Algorithmique — M1

Partiel du 30 novembre 2007

Université Paris Diderot

Chaque exercice DOIT être rendu sur une feuille différente (3 en tout) Document autorisé : UNE feuille de papier format A4 Durée : 1h30

Exercice 1 : diamètre d'un graphe

On considère un graphe $G = (V, E)$ non orienté non pondéré. La *distance* entre deux sommets est la longueur (en nombre d'arêtes) d'un plus court chemin les reliant. Le *diamètre* d'un graphe est la plus grande distance entre deux sommets. Proposez un algorithme de calcul de diamètre du graphe, et analysez sa complexité (dans le meilleur et le pire des cas).

La note à cet exercice dépendra de la complexité trouvée : plus rapide signifie meilleure note

Exercice 2 : taux de change optimal

On souhaite convertir de l'argent d'une devise dans une autre. Le problème est que toutes les conversions ne sont pas possibles : pour deux monnaies A et B, on peut parfois convertir de l'argent de A en B, parfois non. On considère donc un *graphe de change* $G = (V, E)$ entre monnaies donnant les conversions possibles. Ce graphe est orienté (parfois on peut convertir A en B mais pas B en A).

La *fonction de change* est une fonction c telle que
- une somme S en monnaie A vaut $S.c(A, B)$ en monnaie B (les taxes éventuelles sont incluses).
- $c(A, B)$ est défini si et seulement si (A, B) est un arc du graphe de change.
- $c(A, B) > 0$

Le *graphe de change étendu* est le graphe $G' = (V, E, c)$ pondéré par la fonction de change. Une *séquence de change* est la conversion d'une monnaie A_1 en monnaie A_k en passant par les monnaies intermédiaires $A_2 ... A_{k-1}$ (en supposant bien sûr toutes ces conversions possibles). Il lui correspond un chemin dans le graphe de change.

Question 1

Quel est le taux de change de A_1 en A_k dans une séquence de change $A_1, A_2, ... A_k$?

Question 2

Dans quelle condition (exprimée sur G') quelqu'un peut-il devenir *infiniment riche* en changeant de l'argent ?

Étant données deux séquences de change différentes de la monnaie A en la monnaie B, la meilleure des deux est celle qui a le taux le plus élevé.

Question 3

Supposons que l'on connaisse une séquence de change S_1 de la monnaie A en la monnaie B, d'une part, et une séquence S_2 de la monnaie A en la monnaie C d'autre part. Supposons que l'arc (C, B) existe, dans le graphe de change. Écrivez une condition de *relaxation* en comparant les taux des séquences S_1 d'une part, S_2 puis (C, B) d'autre part, et gardant la meilleure.

Question 4

Écrivez une version modifiée de l'algorithme de Bellman-Ford, utilisant cette condition de relaxation modifiée, donnant les meilleurs taux de change d'une monnaie A vers toutes les autres.

Question 5

Même question, en modifiant l'algorithme de Dijkstra.

Question 6

Dans quelles conditions peut-on utiliser
- Bellman-Ford modifié (de la question 4) ?
- Dijkstra modifié (de la question 5) ?

Donnez des contre-exemples quand ça ne marche pas, des éléments de preuve (en 10 lignes maximum !) quand ça marche.

Exercice 3 : plus long chemin élémentaire

On considère des graphes orientés. Un chemin *élémentaire* est un chemin qui passe au plus une fois par chaque sommet.

Question 1

Quel est le plus long chemin élémentaire dans le graphe *complet* à n sommets $v_1, ...v_n$? Ce graphe est défini de sorte que pour tous sommets $v_i \neq v_j$ il existe une arête (v_i, v_j). Comparez au diamètre de ce même graphe.

Question 2

Proposez un algorithme qui calcule le plus long chemin élémentaire dans un graphe. On ne demande pas *le* meilleur algorithme, mais juste un algorithme "naïf" qui marche.

Question 3

Analysez la complexité de votre algorithme.

La note à cet exercice dépendra de la justesse de l'algorithme, et de la justesse de l'analyse de complexité, mais ne dépendra pas de la complexité elle-même. En d'autres termes, on ne demande pas le *meilleur algorithme, mais juste un algorithme "naïf" qui marche.*