

# Calculabilité

UJF — MINF

Sujet de l'examen du 23 avril 2003

(seul document autorisé : une feuille A4 recto/verso rédigée par l'étudiant)

## Règles générales

- Toutes les réponses doivent être justifiées.
- Si vous utilisez les définitions différentes de celles de cours, précisez-le.
- Si vous ne savez pas faire la construction formelle, donnez au moins un programme ou une description informelle de l'algorithme (semi-algorithme), ou des raisons pourquoi un tel algorithme n'existe pas.
- Les quatre problèmes sont indépendants.

## 1 Analyse d'une fonction

Soit  $g(x)$  le nombre premier le plus proche à  $x$ . Par exemple:

$$g(10) = 11; \quad g(17) = 17; \quad g(25) = 23$$

- <sup>1</sup> Est-ce que  $g$  est récursive primitive?
- Est-ce que  $g$  est récursive partielle?
- Est-ce que  $g$  est calculable par une machine de Turing?

## 2 Analyse de décidabilité

On considère le prédicat  $P(x) \equiv (\varphi_x(x^2) = x^6)$

1.  Définir  $P$  en français.
2.  Est-ce que  $P$  est décidable (récursif)?
3.  Est-ce que  $P$  est récursivement énumérable (r.e.)?
4.  Est-ce que  $\overline{P}$  est r.e.?

t.s.v.p.

---

1. Barème indicatif

### 3 Machines multiplicatives

Le but de cet exercice est d'établir l'indécidabilité du problème de l'arrêt pour une classe de machines (ou programmes) très simple.

La machine multiplicative a un seul registre  $R$  capable de stocker un entier naturel positif.

Son programme est un ensemble d'instructions de types suivants ( $a$  et  $b$  sont des constantes entières naturelles positives, on autorise l'utilisation de plusieurs constantes différentes)

- $q$ :  $R := R * a$ ; **goto**  $p$
- $q$ :  $R := R/a$ ; **goto**  $p$
- $q$ : **if**  $R \bmod a = b$  **then goto**  $p$  **else goto**  $t$
- $q$ : Stop

Une tentative de division impossible dans  $\mathbb{N}$  (telle que  $5/3$ ) produit une erreur.

On étudie le problème de l'arrêt pour cette classe de machines  $ArretMult(M, R_0)$ : "Est-ce que la machine multiplicative  $M$  en démarrant avec  $R_0$  dans le registre s'arrête (sans erreurs)?"

#### Questions

1. [1] Donnez une machine multiplicative qui à partir de chaque  $R$  initial de la forme  $R = 2^n$  s'arrête avec  $R = 5 \cdot 7^n$ .
2. [5] Prouvez que  $ArretMult$  est indécidable. *Indication: Simulez la machine à 2 compteurs.*
3. [2] Existe-t-il une machine multiplicative qui à partir de chaque  $R$  initial s'arrête avec  $R = 1$ ?

### 4 Enumération monotone

On rappelle qu'une fonction  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est monotone croissante si

$$\forall m < n (g(m) \leq g(n))$$

On n'exige pas la monotonie stricte, par exemple une fonction constante est monotone.

Prouver qu'un ensemble non-vide  $A \subset \mathbb{N}$  est décidable si [2] et seulement si [2] il existe une fonction récursive totale **monotone croissante**  $g$  telle que  $A = Im(g)$ .

*Indication:*

- En termes usuels il faut montrer que  $A$  est décidable ssi il peut être énuméré dans l'ordre croissant.
- Il serait utile de considérer les deux cas:  $A$  est fini,  $A$  est infini.