de représentations différentes du montant A par les pièces α.
4. Analysez la complexité de votre algorithme.
5. Appliquez votre algorithme à l'exemple ci-dessus ($\alpha = 2, 3, 5$ et $A = 11$).