Automates avancés

Master 1 II et MI

Examen du 13 mai 2008 (8h30-11h30)
documents autorisés : notes manuscrites; le barème est indicatif.

1 Applications des cours

1.1 Mots infinis - $\boxed{4}$

On considère le langage L de tous les mots infinis sur $\{0, 2, 8\}$ qui contiennent une infinité de blocs (sous-suites) 2008.

1. $\boxed{1}$ Trouver une expression ω-régulière définissant L.
2. $\boxed{1}$ Trouver un automate de Büchi reconnaissant L.
3. $\boxed{2}$ Trouver une formule MSO définissant L.

2 Pour réfléchir un peu

2.1 Modélisation - $\boxed{5}$

- $\boxed{1}$ Décrivez en 5 lignes le fonctionnement simplifié d'une machine à café (payante ou non, avec 1 ou 2 boutons).
- $\boxed{2}$ Modélisez la machine par un automate temporisé. La taille raisonnable serait 3-5 états, 1 ou 2 horloges.
- $\boxed{2}$ Donnez un exemple de calcul de cet automate.

2.2 Préfixes d'un langage ω-régulier $\boxed{8}$

Pour un ω-mot $w = a_1a_2a_3 \ldots a_n \ldots$ on définit l'ensemble de ses préfixes

$$pref(w) = \{\varepsilon, a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, \ldots, a_1a_2a_3 \ldots a_n, \ldots\}.$$

(**c'est un ensemble de mots finis**). Ensuite on définit la même opération $pref$ sur les ω-langages : pour un ω-langage L on dénote par $pref(L)$ l'ensemble de tous les préfixes de tous ses ω-mots :

$$pref(L) = \bigcup_{w \in L} pref(w).$$

On remarque que $pref(L)$ est un langage de mots finis.

On énonce le théorème suivant

Théorème 1 *Pour chaque L ω-régulier le langage $pref(L)$ est régulier.*

1. $\boxed{1}$ Pour vous habituer à l'opération $pref$ trouvez quel est $pref((abc)^\omega)$?
2. $\boxed{5}$ Démontrez le théorème. On propose deux pistes au choix :

   Piste automates Prenez un automate de Büchi pour L et construisez un automate fini pour $pref(L)$. Le plan de preuve serait à peu près comme ceci (il faut remplacer les points par des raisonnements).
   - Soit $A = (Q, \Sigma, i, F, \Delta)$ un automate de Büchi qui reconnait L.
   - On cherche à construire $A' = (Q', \Sigma', i', F', \Delta')$ un automate fini qui reconnait $pref(L)$
     - Certains éléments de A' sont les mêmes que dans A, ainsi $\Sigma' = \Sigma$, et ……..
     - D'autres éléments de A' sont tout à fait différents, on les construit comme ceci : ……..
   - Il reste à démontrer que l'automate fini A' reconnait le langage $pref(L)$. Pour ceci on démontre deux choses.
     - Soit w un mot fini accepté par A'. Alors ……… Par conséquent $w \in pref(L)$.
     - Soit $w \in pref(L)$. Alors ……… Par conséquent w est accepté par A'.

   Piste expressions Prenez une expression ω-régulière pour L et construisez une expression régulière pour $pref(L)$. Induction structurelle /algorithme récursif s'imposent ici. Le plan de preuve serait à peu près comme ceci (il faut remplacer les points par des raisonnements).
   - Soit f une expression *omega*-régulière qui décrit L. On se rappelle que les expressions ω-régulières sont définies par une grammaire (forme de Backus-Naur) suivante : ……..
   - On cherche à construire f' une expression régulière qui décrit $pref(L)$. On analyse chaque cas de la définition des expressions ω-régulières ci-dessus.
   - Si $f = \ldots$ alors $f' = \ldots$ parce que …

     …
   - Si $f = \ldots$ alors $f' = \ldots$ parce que …
   - Ainsi de manière récursive on obtient une expression régulière pour $pref(L)$ ce qui conclue la preuve.
   - Sans doute dans votre construction vous aurez besoin d'un résultat similaire pour les langages de mots finis.

     Lemme 1 *Soit M un langage régulier des mots finis. Alors le langage $pref(M)$ de tous les préfixes des mots de M est aussi régulier.*

     Vous avez vu ce lemme dans votre cursus, mais démontrez-le quand même.
3. $\boxed{2}$ En supposant le théorème vrai, on cherche à démontrer que le ω-langage $M = \{(a^nc)^\omega \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas ω-régulier.
   (a) Quel est le langage $pref(M)$?
   (b) Quel est le langage $pref(M) \cap a^*ca^*c$? est-il régulier ? pourquoi ?
   (c) Faites maintenant le raisonnement pour démontrer la non ω-régularité de M.