Automates avancés

Master 1 II, MI

Examen du 19 mai 2009 (12h-15h) - salle 265E
documents autorisés : 2 feuilles A4 recto-verso; le barème est indicatif.

1 Applications des cours

1.1 Sans étoiles

Pour chacun des langages ci-dessus sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ l'exprimer en logique $FO(<, \Sigma)$ ou démontrer que c'est impossible.

1. $\boxed{1}$ $L_1 = \{a^n ba^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
2. $\boxed{2}$ $L_2 = (b^+a)^*$ (on rappelle que $b^+ = bb^*$).
3. $\boxed{3}$ $L_3 = a(baba)^*a$.

1.2 Un langage de mots infinis

On considère le langage L de tous les mots infinis sur $\{a, b\}$ qui contiennent une infinité de fois les motifs $ab^{2n}a$ (on ne demande pas que n soit le même).

1. $\boxed{1}$ Trouvez une expression ω-régulière définissant L.
2. $\boxed{1}$ Trouvez un automate de Büchi reconnaissant L.
3. $\boxed{2}$ Trouvez une formule MSO définissant L.

2 Méthodes génériques pour les résultats intéressants

2.1 On étend Presburger

1. $\boxed{1}$ On enrichit l'arithmétique de Presburger en y ajoutant le prédicat P8 tel que $P8(x)$ est vrai si et seulement si x est une puissance de 8. Est-ce que la théorie obtenue est décidable ? Essayez d'étendre la preuve du cours (sans la répéter).
2. $\boxed{3}$ Même question pour le prédicat P10 tel que $P10(x)$ est vrai si et seulement si x est une puissance de 10.

2.2 On compte comme dans le partiel $\boxed{4}$

Montrer qu'il existe un langage fini sur $\Sigma = \{a; b; c; d\}$ tel que
– tous les mots de G contiennent < 100 lettres ;
– ET toute expression régulière qui définit G contient > 1000000 symboles.

2.3 On compile $\boxed{10}$

On considère le fragment $\mathcal{L}$ de LTL sans Until, qui contient des formules définies comme suit :

$$F ::== \textbf{true}|\textbf{false}|a| \circ F| \diamond F|\Box F|F \wedge F|F \vee F|\neg F$$

On cherche à démontrer le résultat suivant :

Théorème 1 *Chaque formule de la logique $\mathcal{L}$ (interprétée sur les mots finis) est équivalente à une expression sans étoile.*

La démonstration doit contenir un algorithme de traduction. On n'utilisera pas les résultats énoncées en cours sans preuve.

1. Certaines opérations de la logique $\mathcal{L}$ peuvent être exprimées en utilisant autres opérations. On peut donc les supprimer sans changer le pouvoir expressif de la logique. Expliquez quelles sont les opérations inutiles, pourquoi, et donnez une grammaire pour la logique simplifiée $\mathcal{L}'$.
2. Donnez le plan de démonstration du théorème par induction structurelle sur la grammaire de $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{L}'$ (une liste de lemmes à prouver).
3. Faites le cas de base. Indication: N'oubliez pas que la formule de LTL a signifie que le mot commence par a
4. Faites le cas inductif pour les opérateurs booléens.
5. Faites le cas inductif pour les opérateurs temporels.
6. Terminez la preuve.
7. J'ai omis de définir la sémantique de cette logique - faites le, sans oublier que les mots sont finis.
8. Testez votre méthode de traduction sur $\diamond\Box b$

3 Exercices subsidiaires difficiles

Si vous avez tout fait, et il vous reste beaucoup de temps, vous pouvez réfléchir aux questions suivantes pour lesquelles je ne connais pas de solution simple :

1. Question du partiel : comment démontrer que le langage qui contient les puissances de 3 en base 2 n'est pas régulier ?
2. Comment démontrer que l' arithmétique de Presburger étendue à la fois par P8 et P10 (de l'exo 2.1) est indécidable ?
3. Comment étendre la traduction de 3.2 aux formules avec Until ?