Algorithmique — M1

Partiel du 17 novembre 2009

Université Paris Diderot

Documents autorisés : une feuille de papier format A4
Durée : 1h30

On applique les cours

Exercice 1 – *Récurrence*

Étant donné que

$$T(n) = 2T(\lfloor n/4 \rfloor) + 3 \log n$$

trouvez le comportement asymptotique de $T(n)$. Justifiez votre réponse.

Exercice 2 – *Puissance*

On veut calculer x^{13} en faisant aussi peu de multiplications que possible.

1. Expliquez l'algorithme de cours pour ce problème.

2. Trouvez une chaine de multiplications pour calculer x^{13}. Combien de multiplications faut-il ?

3. Est-il possible d'obtenir x^{13} en moins de multiplications ?

Exercice 3 – *Antarctide*

L'explorateur dispose pour le chauffage de 20 kg de bois, 10 kg d'essence, 12 kg de charbon, et 300 kg d'ethanol. Un kg de bois produit 15 Mjoules de chaleur, d'essence 47, de charbon 35, et d'ethanol 30. L'explorateur peut porter jusqu'à 35kg de combustible. Quelle quantité de chaque produit doit-il prendre pour se procurer le maximum de chaleur ?

1. C'est une instance d'un problème classique vue en cours. Lequel ?

2. Expliquez l'algorithme de cours pour ce problème. (inutile de prouver sa correction)

3. Appliquez cet algorithme et trouvez la solution.

On invente des algorithmes

Exercice 4 – *Méthode imposée*

On cherche la somme d'un tableau B de n éléments entiers.

1. Écrivez un algorithme de type diviser-pour-régner qui résout ce problème.
2. Analysez sa complexité.
3. Comparez-la avec celle de l'algorithme naïf vu en L1.

Exercice 5 – *Deux couleurs*

Etant donné un graphe non-orienté et connexe $G = (V, E)$, on cherche à le colorier en noir et blanc (de manière que deux sommets adjacents ne soient jamais d'une même couleur.

1. Écrivez un algorithme glouton qui résout ce problème.
2. Analysez sa complexité.
3. Justifiez sa correction.
4. Pourquoi on ne fait pas d'algorithme glouton quand il y a plus de couleurs ?

Exercice 6 – *Un problème NP-complet*

Dans un graphe on apelle un sous-ensemble S de sommets *stable* s'il n'existe pas d'arête du graphe qui relie deux sommets de S.

Étant donné un graphe non-orienté $G = (V, E)$ (de N sommets) représenté par une matrice d'adjacence $M[i, j]$ (de taille $N \times N$) et un entier M on cherche un ensemble stable de C sommets. Dans cet exercice il faut trouver un algorithme retour-arrière qui résout ce problème. On va appeler une solution partielle un tableau d'entiers $[i_1, \dots, i_k]$ dans l'ordre croissant tel que les sommets $[v_{i_1}, \dots, v_{i_k}]$ forment un stable.

1. Écrivez une fonction booléenne $\mathrm{test}(B, k, M, N)$ qui teste est-ce que le tableau $B[k]$ est une solution partielle pour un graphe représenté par un tableau (matrice d'adjacence) $M[N, N]$.
2. Comment trouver une solution partielle de taille 0 ? Comment à partir d'une solution partielle de taille k passer à ses extensions de taille $k + 1$? Comment dire est-ce qu'on a déjà trouvé le stable de taille C ?
3. Écrivez un algorithme retour-arrière de recherche d'un stable de taille C.
4. Estimez la complexité de votre algorithme.