TD2 — fonctions et prédicats récursifs primitifs

1. Montrer que les fonctions suivantes sont récursives primitives (RP) en les construisant à partir de fonctions de base 0,σ,π avec les constructeurs Comp et Rec_Pri:
   (a) 7 (d'arité 0 et d'arité 1);
   (b) $x \uparrow y$ (cela signifie x^y);
   (c) $x \uparrow\uparrow y$ (cela signifie $\underbrace{x \uparrow (x \uparrow \ldots \uparrow x)}_{y \text{ fois}})$;
   (d) $sg(x)$ (signe : 0 quand x est nul, 1 quand x est positif);
   (e) $x \dot{-} y$ (différence tronquée : $x - y$ si $x \geq y$; 0 sinon);
   (f) $|x - y|$.
2. **Somme finie.** Montrer que si $f(x,y)$ est RP, alors $h(x,n) = \sum_{y=0}^{n} f(x,y)$ est RP.
3. Montrer que les prédicats suivants sont RP : $x = 0$; $x > y$; $x < y$; $x = y$.
4. Montrer que les prédicats RP sont fermés sous les opérations suivantes: $\wedge$; $\vee$; $\neg$, $\exists^{\leq}$; $\forall^{\leq}$.
5. **Substitution.** Soit P un prédicat RP (d'arité n) et $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions RP (d'arité k). Montrer que le prédicat Q (d'arité k) défini par $Q(z) \equiv P(f_1(z), \ldots, f_n(z))$ est aussi RP.
6. Montrer que les prédicats $x \mid y$, $EstPremier(x)$ et $x\ mod\ y = z$ sont RP.
7. **Nombres parfaits.** *Le nombre x est parfait s'il est égal à la somme de tous ses diviseurs (différents de x). Par exemple : $6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.*
   Montrer que le prédicat *EstParfait* est récursif primitif.
8. Montrer que les fonctions suivantes sont récursives primitives en utilisant les propriétés de fermeture:

   (a) x mod y;
   (b) x `div` y;
   (c) pgcd et ppcm de 2 entiers;
   (d) $ex2(x)$: l'exposant de 2 dans la décomposition de x en facteurs premiers;
   (e) p_x : le x-ème nombre premier;
   (f) $ex(x,y)$: l'exposant de p_x dans la décomposition de y en facteurs premiers.
   (g) C_x^y : le nombre de combinaisons de x éléments y à y;
   (h) $\lfloor \sqrt{\mathtt{x}} \rfloor$: la partie entière de $\sqrt{x}$;
   (i) $\lfloor \log_{\mathtt{x}} \mathtt{y} \rfloor$: la partie entière de $\log_x y$;

9. Les nombres de Fibonacci sont définis par la récurrence:

$$\begin{cases} Fib(0) &= 1 \\ Fib(1) &= 1 \\ Fib(n+2) &= Fib(n) + Fib(n+1) \end{cases}$$

   Montrer que la fonction Fib est RP.
   Indication. Utiliser la fonction auxiliaire $g = \lambda x.2^{Fib(x)} * 3^{Fib(x+1)}$