

Université Paris Diderot – École doctorale de sciences mathématiques de Paris centre

**Mémoire d'habilitation à diriger des recherches**

Spécialité Informatique

# RENCONTRES AUTOUR DE LA COMBINATOIRE DES CARTES

Guillaume Chapuy

**Rapporteuse et rapporteurs :**

Valérie Berthé,	Directrice de recherche au CNRS,
Christian Krattenthaler,	Professeur, Universität Wien,
Grégory Miermont,	Professeur, ENS de Lyon.

**Soutenu le 10 avril 2018 à Paris devant le jury composé de :**

Frédérique Bassino,	Professeure, Université Paris Nord,
Valérie Berthé,	Directrice de recherche au CNRS,
Emmanuel Guitter,	Chercheur, CEA,
Christian Krattenthaler,	Professeur, Universität Wien, Autriche,
Jean-François Le Gall,	Professeur, Université Paris Sud,
Grégory Miermont,	Professeur, ENS de Lyon.
Cyril Nicaud,	Professeur, Université Paris Est,
Bruno Salvy,	Directeur de Recherche, INRIA.



## Remerciements

Je remercie les rapporteur·se·s et les membres du jury pour leur travail et leur disponibilité.

Je remercie mes collaborateurs et collaboratrices pour tout ce que j'ai appris, et pour l'intérêt, parfois l'émotion, que j'ai ressentie à apprendre d'eux ou avec eux.

Je remercie toutes les personnes qui font de ma vie scientifique ce qu'elle est.

Je remercie mes amis et ma famille.

*Pour une version plus personnelle et détaillée des remerciements, il vous faudra mettre la main sur une version papier !*

---

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1	À propos de ce document . . . . .	1
2	Liste des travaux de recherche . . . . .	2
3	Mise en contexte subjective des travaux abordés dans ce document . . . . .	4
3.1	À propos de l'énumération de cartes . . . . .	4
3.2	Combinatoire algébrique, fermions, et fonctions tau . . . . .	7
3.3	Cartes aléatoires et curiosités . . . . .	9
3.4	Au delà des cartes . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Quelques éléments de combinatoire des cartes</b>	<b>11</b>
1	Cartes, permutations . . . . .	11
1.1	Cartes topologiques . . . . .	11
1.2	Cartes combinatoires . . . . .	12
1.3	Cartes et systèmes de rotation . . . . .	15
2	Approche algébrique à l'énumération de cartes . . . . .	16
2.1	Partitions, algèbre du groupe symétrique, constellations, et caractères	16
2.2	Contenus, éléments de Jucys-Murphy, nombres de Hurwitz pondérés	20
3	Fonctions symétriques, espace de Fock . . . . .	23
3.1	Fonctions symétriques, fonctions de Schur, et caractères . . . . .	23
3.2	Retour aux partitions, entrelacements, tableaux semi-standard . . . . .	25
3.3	Espace de Fock bosonique et opérateurs de vertex . . . . .	26
3.4	Première application des relations de commutations : RSK et identité de Cauchy . . . . .	28
3.5	Espace de Fock Fermionique . . . . .	30
3.6	Cartes et fonctions tau . . . . .	32
3.7	Conclusion à la section 3 . . . . .	34
4	Bijections et cartes aléatoires . . . . .	35
4.1	Bijection des arbres étiquetés . . . . .	35
4.2	Cartes d'excès fini et schémas . . . . .	37
4.3	Quelques idées sur les grandes cartes aléatoires . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Sur les cartes à une face [Cha10 ; Cha11 ; CFF13 ; Ang+13 ; BC11b]</b>	<b>43</b>
1	Sur les cartes à une face . . . . .	44
2	La bijection des trisections [Cha11] . . . . .	45
2.1	Commentaires et corollaires . . . . .	46
3	La bijection des arbres $C$ -décorés [CFF13] . . . . .	48

3.1	Corollaires et commentaires . . . . .	49
4	Application : énumération et limite locale en grand genre [Ang+13] . . . .	51
5	Le cas non-orientable [BC11b] . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Fonctions tau, Fermions, pavages [CC15 ; BCC17 ; Bou+17 ; Bet+14]</b>	<b>59</b>
1	Réurrences quadratiques pour compter les cartes [CC15] . . . . .	60
1.1	Introduction en digression : la récurrence de Goulden et Jackson . .	60
1.2	Théorèmes principaux de [CC15] . . . . .	61
1.3	Idée de démonstration : élimination de variables dans l'équation KP	62
1.4	D'autres corollaires : fonctions génératrices et récurrence des $t_g$ . . . .	64
1.5	Encore quelques commentaires, et questions ouvertes. . . . .	65
1.6	Dernière minute : place aux jeunes . . . . .	67
2	Rail Yard Graphs et pavages pentus [Bou+17] . . . . .	68
2.1	Introduction aux résultats de [BCC17 ; Bou+17] . . . . .	68
2.2	Rail Yard Graphs et configurations de dimères . . . . .	69
2.3	Résultats principaux de [Bou+17] . . . . .	73
2.4	Corrélations . . . . .	74
2.5	Quelques éléments des démonstrations : diagrammes mayas et opé- rateurs de vertex . . . . .	76
2.6	Localisation des dimères . . . . .	79
2.7	Pavages Pentus [BCC17] . . . . .	80
2.8	Algorithmes de génération aléatoire, formes limites [Bet+14] . . . .	82
<b>5</b>	<b>Cartes aléatoires [Cha10 ; BC12 ; Cha17 ; Add+18]</b>	<b>85</b>
1	Profil des cartes de genre $g$ , profil vertical des arbres, et les nombres $t_g$ [Cha10 ; BC12] . . . . .	85
1.1	Profil de cartes de genre $g$ , ISE, fonctionnelle $W_\infty$ et nombres $t_g$ . .	85
1.2	Profil vertical des arbres [BC12] et version discrète de la loi de $f_{ISE}$	88
2	Interprétations probabilistes de la récurrence des $t_g$ [Cha17] et une con- jecture sur les diagrammes de Voronoï . . . . .	90
2.1	Résultats et la « big conjecture » . . . . .	90
2.2	Idée de démonstration . . . . .	92
3	Diagrammes de Voronoï dans les arbres et cartes d'excès fini [Add+18] . .	94
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>99</b>
1	Intervalles de Tamari et conjectures de Bergeron et Préville-Ratelle [BCP13]	99
2	Graphes ajoutables et conjecture de McDiarmid, Steger et Welsh [CP15] .	101
	<b>Bibliographie</b>	<b>105</b>



# Introduction

*Le clair de lune à travers les hautes branches,  
Les poètes disent, tous, qu'il est plus  
Que le clair de lune à travers les hautes branches.*

*Mais pour moi, qui ne sais pas ce que je pense,  
Ce que le clair de lune à travers les hautes branches  
Est, en plus d'être  
Le clair de lune à travers les hautes branches,  
C'est de n'être rien de plus  
Que le clair de lune à travers les hautes branches.*

*Fernando Pessoa (Alberto Caiero),  
Le Gardeur de Troupeaux.*

## 1. — À PROPOS DE CE DOCUMENT

Le premier but de ce document est de permettre à ses lecteurs et lectrices de se faire une idée des travaux de recherche que j'ai effectués ces dix dernières années. Il s'agira principalement, mais pas seulement, d'une promenade autour de la question de l'énumération exacte et asymptotique des cartes de genre  $g \geq 0$ . On y croquera divers types de combinatoires (bijective, algébrique, analytique, sériégénératrice), des considérations probabilistes, ainsi qu'un peu de physique mathématique. S'il ne s'agira pas de donner une liste exhaustive de mes travaux, nous devrions néanmoins croiser les questions essentielles et les outils principaux qui nourrissent ma recherche.

Que ce soit en combinatoire algébrique, en énumération, en probabilités, les cartes combinatoires donnent lieu à des problèmes toujours pertinents, tout en étant à l'origine de liens entre ces théories qui souvent mettent au jour des propriétés nouvelles et inattendues. Ce principe général, que l'on pourrait résumer ainsi, *il est toujours pertinent d'étudier plus avant la combinatoire des cartes*, n'a pas été mis en défaut depuis 60 ans que cette thématique de recherche existe, et nous espérons que nos lecteurs et lectrices adhéreront à ce point de vue au fur et à mesure de leur lecture.

Concrètement, la suite de ce document est une aide à la lecture (ou plutôt, une présentation succincte des résultats et idées principales) d'un sous-ensemble de mes articles de recherche. On trouvera ci-dessous une liste de ces travaux avec une indication de ceux utilisés ici. Nous avons choisi un ensemble de travaux abordant des thématiques variées, de la pure combinatoire bijective à des considérations plus algébriques ou probabilistes. De plus, j'ai essayé de ne pas trop parler de mes travaux de thèse, à l'exception du tout début des chapitres 3 et 5.

Avec plus de détails, ce document s'organise donc ainsi :

- Dans ce chapitre, après ma liste de publications, je présenterai un aperçu subjectif de mes travaux, une mise en contexte de quelques pages.
- Le chapitre 2 est une sorte de « cours de secours » sur les cartes, qui fait un tour d’horizon de différentes techniques classiques dans la théorie des cartes combinatoires. Les plus expérimentées de nos lectrices et lecteurs pourront le parcourir en diagonale.
- Au chapitre 3 je présente mes travaux sur les cartes à une face, qui sont principalement de la pure combinatoire bijective.
- Au chapitre 4 je présente deux travaux de combinatoire qui ont pour point commun leur origine dans la combinatoire de l’espace de Fock. On y parlera de récurrences quadratiques pour compter les cartes en tout genre, et de modèles de dimères exactement solubles sur certaines classes de graphes plans.
- Au chapitre 5 j’évoquerai des aspects plus probabilistes de mes travaux.
- En conclusion au chapitre 6 je présenterai rapidement deux résultats de nature un peu moins cartographique.

## 2. — LISTE DES TRAVAUX DE RECHERCHE

Voici la liste de mes écrits scientifiques au 1er décembre 2017. Ceux qui sont cités plus tard apparaissent aussi dans la bibliographie finale.

### Travaux sur lesquels s’appuie directement ce mémoire

- [Add+18] L. ADDARIO-BERRY, O. ANGEL, G. CHAPUY, É. FUSY et C. GOLDSCHMIDT. “Voronoi tessellations in the CRT and continuum random maps of finite excess”. In : *proceedings of SODA 2018, New Orleans* (2018).
- [Bou+17] C. BOUTILLIER, J. BOUTTIER, G. CHAPUY, S. CORTEEL et S. RAMASSAMY. “Dimers on Rail Yard Graphs”. In : *Ann. Inst. Henri Poincaré Comb. Phys. Interact.* 4.4 (2017), p. 479–539.
- [BCC17] J. BOUTTIER, G. CHAPUY et S. CORTEEL. “From Aztec diamonds to pyramids : steep tilings”. In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 369.8 (2017), p. 5921–5959.
- [Cha17] G. CHAPUY. “On tessellations of random maps and the  $t_g$ -recurrence”. In : *Sém. Lothar. Combin.* 78B (2017). Proceedings of FPSAC ’17. Long version submitted for publication, see arxiv :1603.07714., Art. 79, 12.
- [CC15] S. R. CARRELL et G. CHAPUY. “Simple recurrence formulas to count maps on orientable surfaces”. In : *J. Combin. Theory Ser. A* 133 (2015), p. 58–75.
- [CP15] G. CHAPUY et G. PERARNAU. “Connectivity in bridge-addable graph classes : the McDiarmid-Steger-Welsh conjecture”. In : *Proceedings of SODA 2016. Long version submitted for publication, available at ArXiv :1504.06344* (2015). arXiv : 1504.06344 [math.CO].
- [Ang+13] O. ANGEL, G. CHAPUY, N. CURIEN et G. RAY. “The local limit of unicellular maps in high genus”. In : *Electron. Commun. Probab.* 18 (2013), no. 86, 1–8.
- [BCP13] M. BOUSQUET-MÉLOU, G. CHAPUY et L.-F. PRÉVILLE-RATELLE. “The representation of the symmetric group on  $m$ -Tamari intervals”. In : *Adv. Math.* 247 (2013), p. 309–342.



- [CFF13] G. CHAPUY, V. FÉRAY et É. FUSY. “A simple model of trees for unicellular maps”. In : *J. Combin. Theory Ser. A* 120.8 (2013), p. 2064–2092.
- [BC12] M. BOUSQUET-MÉLOU et G. CHAPUY. “The vertical profile of embedded trees”. In : *Electron. J. Combin.* 19.3 (2012), Paper 46, 61.
- [BC11b] O. BERNARDI et G. CHAPUY. “Counting unicellular maps on non-orientable surfaces”. In : *Adv. in Appl. Math.* 47.2 (2011), p. 259–275.
- [Cha11] G. CHAPUY. “A new combinatorial identity for unicellular maps, via a direct bijective approach”. In : *Adv. in Appl. Math.* 47.4 (2011), p. 874–893.
- [Cha10] G. CHAPUY. “The structure of unicellular maps, and a connection between maps of positive genus and planar labelled trees”. In : *Probab. Theory Related Fields* 147.3-4 (2010), p. 415–447.

### Autres travaux

- [Ale+17] A. ALEXANDROV, G. CHAPUY, B. EYNARD et J. HARNAD. “Fermionic approach to weighted Hurwitz numbers and topological recursion”. In : *Communications in Mathematical Physics (online first)* (2017).
- [CD17] G. CHAPUY et M. DOŁĘGA. “A bijection for rooted maps on general surfaces”. In : *J. Combin. Theory Ser. A* 145 (2017), p. 252–307.
- [CF16] G. CHAPUY et W. FANG. “Generating functions of bipartite maps on orientable surfaces”. In : *Electron. J. Combin.* 23.3 (2016), Paper 3.31, 37.
- [CP16] G. CHAPUY et G. PERARNAU. “Local convergence and stability of tight bridge-addable graph classes”. In : *Proceedings of RANDOM 2016. Approximation, randomization, and combinatorial optimization. Algorithms and techniques*. T. 60. LIPIcs. Leibniz Int. Proc. Inform. Schloss Dagstuhl. Leibniz-Zent. Inform., Wadern, 2016, Art. No. 26, 11.
- [Cha+15b] G. CHAPUY, É. FUSY, O. GIMÉNEZ et M. NOY. “On the diameter of random planar graphs”. In : *Combin. Probab. Comput.* 24.1 (2015), p. 145–178.
- [Bet+14] D. BETEA, C. BOUTILLIER, J. BOUTTIER, G. CHAPUY, S. CORTEEL et M. VULETIĆ. “Perfect sampling algorithm for Schur processes”. In : *arXiv1407.3764* (2014).
- [CS14] G. CHAPUY et C. STUMP. “Counting factorizations of Coxeter elements into products of reflections”. In : *J. Lond. Math. Soc. (2)* 90.3 (2014), p. 919–939.
- [BC11a] O. BERNARDI et G. CHAPUY. “A bijection for covered maps, or a shortcut between Harer-Zagier’s and Jackson’s formulas”. In : *J. Combin. Theory Ser. A* 118.6 (2011), p. 1718–1748.
- [Cha+11] G. CHAPUY, É. FUSY, O. GIMÉNEZ, B. MOHAR et M. NOY. “Asymptotic enumeration and limit laws for graphs of fixed genus”. In : *J. Combin. Theory Ser. A* 118.3 (2011), p. 748–777.
- [Cha09a] G. CHAPUY. “Asymptotic enumeration of constellations and related families of maps on orientable surfaces”. In : *Combin. Probab. Comput.* 18.4 (2009), p. 477–516.
- [Cha09b] G. CHAPUY. “Combinatoire bijective des cartes de genre supérieur”. Thèse de Doctorat. Ecole Polytechnique, juin 2009.

- [CMS09] G. CHAPUY, M. MARCUS et G. SCHAEFFER. “A bijection for rooted maps on orientable surfaces”. In : *SIAM J. Discrete Math.* 23.3 (2009), p. 1587–1611.
- [Cha+08] G. CHAPUY, É. FUSY, M. KANG et B. SHOILEKOVA. “A complete grammar for decomposing a family of graphs into 3-connected components”. In : *Electron. J. Combin.* 15.1 (2008), Research Paper 148, 39.
- [Cha07a] G. CHAPUY. “Random permutations and their discrepancy process”. In : *2007 Conference on Analysis of Algorithms, AofA 07*. Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., AH. Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Nancy, 2007, p. 415–426.

Note : Plusieurs de ces travaux ont fait l’objet d’annonces sous la forme de résumés de 12 pages ou moins, publiés dans les actes de la conférence FPSAC (éditions ’09, ’10, ’12, ’12, ’14, ’15, ’15, ’17). Ces publications FPSAC ne sont pas répétées ici sauf si l’article journal n’est pas encore publié.

### 3. — MISE EN CONTEXTE SUBJECTIVE DES TRAVAUX ABORDÉS DANS CE DOCUMENT

Les travaux présentés dans ce mémoire concernent principalement la combinatoire des cartes. Le mot « combinatoire » est à prendre avec précaution, car il revêt des sens très différents selon les communautés scientifiques, les pays, ou les goûts. Il existe en France une communauté importante, avec son style et ses traditions, qui pratique notamment une combinatoire principalement énumérative (il s’agit de compter), plutôt concrète (soit par l’utilisation de méthodes bijectives, soit par l’utilisation de méthodes symboliques effectives et de décompositions à base de grammaires), et fortement liée aux probabilités discrètes et plus généralement aux applications dans lesquelles on a besoin de modéliser le comportement d’objets discrets aléatoires – comme l’analyse d’algorithmes ou la bio-informatique. C’est, à très gros traits, dans cette zone que se situent la plupart de mes travaux et de ceux qui seront abordés ici.

Au sein de la combinatoire, la combinatoire des cartes joue un rôle particulier. Les problématiques d’énumération de cartes apparaissent spontanément dans de nombreux champs des sciences, ce qui conduit non seulement à un intérêt pour ces questions, mais à une multitude de méthodes pour les aborder. Ce que l’on rappellera au chapitre suivant n’est qu’une toute petite fraction de l’ensemble de méthodes et de connaissances accumulées sur ces objets, de niveaux de technicité et d’abstraction variés. La combinatoire des cartes est ainsi pour les combinatoristes un lieu de rencontre permanent : on ne cesse de confronter les outils bijectifs, symboliques, probabilistes à des méthodes et des résultats qui viennent d’autres horizons, et ces rencontres en retour nous proposent une combinatoire souvent étonnante et un émerveillement sans cesse renouvelé !

C’est le goût de ces rencontres que j’essaierai de partager dans ce document.

#### 3.1. — À propos de l’énumération de cartes

Même si nous nous intéresserons principalement aux cartes de genre supérieur, commençons par une rapide discussion des cartes *planaires*, c’est à dire des cartes de genre 0. Leurs aspects énumératifs ont été étudiés par Tutte qui, dans une série d’articles fondamentaux [Tut63; Tut62b; Tut62a] a découvert des formules extraordinaires énumérant les cartes planaires sous diverses contraintes (triangulations, quadrangulations, etc). Les méthodes utilisées par Tutte dans ces papiers ont ouvert la voie à un champ important de la science série-génératrice, l’étude des équations à variables catalytiques, qui reste d’actualité aujourd’hui [Bou06; BJ06b; BB11].

Les formules explicites de Tutte et leurs généralisations à de nombreuses familles de cartes (voir par exemple [BC94]) ont permis l'étude asymptotique de certains paramètres des cartes aléatoires comme le degré typique ou maximum d'un sommet [GR94; GW00]. Plus encore, elle suggérait l'existence d'une structure cachée dans ces objets, et posaient la question de trouver une explication directe, constructive et combinatoire, à ces formules. La première démonstration bijective d'une formule de Tutte est due à Cori et Vauquelin [CV81], mais il a fallu attendre la fin des années 90 et une percée spectaculaire de Schaeffer [Sch99; Sch97] qui a découvert plusieurs classes de constructions bijectives, reliant les cartes à certaines familles d'arbres, expliquant directement les formules de Tutte.

—> *Au chapitre 2, nous rappellerons la bijection de Cori-Vauquelin-Schaeffer et ses généralisations. Elles nous seront utiles pour les conséquences probabilistes du chapitre 5.*

Ce moment a fondé le domaine de la combinatoire bijective des cartes planaires, aujourd'hui incarnée par une école de recherche à part entière et qui fait encore l'objet d'un développement actif [AP15; BF12b; BF12a; Sch15]. Ces percées ont aussi permis le développement de l'étude des cartes planaires aléatoires [CS04; BDG03]. L'étude des cartes aléatoires planaires en probabilités et combinatoire est maintenant un domaine bien fondé, actif, avec une riche boîte à outils de techniques, des problèmes ouverts difficiles et bien délimités, et des directions de recherche claires [Mie13; Le 13]. Comme nous le verrons, le cas du genre supérieur est un domaine plus jeune, et mon travail n'apporte qu'une modeste contribution au développement d'outils et de problématiques mûres propres aux topologies non sphériques.

L'étude des cartes sur des surfaces autres que le plan a été initiée dans une série d'articles remarquables, et trop souvent oubliés, de Lehman et Walsh dans les années 1970 [WL72a; WL72b; WL75]. Ils ont en particulier découvert les propriétés énumératives remarquables des cartes à *une face*, redécouvertes dans les années 1990 par Harer et Zagier [HZ86] dans un article célèbre aux motivations géométriques. Les cartes à une face sont des objets certes moins riches que les cartes générales mais qui portent déjà une partie de la richesse des cartes de genre supérieur. Elles apparaissent naturellement au carrefour de plusieurs domaines dont la théorie des représentations du groupe symétrique [Jac88; Zag95; LZ04] ce qui a conduit à de nombreux résultats énumératifs [GS98; Adr97; PS02]. Ces résultats suggéraient une forte structure combinatoire, mais la première preuve bijective d'une des formules de Harer et Zagier ne fut trouvée que dans les années 2000 [GN05; Las01]. L'explication de la présence de nombres de Catalan dans ces formules fut l'une des contributions principale de ma thèse [Cha11], via l'introduction de la notion de trisection. Plus tard, avec Féray et Fusy, nous avons amélioré cette construction avec l'introduction des arbres  $C$ -décorés [CFF13]. On peut depuis ce travail, qui est l'aboutissement de 40 ans d'efforts, considérer que la combinatoire des cartes à une face est maintenant bien comprise.

—> *Le chapitre 3 sera consacré à mes travaux sur les cartes à une face. On présentera notamment la bijection des trisections [Cha11], celle des arbres  $C$ -décorés [CFF13], et on donnera un aperçu de la puissance énumérative de ces constructions, notamment avec la preuve « algorithmique » de la récurrence de Harer et Zagier. Et puisque tout devient si facile avec les cartes à une face, on se paiera le luxe d'un détour par le cas non-orientable, fruit d'un travail avec Olivier Bernardi [BC11b].*

Si le cas (important) des cartes à une face est maintenant bien compris, beaucoup reste à faire dans le cas général. En 1990, dans des articles historiquement importants, Bender et Canfield [BC86; BC91] ont mis au jour le premier exemple de ce que nous

appelons un schéma de rationalité dans le contexte d'énumération de cartes. En gros, pour chaque  $g \geq 0$ , la fonction génératrice  $F_g(t)$  des cartes de genre  $g$  par le nombre d'arêtes s'exprime comme une fraction rationnelle en la variable  $s$  issue du simple changement de variable  $t \leftrightarrow s$  donné par  $t = (1 + 3s^2)/s$ . Ce papier a eu une énorme influence, non seulement par les idées de preuves (qui introduisent des idées cruciales sur la manière de manipuler les séries de cartes de genre supérieur), mais par le fait que de très nombreux schémas de rationalité sont apparus de manière indépendante dans la littérature depuis les années 1990, pour différentes questions d'énumération d'objets topologiques ou de variantes de cartes, démontrés avec toutes sortes de techniques [Gao93 ; BCR93 ; GJV01 ; GGN13] (un exemple fameux est le schéma de rationalité pour les *nombres de Hurwitz*, conjecturé dans [GJ99], puis démontré idans [GJV01] en utilisant la fameuse formule ELSV venant de la géométrie algébrique [Eke+01]). Une approche moderne pour comprendre ces schémas de rationalité est la *réurrence topologique de Eynard-Orantin*, un édifice complexe inventé dans le contexte de la physique mathématique [EO09] et qui a déjà mené à une unification partielle de ces résultats (bien que de nombreux aspects des démonstrations continuent d'être modèle-dépendants). En parlant avec une simplification extrême, on peut considérer la réurrence topologique comme un raffinement très élaboré des techniques utilisées dans [BC91] pour calculer par induction les fonctions génératrices  $F_g(t)$ .

Du point de vue combinatoire, les schémas de rationalité semblent indiquer une structure très riche : il devrait exister une décomposition sous-jacente des cartes en des objets plus simples, dont la structure locale serait reliée au changement de variable, et dont la structure globale serait suffisamment simple pour expliquer la rationalité. Et de fait, nous savons aujourd'hui que c'est, au moins partiellement, le cas. L'outil principal pour cela est la bijection de Marcus-Schaeffer [MS01] qui généralise au genre supérieur la bijection de Cori-Vauquelin-Schaeffer [CV81 ; CS04], et son unification avec la bijection de [BDG04] qui permet de traiter le cas de cartes avec degrés prescrits. Ce point de vue a été développé dans ma thèse [CMS09 ; Cha09a] dans laquelle j'ai donné une interprétation combinatoire d'une partie des énoncés de rationalité.

→ *Les travaux de ma thèse [CMS09 ; Cha09a] basés sur la construction de Marcus et Schaeffer mettent en bijection les cartes de genre  $g$  avec certaines cartes à une face « décorées », ou « étiquetées » appelés mobiles. Ces constructions démontrent combinatoirement des schémas de rationalité plus faibles que ceux qui sont connus par d'autres méthodes, au sens où la complexité des changements de variables en jeu, ainsi que l'expression des fractions rationnelles, sont beaucoup plus complexes que possible. Néanmoins ces constructions ont l'avantage de s'appliquer à de larges classes de cartes (les « constellations » de Lando et Zvonkine [Cha09a ; LZ04]) et surtout de capturer le cas asymptotique et sont à la base de l'étude des cartes aléatoires de genre  $g$  dont nous parlerons au chapitre 5.*

→ *Depuis ma thèse je n'ai guère fait de progrès direct sur la compréhension bijective des schémas de rationalité et nous n'en parlerons pas dans ce document (voir le lourd [Cha09b, Chap. 4] pour les amateurs et amatrices). Néanmoins cette question apparaît en filigrane de mes travaux. Avec mon étudiant Wenjie Fang nous avons démontré par séries génératrices (ou redémontré, diront certains collègues physiciens, voir [Eyn16]) des schémas de rationalité très généraux pour les cartes biparties [CF16], mettant en lumière l'aspect très combinatoire des changements de variables qui rappellent beaucoup les mobiles. Les récurrences quadratiques de [CC15], dont nous reparlerons au chapitre 4, encapsulent le schéma de rationalité de Bender et Canfield et donnent des moyens très rapides de calculer les fonctions  $F_g(t)$  mentionnées plus haut. Enfin, mes*

*travaux sur les diagrammes de Voronoï [Cha17], qui cherchent à donner une interprétation probabiliste aux cas « sous-dominants » des bijections de type Marcus-Schaeffer, peuvent être vus comme une première tentative d’appréhender la structure des  $g$ -mobiles au delà de ce qui était compris dans ma thèse, afin de découvrir les symétries cachées derrière les énoncés forts de rationalité.*

### 3.2. — Combinatoire algébrique, fermions, et fonctions tau

La théorie des fonctions symétriques vise à étudier les polynômes en plusieurs variables qui sont invariants par permutation de leurs variables. Cette théorie, classique, fait apparaître une combinatoire très riche, notamment par l’existence de nombreuses bases naturelles à l’espace vectoriel des fonctions symétriques et par la combinatoire qui apparaît dans les changements entre ces bases. Apparaît notamment la base des *fonctions de Schur*, dont la combinatoire est liée à celle des tableaux d’Young standard et semi-standard, et qui joue un rôle fondamental. On consultera ici les deux références incontournables [Sta99 ; Mac95]. Les fonctions symétriques, et les fonctions de Schur en particulier, sont liées de manière très profonde à la théorie des représentations du groupe symétrique (voir [Sta99 ; Sag01 ; FH91]), en effet les caractères du groupe symétrique apparaissent naturellement comme les coefficients de changement de base allant des fonctions de Schur aux fonctions dites sommes-de-puissances. La combinatoire sous-jacente est bien comprise et permet de calculer ces caractères par des règles combinatoires comme celle de Murnaghan-Nakayama.

Or, nous l’avons mentionné, l’énumération des cartes est reliée à la théorie des représentations du groupe symétrique. Ce lien qui repose sur le fait que les cartes peuvent être « encodées » au moyen de permutations [CM92 ; LZ04], permet d’exprimer les séries génératrices de cartes comme des sommes sur les partitions d’entiers, dans lesquelles apparaissent naturellement des fonctions de Schur. Dans le cas des cartes à une face, il se trouve que ces sommes se simplifient considérablement et permettent, avec plus ou moins d’efforts, d’obtenir directement les formules d’énumération que nous avons mentionnées ci-dessus.

—> *Nous rappellerons brièvement au Chapitre 2 le lien entre cartes et permutations, la base de la théorie des fonctions symétriques, et la formule de Frobenius qui lie énumération de cartes et fonctions de Schur.*

L’utilisation directe de ces expressions sommatoires « explicites » à base de fonctions de Schur pour l’énumération de cartes, hors du cas à une face, s’avère difficile (à l’exception peut-être de la “quadrangulation relation” de Jackson et Visentin [JV90a ; JV90b] et sa généralisation par Wenjie Fang aux constellations [Fan14]). En effet, on remplace une série génératrice de cartes, avec des poids naturels, par une série génératrice de partitions d’entiers, avec des poids très compliqués, et rien ne dit que l’on puisse en faire quelque chose directement.

Néanmoins, ces expressions ont des conséquences très profondes, puisqu’elles permettent de montrer que les fonctions génératrices de cartes sont des fonctions tau de hiérarchies intégrables comme KP ou 2-Toda (voir [LZ04 ; OS01 ; Oko00 ; GJ08]). Concrètement, cela signifie qu’elle satisfont un système infini très structuré d’équations aux dérivées partielles, non linéaires, en une infinité de variables (qui encodent typiquement les degrés des sommets dans les cartes). Ces hiérarchies d’équations différentielles dites intégrables jouent un rôle important en physique mathématique, et celles qui nous intéressent ici ont notamment été développées par « l’école de Kyoto » et popularisées dans le livre classique [MJD00]. Les équations issues de la hiérarchie KP et 2-Toda sont, pour l’instant, mal comprises du point de vue de la pure combinatoire des cartes. Il n’est d’ailleurs pas

si facile de les utiliser pour répondre aux questions d'énumération que l'on se pose habituellement, c'est notamment possible dans un petit nombre de cas, et cela donne alors lieu à des formules très puissantes. Le premier exemple est donné par les formules de Goulden et Jackson pour compter les triangulations [GJ08]. Le second est mon travail [CC15] avec Sean Carrell.

→ *Au chapitre 2, nous rappellerons brièvement la notion de fonction tau, et nous présenterons au chapitre 4 les récurrences quadratiques que j'ai obtenues avec Sean Carrel à partir de l'équation KP, dans l'article [CC15]. Ces formules un peu miraculeuses sont, de très loin, ce que l'on a de mieux pour calculer le nombre de cartes à genre et nombre d'arêtes donné. Elles ont deux défauts : elles sont très spécifiques à un cas particulier, et elles n'ont aucune interprétation combinatoire.*

La théorie des fonctions tau de KP et 2-Toda est de nature très combinatoire, et elle est fortement liée à la combinatoire de l'espace de Fock fermionique, réalisé combinatoirement par les *diagrammes maya*. En un sens, l'espace de Fock fermionique permet une formulation alternative de la théorie combinatoire des fonctions symétriques, dans un formalisme bien adapté au développement de ces hiérarchies intégrables. On pourra consulter les références [AZ13 ; MJD00 ; GJ08 ; Oko00 ; Kac90]. On se trouve ainsi dans une situation un peu frustrante, avec d'un côté, la très riche combinatoire des cartes, et de l'autre, la très riche combinatoire « fermionique », le seul lien connu entre les deux étant à ce jour la théorie des représentations. Or les résultats un peu magiques comme [GJ08 ; CC15] laissent penser que l'on a tout intérêt à pouvoir marier les deux.

→ *Tous les travaux présentés dans ce mémoire sont, en un sens, conduits par l'idée de répondre à cette question.*

Dans son cas le plus dégénéré (lorsque l'on adapte les paramètres pour que les cartes ne soient plus que de simples permutations), l'identité reliant cartes et fonctions de Schur n'est autre que l'identité RSK, dont la riche combinatoire est bien connue. Cela nous invite naturellement à nous intéresser à d'autres généralisations de RSK, incarnées par les *processus de Schur*. Les processus de Schur, introduits par Okounkov et Reshetikhin, ont été depuis 15 ans une application spectaculaire des techniques fermioniques dans l'analyse de modèles combinatoires et probabilistes [OR03 ; OR07 ; Bor07]. Ces processus, en général définis comme des suites de partitions d'entiers aléatoires, se trouvent coïncider naturellement, lorsque l'on choisit bien les paramètres, avec de nombreux modèles de physique statistique combinatoire comme le diamant aztèque [Elk+92a] ou les partitions pyramides [You09]. Dans mes travaux [BCC17 ; Bou+17] avec Jérémie Bouttier, Sylvie Corteel, puis Cédric Boutillier et Sanjay Ramassamy, nous avons clarifié ces coïncidences en décrivant des modèles de physique statistique planaire de dimères, les « Pavages pentus » et les « Gares de triage » (Rail Yard Graphs), qui réalisent combinatoirement les processus de Schur dans le cas le plus général.

→ *Le Chapitre 2 donnera une introduction superficielle aux processus de Schur, la section 2 du Chapitre 4 sera consacrée aux Rail Yard Graphs. Nous obtenons par les propriétés générales des processus de Schur des expressions closes pour les séries génératrices, et de manière plus originale, nous construisons de nouveaux opérateurs au niveau de l'espace de Fock qui nous permettent de localiser les dimères, nous permettant de calculer en toute généralité les fonctions de corrélation du modèle de dimères sur ces graphes.*

Il serait beaucoup dire (et d'ailleurs nous ne le disons pas) que ces travaux sont en lien avec la combinatoire des cartes ni qu'ils permettront d'aider à faire le lien recherché entre espace de Fock et cartes. Néanmoins, nous espérons que nos lectrices et lecteurs

apprécieront de se frotter un peu à la combinatoire de ces pavages et à celle des opérateurs fermioniques, comme nous avons aimé le faire nous-même.

### 3.3. — Cartes aléatoires et curiosités

Ce qui de mon point de vue est peut-être la motivation principale pour l'étude de la combinatoire des cartes, est l'étude des cartes aléatoires de genre fixé et de leurs limites d'échelles. En genre 0, cette question est devenu un champ d'immense activité. Le cas du genre  $g > 0$  a fait l'objet de moins de travaux. Le premier résultat en ce sens est la convergence du profil métrique démontrée dans ma thèse [Cha10]. Depuis, le sujet a fait l'objet de travaux notamment de Bettinelli et Miermont [Mie09; Bet10; Bet12]. On sait maintenant que les cartes aléatoires de genre  $g$  convergent vers un espace métrique mesuré aléatoire bien défini et unique, la carte Brownienne de genre  $g$  (résultat annoncé dans [BM]).

—> *Au chapitre 5, je montrerai comment en couplant la bijection de Marcus-Schaeffer avec ma bijection des trisections j'ai pu obtenir dans ma thèse une caractérisation de la loi du profil des distances dans la carte Brownienne de genre  $g$ . J'en profiterai pour effectuer une digression (au départ motivée par ce travail) sur la notion de profil vertical en mentionnant mes résultats avec Mireille Bousquet-Mélou sur le profil vertical des arbres [BC12].*

Il y a plusieurs façons de s'intéresser aux cartes aléatoires de genre  $g > 0$ . Celle qui m'intéresse particulièrement est de tenter de retrouver, dans les cartes aléatoires elles-mêmes, la trace des hiérarchies intégrables qui apparaissent dans l'énumération. En un sens (discutable) il s'agit par ce moyen de réaliser une version asymptotique, « au premier ordre », du programme visant à relier bijectivement cartes combinatoires et hiérarchies intégrables sans utiliser de théorie des représentations. Ainsi, le plus intéressant dans mon résultat sur le profil n'est peut-être pas la convergence du profil elle-même, mais la construction de la « fonctionnelle  $W_\infty$  » (voir page 87), observable de la carte Brownienne dont la transformée de Laplace est liée à un cas limite de la hiérarchie KP.

Plus récemment, en tentant de combler le trou séparant ce que l'on sait faire des bijections de Marcus-Schaeffer depuis ma thèse [CMS09] avec ce qui est connu par des méthodes issues des hiérarchie intégrables [BGR08], j'ai été amené à m'intéresser au problème des tessellations de Voronoï induites par des points choisis aléatoirement dans les cartes de genre  $g$  : étant donné  $k$  points choisis au hasard dans une carte de genre  $g$ , qui partitionnent la masse totale du graphe en  $k$  fractions  $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ , quelle est la loi du vecteur  $(X_1, \dots, X_k)$ ? Miermont [Mie09] avait montré la pertinence de ces tessellations dans l'étude combinatoire et probabiliste des cartes, mais ne s'était pas spécifiquement intéressé à la loi de ce vecteur qui, il faut dire, ne semble avoir aucune raison d'être intéressante. Or j'ai naturellement été amené à conjecturer que, pour tous  $g$  et  $k$ , cette loi est explicite, indépendante du genre, et même tout simplement uniforme.

—> *Je présenterai au chapitre 5 (section 2) mes conjectures sur les diagrammes de Voronoï des cartes aléatoires, leur origine, et l'intérêt qu'il y aurait à les démontrer.*

À ce jour, seul le cas  $(g, k) = (0, 2)$  a été démontré, par Emmanuel Guitter [Gui17], au moyen de la bijection de Miermont et de calculs absolument remarquables. On peut néanmoins se poser légitimement la question suivante : pourquoi un espace métrique aléatoire aurait-il des subdivisions de Voronoï uniformes ?

—> *En Section 3 du chapitre 5 je présenterai mes travaux récents avec Louigi Addario-Berry, Omer Angel, Éric Fusy, Christina Goldschmidt [Add+18] où nous montrons que la propriété d'uniformité est vraie pour les grands arbres*

*aléatoires, pour les cartes à une face aléatoires, et sous une forme différente pour les grandes cartes de genre et de nombre de faces fixés.*

Une manière différente d'étudier les cartes aléatoires est de se poser la question des limites *locales*, où l'on se demande à quoi ressemble le voisinage d'un sommet pris au hasard dans une grande carte. À genre fixé, le genre supérieur n'amène pas grand chose de nouveau, les limites locales étant les mêmes que dans le cas planaire. On peut néanmoins se demander ce qu'il se passe quand le genre tend vers l'infini avec la taille de la carte.

—→ *Pour les cartes à une face, ce programme a été réalisé avec succès dans les articles [Ang+13 ; Ray15] qui sont une belle application des arbres  $C$ -décorés. Nous en parlerons au chapitre 3 (section 4).*

### **3.4. — Au delà des cartes**

La combinatoire des cartes a ceci de passionnant qu'elle touche à à peu près tout, et que ses outils peuvent être recyclés dans des domaines plus ou moins voisins. Nous présenterons rapidement en conclusion à ce document (chapitre 6) deux résultats concernant l'énumération d'intervalles de Tamari [BCP13] et les propriétés des graphes ajoutables [CP15].



# Quelques éléments de combinatoire des cartes

*Elle passa tout le jour des fiançailles chez elle à se parer, pour se trouver le soir au bal et au festin royal qui se faisaient au Louvre.*

*Mme De Lafayette, La princesse de Clèves.*

Le but de ce chapitre, qui aurait aussi pu être placé en appendice, est de rappeler brièvement quelques notions de combinatoire des cartes qui pourront éclairer certains passages de ce document, et de diriger nos lecteurs et lectrices vers des sources plus exhaustives. Malgré nos efforts, cela prendra un peu de temps et de place. Néanmoins, la plupart de nos lecteurs et lectrices connaissent déjà plusieurs de ces notions (qui les cartes, qui les tableaux, . . .) et pourront s'essayer à fureter directement dans les chapitres suivants, quitte à revenir piocher ici quand telle ou telle notion demandera rafraîchissement.

## 1. — CARTES, PERMUTATIONS

### 1.1. — Cartes topologiques

On peut en première approximation définir une carte comme un graphe dessiné sans croisement sur une surface, comme sur l'illustration suivante figurant une carte de genre 2 :

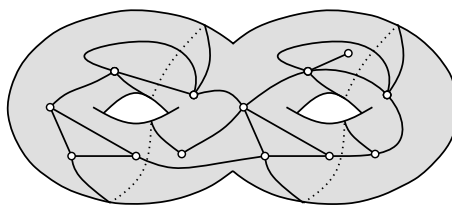


FIGURE 2.1 – Notre premier exemple de carte

Donner une définition plus précise requiert un peu de vocabulaire. Une *surface* sera pour nous une variété 2-dimensionnelle compacte, connexe, orientable, orientée et sans bord, considérée à homéomorphisme près. Un exemple de surface est le  $g$ -tore, obtenu en ajoutant  $g$  anses à la sphère (ici  $g \geq 0$  est un entier). Le théorème de classification des surfaces [Mas67 ; MT01, par exemple] assure que toute surface est homéomorphe au  $g$ -tore pour un certain entier  $g \geq 0$  appelé *genre* de la surface. Autrement dit, une surface

considérée à homéomorphisme près est entièrement caractérisée par son genre, que l'on peut naturellement comprendre comme son « nombre d'anses ».

Dans la suite nous autoriserons, sauf mention contraire, nos graphes à avoir des arêtes multiples et des boucles. Nos graphes seront en général non étiquetés mais porteront souvent des décorations supplémentaires (couleurs, sommets marqués, etc). Un plongement d'un graphe  $G$  dans une surface  $\mathbb{S}$  est la donnée d'un plongement continu injectif de  $G$ , vu comme un complexe topologique 1-dimensionnel, dans  $\mathbb{S}$ , autrement dit c'est une manière de dessiner  $G$  sans croisements d'arêtes sur  $\mathbb{S}$ . Ce plongement est *cellulaire* s'il a la propriété que toutes les composantes connexes de  $\mathbb{S} \setminus G$ , appelées *faces*, sont homéomorphes à des disques. Nous pouvons maintenant énoncer :

**Définition 1.** Une carte est la donnée du plongement cellulaire d'un graphe  $G$  dans une surface orientée  $\mathbb{S}$ . Les cartes sont considérées à homéomorphismes orientés de  $\mathbb{S}$  près.

La figure suivante, chipée à l'introduction de ma thèse, illustre cette définition.

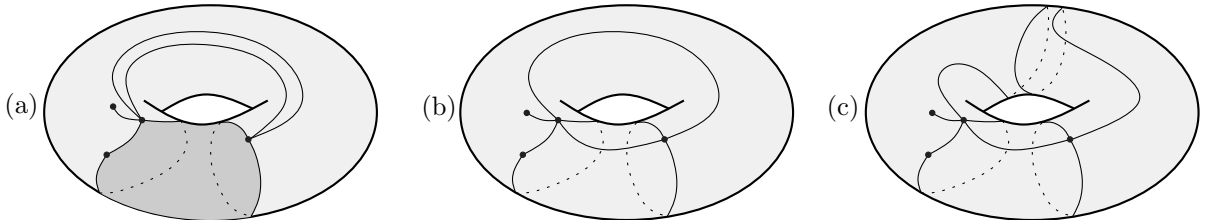


FIGURE 2.2 – Trois plongements d'un même graphe sur le tore. Le premier n'est pas cellulaire contrairement aux deux autres. Les deux derniers sont homéomorphes et représentent donc la même carte.

**Remarque 1.** Une carte de genre 0, qui correspond au cas où la surface est la sphère, est souvent appelée carte planaire. Dans ce cas, l'hypothèse que les faces sont homéomorphes à des disques est équivalente au fait que le graphe  $G$  est connexe. Dans le cas  $g > 0$ , ces conditions ne sont plus équivalentes, comme le montre la région sombre sur la figure 2.2 qui est homéomorphe à un cylindre.

**Remarque 2.** On remarque aisément qu'avec notre définition le graphe sous-jacent à une carte est nécessairement connexe. Il nous arrivera plus tard de considérer des « cartes non-connexes », mais nous préciserons le moment venu ce que nous entendons par là.

## 1.2. — Cartes combinatoires

Nous allons maintenant voir que les cartes telles que nous les avons définies sont, en fait, des objets de nature combinatoire. Pour cela, il s'avèrera plus naturel de travailler dans le contexte des cartes *biparties*<sup>1</sup>. Nous ferons un usage important de figures pour appuyer, et alléger, les considérations de cette section. On consultera des ouvrages de topologie comme [MT01 ; Mas67] pour les démonstrations de l'équivalence entre définitions topologique et combinatoire, qui ne nous intéresseront pas ici.

**Définition 2.** Une carte *bipartie* est une carte munie d'un coloriage de ses sommets en noir et blanc, tel qu'il n'y ait pas d'arête monochromatique. Elle est *étiquetée* si ses arêtes sont étiquetées de manière univoque par les entiers de 1 à  $n$ , où  $n \geq 1$  est le nombre d'arêtes.

1. Cela peut sembler restrictif ou peu naturel ; mais l'expérience montre que c'est ce qu'il y a de plus naturel, tout en n'étant, en fait, pas plus restrictif.

**Remarque 3.** La définition ci-dessus est la première instance d'une convention que nous adopterons partout. Lorsque que nous considérons des cartes munies d'une structure additionnelle (étiquetage, coloriage, enracinement) il est implicite que les homéomorphismes orientés sous-jacents à la définition des cartes préservent cette structure additionnelle. Nous ne répèterons pas cette convention plus tard dans ce document.

Étant donnée une carte bipartie étiquetée  $M$ , on peut former deux permutations  $\sigma_\circ$  et  $\sigma_\bullet$  de telle sorte que chaque cycle de  $\sigma_\circ/\sigma_\bullet$  encode l'ordre cyclique antihoraire des (étiquettes des) arêtes autour d'un sommet blanc/noir de  $M$ , comme sur la figure suivante :

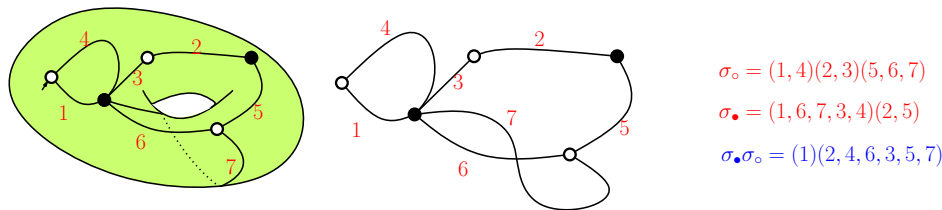


FIGURE 2.3 – À gauche, une carte bipartie étiquetée sur le tore. À droite, les permutations sous-jacentes. Au centre, une représentation intermédiaire qui donne le graphe et l'information de l'ordre cyclique autour de chaque sommet, sans prendre la peine de dessiner la surface. C'est cette représentation, qui contient toute l'information de la carte, que l'on utilisera préférentiellement. Il ne faut pas prêter attention aux « croisements » sur ce dessin, qui ne sont qu'un artefact dû à la représentation planaire.

On remarque alors que les cycles de la permutation  $\sigma_\diamond = \sigma_\bullet \sigma_\circ$  sont en bijection avec les faces de la carte. Plus précisément, chaque face de degré  $2k$  de la carte correspond à un cycle de longueur  $k$  de la permutation, obtenu en lisant en ordre horaire les étiquettes des arêtes noir-blanc rencontrées autour de la face, voir la figure 2.4.

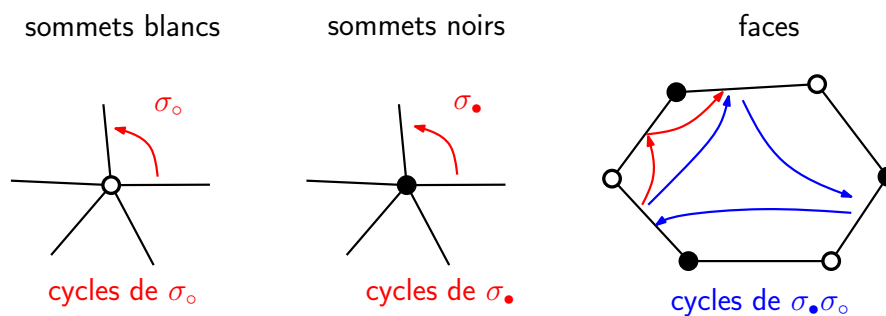


FIGURE 2.4 – Cycles de  $\sigma_\circ$ ,  $\sigma_\bullet$ , et de leur produit  $\sigma_\bullet \sigma_\circ$ .

Réciproquement la donnée des trois permutations  $\sigma_\circ, \sigma_\bullet, \sigma_\diamond$  (ou bien sûr, de deux d'entre elles puisqu'elles déterminent la troisième) est suffisante pour reconstruire la surface  $\mathbb{S}$  et la carte  $M$ . Intuitivement, on se convainc en effet facilement que ces permutations contiennent toute l'information pour reconstruire la liste des « faces » comme polygones abstraits et la liste de toutes les identifications d'arêtes nécessaires pour reconstruire  $(\mathbb{S}, M)$ , comme un recollement de ces polygones. Voir la figure 2.5.

De la même façon, on se convainc intuitivement que tout triplet de permutations tel que  $\sigma_\diamond = \sigma_\bullet \sigma_\circ$  donne une carte bipartie valide, à condition que le graphe sous-jacent soit connexe. On pourra donc préférer la définition suivante :

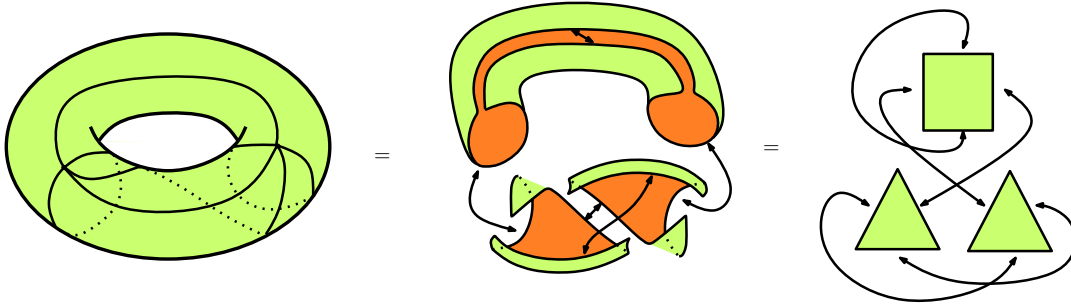


FIGURE 2.5 – Un recollement de polygones, qui donne une carte.

**Définition 3** (Définition bis). Une carte bipartie étiquetée à  $n \geq 1$  arêtes est un triplet de permutations  $(\sigma_\circ, \sigma_\bullet, \sigma_\diamond)$  dans  $\mathfrak{S}_n$ , tel que  $\sigma_\diamond = \sigma_\bullet \sigma_\circ$  et tel que le sous-groupe engendré par ces trois permutations agit transitivement sur  $[1..n]$ .

Pour les questions énumératives ou probabilistes qui nous intéresseront, les cartes étiquetées sont les bons objets à étudier<sup>2</sup>. Néanmoins les cartes, en raison de leur structure assez rigide, ont très peu d'automorphismes, et l'on préfère en général travailler avec les cartes *enracinées*, qui en sont une variante.

**Définition 4.** Une carte bipartie enracinée est une carte bipartie étiquetée considérée modulo réétiquetage des nombres de 2 à  $n$ .

Autrement dit, pour revenir à la version topologique, une carte bipartie enracinée est une carte bipartie munie d'une arête distinguée (l'arête 1), que l'on appellera l'arête racine, et considérée modulo homéomorphismes préservant la racine. Il y a une correspondance 1-à- $(n-1)!$  entre cartes étiquetées et enracinées, ces objets sont donc essentiellement de même nature du point de vue énumératif. Notons que bien souvent, on préférera voir une carte bipartie enracinée comme portant un secteur angulaire, ou *coin*, distingué parmi ceux incidents à un sommet blanc. Comme il y a bijection entre ces coins et les arêtes (par exemple, chaque arête précède un unique coin en sens horaire autour de son extrémité blanche), les deux notions sont équivalentes.

Pour conclure ce paragraphe, revenons maintenant au cas des cartes générales, c'est à dire non nécessairement biparties. Formellement, il est commode de définir combinatoirement une *carte étiquetée/enracinée* comme une *carte bipartie étiquetée/enracinée* dont tous les sommets noirs ont degré 2, ce qui topologiquement revient à ajouter un sommet noir au milieu de chaque arête. Ainsi, une carte générale à  $n$  arêtes est étiquetée de ses  $2n$  *demi-arêtes*, et une carte générale enracinée est une carte générale portant une *demi-arête* marquée (ou simplement, un coin marqué). Une telle carte est encodée par un triplet de permutations vivant dans le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_{2n}$ , avec la contrainte que la permutation  $\sigma_\bullet$  n'a que des cycles de longueur 2. On retiendra ici qu'au niveau de leur encodage algébrique, ce sont les cartes biparties qui sont les objets plus simples; mais aussi que cartes biparties<sup>3</sup> et cartes générales sont des cas particuliers respectifs l'un de l'autre – et réciproquement !

2. étudier les cartes non étiquetées requiert des considérations sur les symétries qui sont intéressantes mais qui ne seront pas notre propos ici. On pourra consulter comme point d'entrée les références [Lis04; LW06; MN16].

3. Évidemment, une carte (générale) peut tout à fait avoir un graphe sous-jacent biparti au sens usuel, c'est à dire bicoloriable. Il faut s'habituer à ce léger abus de langage, conforme aux usages de la littérature.

**Remarque 4.** *Les lecteurs et lectrices pourront être surprises par le rôle très symétrique joué par les trois permutations  $(\sigma_\circ, \sigma_\bullet, \sigma_\diamond)$  dans la définition d'une carte bipartie. Si la symétrie entre les deux premières s'interprète simplement comme l'échange de couleurs, il est moins évident de voir que  $\sigma_\diamond$  joue un rôle similaire. Pour voir cela, ajouter un sommet d'une troisième couleur (disons  $\diamond$ ) au milieu de chaque face et trianguler. On obtient une « triangulation tricoloriée », c'est à dire une triangulation dont les sommets sont coloriés en trois couleurs et telle que chaque face est trichromatique. Sur cet objet, il est clair que les trois couleurs jouent des rôles symétriques.*

*Par exemple, la fameuse dualité des cartes (non nécessairement biparties), que nos lecteurs et lectrices ont certainement déjà rencontré au moins dans le cas planaire et qui échange le rôle des sommets et des faces, s'interprète modulo les correspondances précédentes comme une permutation des couleurs  $\circ$  et  $\diamond$  dans les triangulations tricoloriées.*

Les quatre paramètres d'une carte qui nous intéresseront le plus seront le nombre d'arêtes  $n$ , le genre  $g$ , le nombre de sommets  $v$ , et le nombre de faces  $f$ . Ils sont reliés par la formule d'Euler :

**Proposition 1** (Formule d'Euler, voir par exemple [MT01]).

$$s + f = n + 2 - 2g.$$

Nous appellerons *degré* d'un sommet ou d'une face le nombre de secteurs angulaires incidents à ce sommet ou à cette face, respectivement. De manière équivalente il s'agit du nombre d'arêtes incidentes, comptées avec multiplicité. Du point de vue algébrique, par construction, ces degrés correspondent à la longueur des cycles des permutations sous-jacentes (divisée par deux dans le cas des degrés des faces pour les cartes biparties).

### 1.3. — Cartes et systèmes de rotation

Une autre manière de formuler l'équivalence entre cartes topologiques et cartes combinatoires et la suivante : une carte (bipartie) est la donnée d'un graphe (bicolorié) et d'un ordre cyclique des arêtes autour de chaque sommet. Cet ordre cyclique correspond à l'ordre antihoraire sur la surface, et il contient toute la donnée de la carte. Pour retrouver les faces de la carte (et donc le genre par la formule d'Euler), il suffit de se rendre compte que l'on dispose, avec le graphe et l'ordre local autour des sommets, de toutes l'information pour « longer » les bords de la carte, comme sur la figure 2.6.

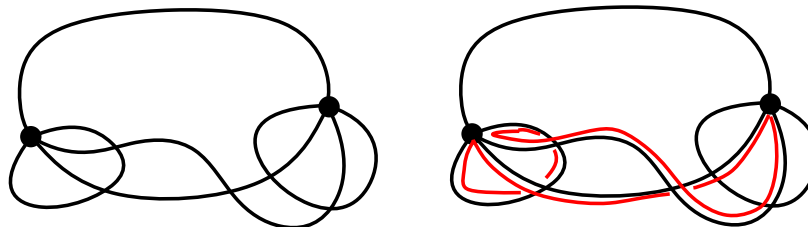


FIGURE 2.6 – (Gauche) La carte de la figure précédente, qui a 5 arêtes et 2 sommets. Elle est dessinée dans le plan avec croisements d'arêtes arbitraires, l'information qui compte ici étant l'ordre horaire avec lequel les arêtes sont incidentes à chaque sommet. Cette information permet de longer le bord des arêtes et de retrouver les « bords des faces » ; (Droite) en longeant les arêtes on retrouve un bord de longueur 3 qui correspond à l'un des triangles de la figure précédente. On peut de la même façon retrouver les deux autres bords (faces) de la carte, puis par la formule d'Euler, son genre  $g = 1$ .

Notons que la vision comme système de rotation sera la plus commode à utiliser quand il s'agira de généraliser la notion de carte au cas des surfaces non orientables, ce que nous ne ferons guère dans ce document, mais évoquerons tout de même en toute fin du chapitre 3.

2. — APPROCHE ALGÈBRIQUE À L'ÉNUMÉRATION DE CARTES

**2.1. — Partitions, algèbre du groupe symétrique, constellations, et caractères**

Le lien entre cartes et permutations suggère une manière très naturelle d'aborder l'énumération de cartes via l'algèbre du groupe symétrique, que nous décrivons ici. Dans cette partie, nous parlerons de cartes non nécessairement connexes : une carte non nécessairement connexe est simplement la donnée d'un multiensemble de cartes connexes. Du point de vue topologique, il s'agit d'une carte plongée sur une surface, toujours compacte, mais non nécessairement connexe – une telle surface est simplement paramétrée par le multiensemble des genres de ses composantes connexes, mais nous n'aurons pas besoin de cette paramétrisation. Travailler avec des cartes non connexes rend un peu subtile la notion de carte enracinée, et dans ce contexte nous préférons travailler avec des cartes étiquetées.

Formellement, une carte bipartie étiquetée à  $n$  arêtes non nécessairement connexe, est simplement un triplet de permutations  $(\sigma_\circ, \sigma_\bullet, \sigma_\diamond)$  tel que :

$$\sigma_\bullet \sigma_\circ = \sigma_\diamond \tag{2.1}$$

dans le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$ . On a donc simplement enlevé l'hypothèse de transitivité. Comme précédemment, chaque cycle de chaque permutation  $\sigma_\bullet, \sigma_\circ, \sigma_\diamond$  correspond à un sommet noir, un sommet blanc, et une face de la carte. Notons que toute carte non nécessairement connexe peut se voir comme un multiensemble de cartes, au sens (connexe) précédent.

Ce qui sera naturel pour nous, c'est d'énumérer les cartes selon leur distribution de degrés. Rappelons qu'une *partition*  $\lambda$  de  $n$ , est une suite infinie décroissante d'entiers positifs ou nuls  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$  dont la somme totale est  $n$ . On notera qu'une telle suite stationne au bout d'un moment en zéro. Les entiers  $\lambda_i$  sont appelés les *parts* de  $\lambda$ , et le nombre de parts non nuls ou *longueur* est noté  $\ell(\lambda)$ . Pour noter les partitions, on omet souvent les parts nulles, par exemple  $\lambda = (4, 4, 2, 1, 1)$  est une partition de 12, ce que l'on notera pour abrégé  $\lambda \vdash 12$  ou  $|\lambda| = 12$ . Elle a cinq parts,  $\ell(\lambda) = 5$ . Pour anticiper, on pourra représenter une partition par son diagramme de Ferrers comme sur la figure 2.10. Nous en dirons plus sur les partitions dans la section suivante.

Pour l'instant, remarquons que les partitions de  $n$  indexent naturellement les classes de conjugaison de  $\mathfrak{S}_n$  : la classe indexée par  $\lambda$  est l'ensemble des permutations de type cyclique  $\lambda$  et sera notée  $\mathcal{C}_\lambda$ . Elles indexent aussi naturellement les distributions de degrés dans les cartes : puisque la somme des degrés des sommets blanc d'une carte bipartie à  $n$  arêtes vaut  $n$ , la *distribution de degrés blancs* est donnée par une partition de  $n$ . La même chose est vraie pour les sommets noirs et pour la distribution des *demi-degrés* des faces.

Pour énumérer les factorisations de la forme (2.1), considérons l'algèbre de groupe  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$  formée de toutes les combinaisons linéaires formelles à coefficients complexes d'éléments de  $\mathfrak{S}_n$ , avec la multiplication étendant linéairement celle du groupe. Pour  $\lambda$  une partition de  $n$ , considérons  $K_\lambda \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$  défini par

$$K_\lambda = \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_\lambda} \sigma,$$

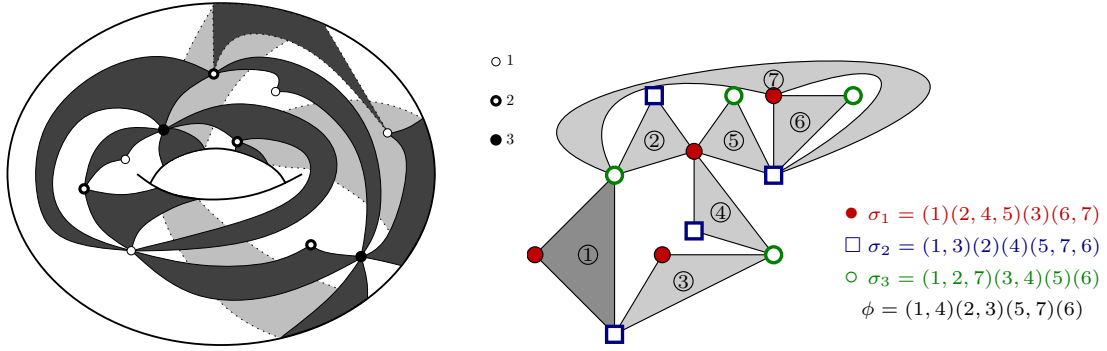


FIGURE 2.7 – À gauche, une 3-constellation de genre 1, figure chipée à ma thèse. Les hyperarêtes apparaissent comme des faces noires de degré 3, chacune incidente à un sommet de chaque couleur, 1, 2, 3, en sens horaire. Les faces blanches (hyperfaces) ont degré multiple de 3. Les étiquettes des hyperfaces ne sont pas indiquées. À droite, un exemple planaire complet, figure chipée à la thèse de Wenjie Fang [Fan16] qui utilise la notation  $\phi = \sigma^{(0)}$ .

qui est la somme formelle de toutes les permutations de type cyclique  $\lambda$ . Notons que, puisque  $\mathcal{C}_\lambda$  est une classe de conjugaison,  $K_\lambda$  est dans le centre de  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$  (il commute avec tous les autres éléments de l'algèbre). Si l'on note [1] la forme linéaire sur  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$  qui extrait le coefficient de l'élément identité, le nombre de cartes biparties étiquetées telles que la distribution de degrés des sommets noirs/blancs/faces est donnée par les trois partitions  $\lambda^\bullet/\lambda^\circ/\lambda^\diamond$  respectivement, est clairement égal à :

$$[1]K_{\lambda^\bullet}K_{\lambda^\circ}K_{\lambda^\diamond}.$$

Cet énoncé découle simplement des définitions (développer formellement le produit!), de la correspondance entre cartes biparties et permutations, et du fait qu'une permutation a le même type cyclique que son inverse.

Avant de continuer, il sera naturel ici de s'intéresser à un problème un peu plus général, ce qui nous donnera un peu de recul et pourra nous permettre de mieux comprendre ce que nous ferons. Pour un entier  $m \geq 2$ , un  $(m+1)$ -uplet de permutations  $(\sigma^{(0)}, \sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(m)})$  dont le produit est égal à l'identité sera appelé une  $m$ -constellation. Les 2-constellations sont donc, à la correspondance ci-dessus près, la même chose que des cartes biparties (non nécessairement connexes). De la même façon, on peut interpréter les  $m$ -constellations comme des cartes : il s'agit maintenant de cartes dont les sommets sont coloriés en  $m$  couleurs, et qui en place d'arêtes ont des « hyperarêtes ». Ces hypercartes sont étiquetées, au sens où les hyperarêtes sont numérotées de 1 à  $n$ . Chaque hyperarête connecte  $m$  sommets, un de chaque couleur, de sorte que les couleurs apparaissent dans l'ordre horaire autour de l'hyperarête, voir la figure 2.7. Comme dans le cas des cartes biparties, le type cyclique de la permutation  $\sigma^{(i)}$  pour  $i \geq 1$  correspond à la partition donnant les degrés des sommets de couleurs  $i$  dans la constellation, et les cycles de la partition  $\sigma^{(0)}$  correspondent aux faces. Pour faire de l'énumération, fixons  $m+1$  partitions de  $n$ ,  $\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)}$ , et définissons :

$$C_{\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)}} := [1]K_{\lambda^{(0)}}K_{\lambda^{(1)}} \dots K_{\lambda^{(m)}}. \quad (2.2)$$

De manière équivalente,  $C_{\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)}}$  est le nombre de constellations étiquetées à  $n$  hyperarêtes, dont les distributions des degrés des sommets de chaque couleur sont données par les partitions  $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)}$ , et dont la distribution des degrés des faces, à un facteur  $m$  près, est donnée par la partition  $\lambda^{(0)}$ .

La question de déterminer, dans le cas d'un groupe général, le nombre de façons d'écrire l'identité comme un produit de facteurs dans des classes de conjugaisons données est entièrement « résolue » par la théorie des représentations. Il s'agit de la formule de Frobenius, que nous donnons ici dans le cadre du groupe symétrique.

On rappelle d'abord que si  $G$  est un groupe fini, une représentation (linéaire, complexe) de  $G$  est un morphisme de  $G$  dans  $GL(\mathbb{C}^k)$ , autrement dit c'est une manière de « représenter » les éléments de  $G$  par des matrices inversibles, de manière compatible avec le produit. On considère les représentations à changement de base de  $\mathbb{C}^k$  près. L'entier  $k$  est appelé la *dimension* de la représentation. L'application qui à un élément de  $G$  associe la trace de son image dans  $GL(\mathbb{C}^k)$  est appelée le *caractère* de la représentation. Une représentation est *irréductible* s'il n'existe pas de sous-espace vectoriel non trivial  $V \subset \mathbb{C}^k$  stable par tous les éléments de  $G$ . La théorie des représentations nous dit que les représentations irréductibles, à isomorphisme près, sont en nombre fini, et qu'il y en a le même nombre que les classes de conjugaison de  $G$ . Dans le cas particulier du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$ , les représentations sont bien connues et bien décrites (voir par exemple [FH91 ; Sag01 ; Sta99]), et de plus elles sont naturellement indexées par les partitions  $\lambda$  de  $n$ .

**Proposition 2** (Formule de Frobenius). *Le nombre  $C_{\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)}}$  est donné par la formule :*

$$C_{\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)}} = \frac{1}{n!} \sum_{\lambda \vdash n} (\dim V^\lambda)^2 \tilde{\chi}^\lambda(K_{\lambda^{(0)}}) \tilde{\chi}^\lambda(K_{\lambda^{(1)}}) \dots \tilde{\chi}^\lambda(K_{\lambda^{(m)}}), \quad (2.3)$$

où  $V^\lambda$  est la représentation irréductible de  $\mathfrak{S}_n$  indexée par  $\lambda$ , où  $\chi^\lambda$  est le caractère correspondant, où  $\tilde{\chi}^\lambda := \frac{1}{\dim V^\lambda} \chi^\lambda$  est le caractère normalisé, et où l'on étend les caractères par linéarité à l'algèbre de groupe, à savoir :

$$\tilde{\chi}^\lambda(K_\mu) := \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_\mu} \tilde{\chi}^\lambda(\sigma).$$

Il ne s'agira pas ici de démontrer ce résultat classique (voir par exemple [Ser78]), mais d'évoquer quelques idées de la preuve, pour celles et eux qui auraient quelques souvenirs de théorie des représentations. En effet cela permettra d'éclairer un peu l'usage que nous en ferons par la suite, et surtout de comprendre ce que devient cette formule dans les cas plus simples considérés à la section suivante. Un résultat central de cette théorie est l'isomorphisme d'algèbre suivant :

$$\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} \text{End}(V^\lambda),$$

qui dit que l'algèbre de groupe est isomorphe à une algèbre de matrices « blocs », chaque bloc correspondant à une représentation irréductible. Pour calculer la forme linéaire [1] dans (2.2), on la calcule donc bloc par bloc : cela explique la somme dans (2.3). De plus, puisque l'élément  $K_\mu$ , pour chaque partition  $\mu$ , est *clairement* dans le centre de l'algèbre de groupe, le lemme de Schur nous dit que l'élément  $K_\mu$  est représenté dans  $\text{End}(V^\lambda)$  par une matrice *scalaire* (une homothétie). Or il est beaucoup plus facile de multiplier des homothéties que des matrices générales... il suffit de multiplier les scalaires correspondants, et c'est pourquoi le produit de classes dans (2.2) devient un simple produit de nombres complexes à l'intérieur de la somme dans (2.3). Nous renvoyons à tout bon livre de théorie des représentations (par exemple [Ser78]) pour plus de détails.

À quoi peut bien nous servir la formule de Frobenius ? Si l'on ne dispose pas d'une bonne façon de calculer les caractères, à rien. En fait, il existe un algorithme combinatoire,



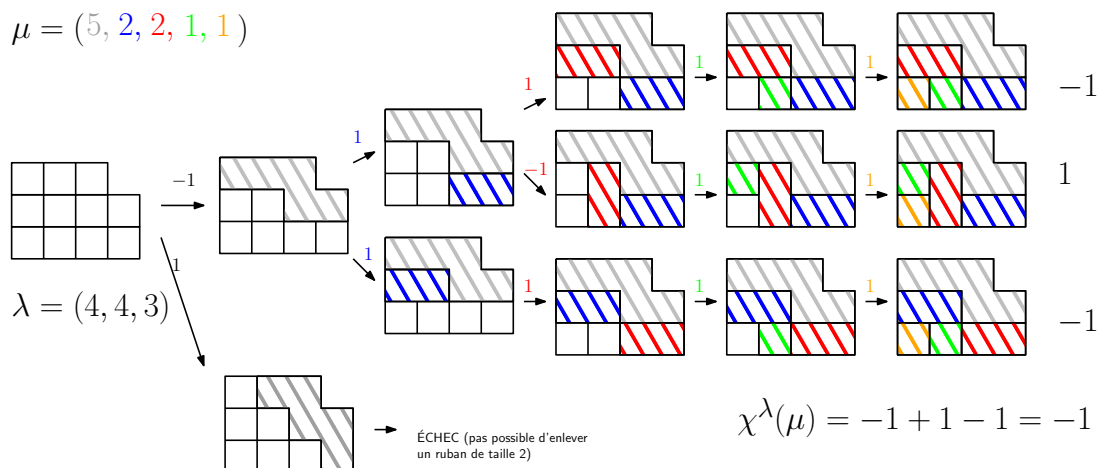


FIGURE 2.8 – La règle de Murnaghan-Nakayama pour calculer le caractère  $\chi^\lambda(\mu)$ , illustrée ici avec  $\lambda = (4, 4, 3)$  et  $\mu = (5, 2, 2, 1, 1)$ . On énumère tous les « épluchages » de  $\lambda$  consistant à enlever successivement un ruban de taille  $\mu_1$ , puis  $\mu_2$ , etc., où un ruban est un chemin connexe de cases formé de pas Sud et Est. À chaque étape de l'épluchage, on doit avoir un diagramme de partition valide. Chaque ruban donne un poids multiplicatif  $(-1)^{h-1}$  où  $h$  est sa hauteur, et le caractère final est la somme de la contribution de tous les épluchages.

la règle de Murnaghan-Nakayama, qui permet de calculer le caractère  $\chi^\lambda(K_\mu)$  étant données  $\lambda$  et  $\mu$  (voir la figure 2.8). Malgré cela, il n'est en général pas très utile d'utiliser cette règle conjointement avec l'équation (2.3), si ce n'est pour tester des développements numériques à de très petits ordres. La somme sur la partition est trop grosse, et l'algorithme trop compliqué pour que l'on sache dire grand chose.

Il existe néanmoins au moins un cas où (2.3) est *directement* utile : Dans le cas des cartes (ou constellations) à une face, c'est-à-dire lorsque la partition  $\lambda^{(0)}$  a une seule part. Dans ce cas, la règle de Murnaghan-Nakayama nous dit que le caractère  $\chi^\lambda(K_{\lambda^{(0)}})$  s'annule, sauf pour un très petit nombre de partitions  $\lambda$  appelées *équerres*. Ce phénomène est l'explication algébrique du fait que les cartes à une face sont comptées par des formules simples, et il a été largement utilisé pour obtenir des formules d'énumération pour ces cartes. Le chapitre suivant sera entièrement consacré à ces cartes à une face, mais avec une approche différente, directement combinatoire.

Venant de découvrir la formule de Frobenius, deux commentaires importants s'imposent :

- Afin faire bon usage (direct ou indirect) de la formule de Frobenius, il nous faut un bon moyen de travailler avec les caractères. La formule de Murnaghan-Nakayama que nous avons évoquée, quoique très concrète, n'est pas forcément le meilleur. Nous allons le voir, un moyen très commode de travailler avec les caractères du groupe symétrique est de faire une excursion dans la théorie des fonctions symétriques, et en particulier des fonctions de Schur. Nous le ferons à partir de la section 3.
- Le problème d'énumération que nous nous sommes posé (compter les constellations par degrés des sommets de chaque couleur) est, en fait, trop difficile. Il se trouve que le bon problème à considérer (et nous verrons en fin de chapitre pourquoi) est de ne vouloir contrôler que *deux* distributions de degrés, ce qui nous amène à la section suivante.

**2.2. — Contenus, éléments de Jucys-Murphy, nombres de Hurwitz pondérés**

Nous serons maintenant moins gourmands que dans la section précédente, et allons énumérer les constellations en ne contrôlant intégralement que *deux* types cycliques et non  $(m+1)$ . Étant données deux permutations  $\lambda$  et  $\mu$  de  $n$ , et des indéterminées  $u_0, \dots, u_{m-2}$ , nous considérons la série génératrice (en fait, le polynôme générateur)

$$C_{\lambda,\mu}(u_0, \dots, u_{m-2}) := \sum u_0^{\ell(\sigma^{(0)})} u_1^{\ell(\sigma^{(1)})} \dots u_{m-2}^{\ell(\sigma^{(m-2)})}$$

où la somme est prise sur les factorisations  $\sigma^{(0)}\sigma^{(1)} \dots \sigma^{(m)} = 1$  dans  $\mathfrak{S}_n$  telles que  $\sigma^{(m-1)}$  et  $\sigma^{(m)}$  ont types cycliques respectifs  $\lambda$  et  $\mu$ , et où  $\ell(\sigma)$  est le nombre de cycles de  $\sigma$ . Dans l'interprétation en hypercartes, nous comptons les  $m$ -constellations avec un poids  $u_0$  par face,  $u_i$  par sommet de couleur  $i$  pour les  $(m-2)$  premières couleurs, et où les distributions de degrés des sommets des deux dernières couleurs sont fixées à  $\lambda$  et  $\mu$ .

Si l'on introduit maintenant l'élément suivant dans  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$  :

$$G(u) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} u^{\ell(\sigma)} \sigma$$

où  $\ell$  désigne encore le nombre de cycles, on a alors, juste en déroulant les définitions :

$$C_{\lambda,\mu}(u_0, \dots, u_{m-2}) = [1]G(u_0)G(u_1) \dots G(u_{m-2})K_\lambda K_\mu.$$

Ce qui nous intéresse ici, c'est que l'élément  $G(u)$  est très particulier : il est une « fonction symétrique des Jucys-Murphy », ce qui le rend très spécial :

**Lemme 3.** *L'élément  $G(u) \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$  s'écrit*

$$G(u) = \prod_{i=1}^n (u + J_i), \tag{2.4}$$

$$\text{où } J_i = (1, i) + (2, i) + \dots + (i-1, i) \tag{2.5}$$

désigne le  $i$ -ème élément de Jucys-Murphy.

*Démonstration.* Par induction. Pour fabriquer une permutation de taille  $n$ , on en prend une de taille  $(n-1)$  et soit y accole  $(n)$  comme point fixe et on gagne un cycle, soit on multiplie par une transposition  $(j, n)$  pour un  $j \in [1..n-1]$  et le nombre de cycles reste le même. Autrement dit, cette identité décrit l'algorithme usuel pour engendrer une permutation aléatoire.  $\square$

On remarque que les éléments de Jucys-Murphy ne sont pas dans le centre de  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ , mais qu'ils commutent tous entre eux, le produit (2.4) est donc bien défini. De plus, il est facile de voir que tout polynôme symétrique en les  $(J_1, \dots, J_n)$  appartient au centre de  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$  (cela découle par exemple de (2.4) qui montre que les polynômes élémentaires de Newton en les Jucys-Murphy sont dans le centre). En particulier, par le lemme de Schur, cet élément agit comme un scalaire sur chaque représentation irréductible. Il se trouve que ce scalaire admet une expression combinatoire très simple, que nous donnons maintenant.

Si  $\lambda$  est une partition, et  $\square$  une case du diagramme de  $\lambda$ , on définit le *contenu*

$$c(\square) := i - j$$

où  $i$  et  $j$  sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée de la case en notation française, voir la figure 2.9.

On a alors le lemme suivant (voir [Juc66] ou encore [Juc74; Mur81; OV96]) :

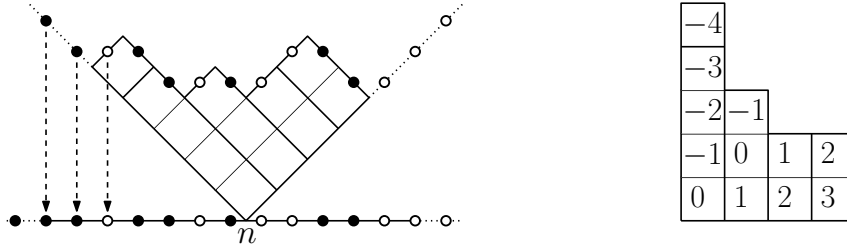


FIGURE 2.9 – (Gauche) Une partition et son diagramme maya de charge  $n$ , représenté sur l'axe des abscisses. Chaque particule blanche/noire correspond à la projection verticale d'un pas montant/descendant du contour de la partition, respectivement ; (Droite) Une partition, où dans chaque case est indiqué son contenu. On remarque qu'il correspond à l'abscisse de la case dans la projection donnant le diagramme maya, à la charge près.

**Lemme 4.** Si  $\kappa = f(J_1, \dots, J_n)$  est un polynôme symétrique en les éléments de Jucys-Murphy, alors pour toute partition  $\lambda$ , l'élément  $\kappa \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$  agit sur la représentation irréductible  $V^\lambda$  comme le scalaire :

$$\prod_{\square \in \lambda} f(c(\square)),$$

où le produit est pris sur toutes les cases du diagramme de  $\lambda$ . En particulier, l'élément  $G(u)$  agit sur  $V^\lambda$  comme le scalaire  $\prod_{\square \in \lambda} (u + c(\square))$ .

En reprenant les arguments de la démonstration de la formule de Frobenius, on obtient le résultat crucial suivant.

**Corollaire 5** (Formule de Frobenius, version « contenus »).

$$C_{\mu, \nu}(u_0, \dots, u_{m-2}) = \frac{1}{n!} \sum_{\lambda \vdash n} \chi^\lambda(K_\mu) \chi^\lambda(K_\nu) \prod_{\substack{i \in [0, m-2] \\ \square \in \lambda}} (u_i + c(\square)). \quad (2.6)$$

**Digression : nombres de Hurwitz pondérés.** Le problème énumératif que nous considérons ici est un cas particulier (quoique pas très différent du cas général) des nombres de Hurwitz pondérés introduits par Harnad et Guay-Paquet [GH17; GH15]. Soit  $f(\cdot)$  une série formelle (sur un corps contenant possiblement des indéterminées, par exemple  $\mathbb{Q}(u_0, \dots, u_{m-2})$ ) valant 1 en zéro, et pour deux partitions  $\lambda, \nu$  de  $n$ , considérons la quantité

$$H^f(\lambda, \nu) := [1] \left( \prod_{i=1}^n f(J_i) \right) K_\lambda K_\nu.$$

Ce nombre est <sup>4 5</sup> un nombre de Hurwitz double pondéré, de fonction de poids  $f$ . On peut interpréter  $H^f(\lambda, \nu)$  comme comptant des factorisations dans  $\mathfrak{S}_n$  de la forme  $\gamma\sigma\nu = 1$  où  $\sigma$  et  $\nu$  ont types cycliques respectifs  $\lambda$  et  $\nu$ , et où  $\gamma$  est une permutation qui reçoit un

4. Les normalisations dépendent des auteurs.

5. Dans cette section, on ne parle que de nombres de Hurwitz pondérés *non-connexes*. Comme pour les cartes, rajouter la connexité demande d'ajouter une hypothèse de transitivité dans les définitions. Plus pratiquement, il est toujours possible, à partir de la série génératrice des nombres non-connexes, de définir une série connexe en prenant un logarithme. Nous ne rentrerons pas dans ces considérations ici puisque nous présentons les nombres de Hurwitz pondérés à titre de digression.

poids dépendant de la fonction  $f$ . Par exemple, si

$$f(\cdot) = \prod_{i=0}^{m-2} (u_i + \cdot)$$

on retrouve le cas précédent des constellations, et chaque  $\gamma$  est comptée autant de fois qu'elle s'écrit comme produit de  $m-1$  permutations, recevant un poids comptant le nombre de cycles de chacune comme précédemment. On notera que ce cas recouvre génériquement le cas de n'importe quelle  $f$  polynomiale, et que puisque nous travaillons dans le cadre des séries formelles, on ne perd pas grand chose à faire cette hypothèse : ainsi, la théorie des nombres de Hurwitz pondérés a beaucoup en commun avec celle de l'énumération des constellations. Prenons néanmoins le temps d'observer quelques exemples importants et amusants.

Si l'on choisit  $f(\cdot) = \exp(u\cdot)$ , alors l'élément

$$\left( \prod_{i=1}^n f(J_i) \right) = \exp \left( \sum_{i=1}^n J_i \right) = \exp \left( u \sum_{\tau: \text{transpo.}} \tau \right)$$

est simplement la série génératrice exponentielle (sur l'algèbre de groupe) de tous les produits de transpositions, avec un poids  $u$  par transposition. La quantité  $H^f(\lambda, \nu)$  dans ce cas n'est autre que la série génératrice exponentielle des factorisations de la forme

$$\tau_1 \dots \tau_r = \sigma \nu$$

où  $\sigma$  et  $\nu$  on types cycliques  $\lambda$  et  $\mu$ , où les  $\tau_i$  sont des transpositions, avec un poids  $u$  par transposition. On retrouve ainsi les *nombres de Hurwitz* classiques, qui ont été étudiés depuis longtemps (au moins depuis Hurwitz! [Hur91; Str96]) et qui donnent leur nom aux nombres pondérés.

Si l'on choisit  $f(\cdot) = 1/(1-u\cdot)$ , alors il est facile de voir en développant les définitions que  $H^f(\lambda, \nu)$  est maintenant la série génératrice des factorisations de la forme

$$\tau_1 \dots \tau_r = \sigma \nu$$

où chaque  $\tau_i = (a_i, b_i)$  avec  $a_i < b_i$  est une transposition, et où les  $b_i$  sont rangés par ordre croissant. Les nombres correspondants sont des *nombres de Hurwitz monotones* étudiés notamment par Goulden, Guay-Paquet et Novak [GGN13]. Puisque  $1/(1-\cdot) = (1-\cdot)^m$  avec  $m = -1$ , il est tentant de dire informellement que « les nombres de Hurwitz monotones comptent en fait des  $-1$  constellations ». Nous laissons nos lecteurs et lectrices se convaincre que l'on peut donner un sens à cet énoncé. Par exemple, la jolie formule de [GGN13] pour les nombres de Hurwitz pondérés planaires n'est autre que le cas  $m = -1$  de la formule de Bousquet-Mélou et Schaeffer [BS00].

Nous arrêtons ici notre digression sur les nombres de Hurwitz pondérés, mais nous insistons sur le fait que pour les considérations qui nous intéressent ici, ils recouvrent essentiellement le même niveau de généralité que les constellations. En particulier, tout ce qui suit aurait pu être formulé dans le langage des nombres de Hurwitz pondérés, mais nous ne le ferons pas.

Le dernier corollaire ressemble beaucoup à la formule de Frobenius, à ceci près que dans la somme seuls deux caractères apparaissent, et que les autres coefficients ne sont plus que fonctions multiplicatives des contenus de la partition. Afin de voir comment utiliser cela, il nous faut d'abord, comme promis, mieux comprendre ce que sont les caractères, et pour cela, parler de fonctions symétriques.

3. — FONCTIONS SYMÉTRIQUES, ESPACE DE FOCK

3.1. — Fonctions symétriques, fonctions de Schur, et caractères

On considère maintenant un ensemble infini<sup>6</sup> de variables formelles  $x_1, x_2, \dots$ . L'espace des fonctions symétriques de degré  $n$  est l'espace vectoriel  $\Lambda_n$  des séries formelles en les  $x_i$ , homogènes de degré  $n$ , qui sont laissées invariantes par toute permutation finie des variables. Le corps de base pour ce qui nous intéresse ici pourra être indifféremment  $\mathbb{Q}$  ou  $\mathbb{C}$ . Nous renvoyons à [Sta99, Chap. 7] pour les énoncés de ce chapitre.

La dimension de  $\Lambda_n$  comme espace vectoriel est égale au nombre de partitions de  $n$ . Pour voir cela, définissons pour  $\lambda$  une partition de  $n$  la fonction symétrique monomiale

$$m_\lambda = \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_{\ell(\lambda)} \geq 1 \\ \text{distincts}}} x_{i_1}^{\lambda_1} x_{i_2}^{\lambda_2} \dots x_{i_k}^{\lambda_k}.$$

Autrement dit,  $m_\lambda$  est la somme de tous les monômes dont les exposants forment la partition  $\lambda$ . Puisque toute fonction symétrique est égale à ses symétrisés, en moyennant on voit facilement que les  $m_\lambda$  engendrent  $\Lambda_n$ , puis il est clair qu'elles forment une base. Par exemple  $\Lambda_1$  est la droite engendrée par  $m_1 = \sum_i x_i$ , et  $\Lambda_2$  est engendré par  $m_2 = \sum_i x_i^2$  et  $m_{1,1} = \sum_{i \neq j} x_i x_j$ . Par convention on note également  $m_\emptyset := 1$  qui engendre  $\Lambda_0$ .

On notera  $\Lambda$  la somme directe de tous les  $\Lambda_n$ . C'est une algèbre, naturellement graduée par le degré. Une base de  $\Lambda$  comme espace vectoriel est bien sûr donnée par  $(\mathbf{m}_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{P}}$ , où  $\mathcal{P}$  est l'ensemble de toutes les partitions.

Nous allons maintenant définir quatre autres bases importantes des  $\Lambda_n$  (et donc de  $\Lambda$ ), les fonctions symétriques élémentaires, complètes, sommes de puissances, et les fonctions de Schur. Les trois premières sont définies multiplicativement sur les parts de la partition, par les formules explicites suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Élémentaires : } e_k &= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \quad , \quad e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \dots e_{\lambda_{\ell(\lambda)}}. \\ \text{Complètes : } h_k &= \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \quad , \quad h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \dots h_{\lambda_{\ell(\lambda)}}. \\ \text{Powersums : } p_k &= \sum_i x_i^k \quad , \quad p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots p_{\lambda_{\ell(\lambda)}}. \end{aligned}$$

Le lecteur pourra consulter [Sta99] ou [Mac95] pour les démonstrations, qui ne sont pas difficiles, que chacun des trois ensembles  $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{P}_n}$ ,  $(h_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{P}_n}$ ,  $(p_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{P}_n}$  est une base de  $\Lambda_n$ , ainsi que pour la plaisante combinatoire relative aux changements entre ces bases.

La base des fonctions de Schur est peut-être la plus importante. La manière la plus simple de définir la fonction de Schur, lorsque le nombre de variables  $x_1, x_2, \dots$  est fini et égal à  $K$  (autrement dit, lorsque l'on effectue la substitution  $x_i = 0$  pour  $i > K$ ) est la formule déterminantale suivante :

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_K, 0, 0, \dots) := \frac{\det \left( x_i^{\lambda_j - j + K} \right)_{1 \leq i, j \leq K}}{\prod_{i < j} (x_j - x_i)}. \quad (2.7)$$

On notera que (2.7) est bien un polynôme symétrique, puisque le numérateur est un polynôme antisymétrique et qu'on divise par le Vandermonde, et qu'il a bien degré  $|\lambda|$  (on

6. Les lecteurs et lectrices qui seraient mal à l'aise par la manipulation de séries en une infinité de variables peuvent se contenter de prendre un nombre fini de variables mais supérieur à  $n$ . Afin de faire des fonctions symétriques une algèbre (et donc de manipuler tous les " $n$ " simultanément), il faudra alors effectuer une opération de limite projective. Les détails ne sont pas compliqués et nous espérons que dans la présentation légère adoptée nos lecteurs et lectrices ne trouveront pas d'ambiguïté.

pourra commencer par se convaincre que pour  $\lambda = \emptyset$  le dénominateur est égal au numérateur). Cette observation rend aussi la définition de  $s_\lambda$  assez naturelle : à un Vandermonde près, construire des fonctions symétriques ou antisymétriques est la même chose, et la manière la plus commode de construire une fonction antisymétrique est d'utiliser un déterminant.

Il n'est pas difficile de voir que la formule (2.7) définit bien une fonction symétrique en une infinité de variables, c'est à dire que la limite projective quand  $K \rightarrow \infty$  est bien définie. On a par exemple

$$s_{(2,1)} = \sum_{i \neq j} x_i^2 x_j + 2 \sum_{i < j < k} x_i x_j x_k = m_{(2,1)} + 2m_{(1,1,1)}. \quad (2.8)$$

On peut remarquer sur l'exemple ci-dessus que la fonction de Schur a un développement à coefficients entiers positifs en la base des fonctions monomiales. Pour savoir ce que comptent ces coefficients, ils nous faudra définir les tableaux à la section suivante.

L'une des raisons de l'importance des fonctions de Schur est qu'elles sont liées de manière explicite aux caractères du groupe symétrique :

**Proposition 6.** *Les caractères du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  sont, à normalisation près, les coefficients de changement de base dans l'espace vectoriel  $\Lambda_n$ , des fonctions de Schur aux fonctions puissances. Plus précisément on a avec les notations précédentes :*

$$s_\lambda(\mathbf{x}) = \frac{1}{n!} \sum_{\mu \vdash |\lambda|} \chi^\mu(K_\lambda) p_\mu(\mathbf{x}). \quad (2.9)$$

**Notation.** Un peu plus tard dans la suite, nous aurons besoin de considérer les fonctions de Schur comme des fonctions non en les variables  $x_i$ , mais en les powersums  $p_i(\mathbf{x})$  (notons que chaque  $s_\lambda$  est un polynôme homogène de degré  $|\lambda|$  en les  $p_i(\mathbf{x})$ , si l'on considère que la "variable"  $p_i$  a degré  $i$ ). Nous utiliserons un tilde pour désigner les fonctions de Schur vues comme fonctions des powersums :

$$s_\lambda(\mathbf{x}) = \tilde{s}_\lambda(p_i(\mathbf{x})), \quad (2.10)$$

où le polynôme  $\tilde{s}_\lambda$  est « explicitement » donné par la formule (2.9).

Dans la définition suivante comme partout dans cette section et les suivantes, le paramètre  $m \geq 2$  des constellations est fixé et nous ne le faisons pas apparaître dans les définitions.

**Définition 5.** Soient  $\mathbf{p} = (p_i, i \geq 1)$ ,  $\mathbf{q} = (q_i, i \geq 1)$  deux suites de variables formelles, étendues multiplicativement aux partitions, i.e.  $p_\lambda := p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots$ . On définit la série génératrice exponentielle des  $m$ -constellations où  $t$  marque le nombre d'hypararêtes, avec poids  $u_0$  par hyperface, poids  $u_i$  par sommet de couleur  $i$  pour  $i \in [1..m-2]$ , et poids  $p_j$  ou  $q_j$  pour un sommet de degré  $j$  de couleur  $(m-1)$  ou  $m$ , respectivement. Avec les notations précédentes

$$\tau(\mathbf{p}, \mathbf{q}) := 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} \sum_{\lambda \vdash n; \mu \vdash n} C_{\lambda, \mu}(u_0, u_1, \dots, u_{m-2}) p_\lambda q_\mu.$$

Maintenant que l'on connaît le lien entre fonctions de Schur et caractères, on a le corollaire immédiat de la formule de Frobenius version « contenus » :

**Corollaire 7.** *La fonction  $\tau(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  se met sous la forme :*

$$\tau(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{n \geq 0} \sum_{\lambda \vdash n} t^n \prod_{\substack{i \in [0..m-2] \\ \square \in \lambda}} (u_i + c(\square)) \tilde{s}_\lambda(\mathbf{p}) \tilde{s}_\lambda(\mathbf{q}). \quad (2.11)$$

On verra plus tard l'importance de cette formule.

**3.2. — Retour aux partitions, entrelacements, tableaux semi-standard**

Nous revenons maintenant à (2.8), et allons expliquer dans le cas général ce que comptent les coefficients de changement de base des fonctions de Schur aux fonctions monomiales. Pour cela il nous faut d’abord approfondir un peu la théorie des partitions d’entiers.

On notera  $\mathcal{P}_n$  l’ensemble fini de toutes les partitions de  $n$ , et  $\mathcal{P} = \cup_{n \geq 0} \mathcal{P}_n$ . L’unique élément de  $\mathcal{P}_0$  est appelé partition vide et noté  $\emptyset$ . La partition *conjuguée* ou *transposée* de  $\lambda$ , notée  $\lambda'$ , est la partition obtenue en effectuant une réflexion du diagramme de  $\lambda$  par rapport à la diagonale (notation française), ou verticale (notation russe), voir encore la figure 2.10. Ainsi, si  $\lambda = (4, 4, 2, 1, 1)$ , on a  $\lambda' = (5, 3, 2, 2)$ . On notera que la conjugaison est une involution et que  $\lambda'_1 = \ell(\lambda)$ .

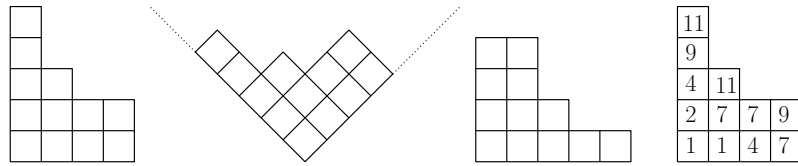


FIGURE 2.10 – De gauche à droite. (1) Représentation de la partition  $\lambda = (4, 4, 2, 1, 1)$  comme diagramme de Ferrers, à la française; (2) à la russe; (3) sa transposée  $(5, 3, 2, 2)$ ; (4) Un tableau semi-standard  $(\lambda^{(i)})$  de forme  $\lambda$ . On a par exemple  $\lambda^{(1)} = (2)$ ,  $\lambda^{(7)} = \lambda^{(8)} = (4, 3, 1)$ , et  $\lambda^{(11)} = \lambda^{(12)} = \dots = \lambda$ .

On dit que deux partitions  $\lambda$  et  $\mu$  sont entrelacées, et l’on note  $\lambda \prec \mu$ , si pour tout  $i \geq 1$  on a

$$\lambda_i \geq \mu_{i+1} \geq \lambda_{i+1}.$$

Sur le diagramme de Ferrers, cela signifie que la forme  $\mu/\lambda$  est une *bande horizontale*, i.e. un ensemble de cases ne contenant pas deux cases dans la même colonne. On note également  $\mu \succ \lambda$ . On dit que  $\lambda$  et  $\mu$  sont *coentrelacées*, et l’on note  $\lambda \prec' \mu$ , si  $\lambda' \preceq \mu'$ , autrement dit si leurs transposées sont entrelacées. De manière équivalente les partitions diffèrent par une *bande verticale*.

Un *tableau d’Young semi-standard (SSYT) de forme  $\lambda$*  est une suite de partitions entrelacées  $\emptyset = \lambda^{(0)} \prec \lambda^{(1)} \prec \dots$  qui stationne au bout d’un certain rang à  $\lambda$ . On notera  $SSYT(\lambda)$  l’ensemble des SSYT de forme  $\lambda$ .

Graphiquement, plutôt que de représenter une suite de diagrammes de Ferrers, ce qui serait assez lourd, on préfère dessiner tous ces diagrammes en un seul, comme suit. On dessine d’abord le diagramme de la partition  $\lambda$ , puis pour chaque  $i \geq 1$ , on remplit les cases de la forme  $\lambda^{(i)}/\lambda^{(i-1)}$  par des entiers égaux à  $i$ . On obtient une autre définition, plus classiques, des SSYT : Un SSYT de forme  $\lambda$  est un remplissage des cases de  $\lambda$  par des entiers  $\geq 1$ , tel que le remplissage soit faiblement croissant selon les lignes, et strictement croissant selon les colonnes, dans la notation française. Voir figure 2.10.

La proposition suivante est élémentaire et se déduit de manière élémentaire (quoique astucieuse) de manipulations lignes/colonnes sur la définition déterminantale des fonctions de Schur.

**Proposition 8.** *Les fonctions de Schur sont les fonctions de partitions des tableaux semi-standard. Pour  $\lambda$  une partition on a :*

$$s_\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{T \in SSYT(\lambda)} \mathbf{x}^T, \tag{2.12}$$

où la somme est prise sur tous les tableaux semi-standards de forme  $\lambda$ , et où  $\mathbf{x}^T = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots$  où  $m_i$  est le nombre d'entrées égales à  $i$  dans le tableau.

Par exemple, pour  $\lambda = [2, 1]$ , un tableau de forme  $\lambda$  est de la forme  $\begin{matrix} k \\ i & j \end{matrix}$  avec les contraintes  $i \leq j$  et  $i < k$ . On a donc  $s_\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{i,j,k \geq 1 \\ i \leq j; i < k}} x_i x_j x_k$ .

**Remarque 5.** Le membre de droite de la formule (2.11), où  $p_i = p_i(\mathbf{x})$  et  $q_i = p_i(\mathbf{y})$  a donc une interprétation combinatoire claire : il s'agit d'une somme sur les paires de tableaux de même forme  $\lambda$ , avec un poids dépendant de  $\lambda$  qui est multiplicatif sur les contenus. Or le membre de gauche peut s'interpréter en termes de cartes coloriées, en interprétant dans la formule  $p_i = p_i(\mathbf{x}) = \sum_k x_k^i$  l'entier  $k$  comme la valeur d'une couleur portée par un sommet. Il doit donc exister une démonstration bijective (ou combinatoire) de cette identité. Or à ma connaissance, toutes les démonstrations connues utilisent plus ou moins explicitement la « boîte noire » de la théorie des représentations. On peut penser que faire sauter ce verrou aurait des conséquences importantes : on pourrait par exemple tirer de nouvelles informations sur les cartes aléatoires, ou encore généraliser ces formules. Par exemple, la  $b$ -conjecture de Goulden et Jackson [GJ96] dit qu'une certaine déformation à 1 paramètre de (2.11) est encore une série génératrice de cartes. Mais en l'absence de connexion avec la théorie des représentations pour les valeurs génériques du paramètre, elle est pour l'instant grand ouverte.

Afin de bien travailler avec les fonctions de Schur (et afin surtout d'arriver aux fonctions tau qui nous intéressent pour compter les cartes), il est nécessaire d'introduire un nouveau point de vue sur les partitions, avec l'espace de Fock.

### 3.3. — Espace de Fock bosonique et opérateurs de vertex

L'espace de Fock bosonique, dénoté ici  $\mathcal{B}$ , est l'espace de Hilbert de dimension infinie engendré par la base de vecteurs orthonormés  $|\lambda\rangle$  où  $\lambda$  parcourt l'ensemble des partitions d'entiers. Ici on utilisera la notation « bra-ket », en particulier  $\langle \lambda |$  est le vecteur de base dual. Pour  $x$  une variable (formelle ou complexe) on introduit les opérateurs  $\Gamma_{L+}(x), \Gamma_{L-}(x), \Gamma_{R+}(x), \Gamma_{R-}(x)$  dont l'action sur les vecteurs de bases est donnée par

$$\begin{aligned} \Gamma_{L+}(x)|\lambda\rangle &= \sum_{\mu: \mu \prec \lambda} x^{|\lambda|-|\mu|} |\mu\rangle, & \Gamma_{R+}(x)|\lambda\rangle &= \sum_{\mu: \mu' \prec \lambda'} x^{|\lambda|-|\mu|} |\mu\rangle, \\ \Gamma_{L-}(x)|\lambda\rangle &= \sum_{\mu: \mu \succ \lambda} x^{|\mu|-|\lambda|} |\mu\rangle, & \Gamma_{R-}(x)|\lambda\rangle &= \sum_{\mu: \mu' \succ \lambda'} x^{|\mu|-|\lambda|} |\mu\rangle, \end{aligned} \quad (2.13)$$

où l'on rappelle que  $\prec, \succ, \prec', \succ'$  sont les relations d'entrelacement/co-entrelacement définies plus haut. Ces opérateurs sont souvent appelés opérateurs de vertex (ou de half-vertex). En mots, l'action des quatre opérateurs de types  $L/R -/+$  consiste à entrelacer/coentrelacer vers le haut/vers le bas les partitions. L'exposant de la variable  $x$  marque le changement de taille de la partition dans l'opération. Dans la littérature,  $\Gamma_{L\pm}(x)$  est souvent noté  $\Gamma_{\pm}(x)$ , voir par exemple [Oko01], et  $\Gamma_{R\pm}(x)$  est parfois noté  $\Gamma'_{\pm}(x)$  [You10; BCC17]. Notons que l'on a

$$\Gamma_{L+}(x)|\emptyset\rangle = \Gamma_{R+}(x)|\emptyset\rangle = |\emptyset\rangle, \quad \langle \emptyset | \Gamma_{L-}(x) = \langle \emptyset | \Gamma_{R-}(x) = \langle \emptyset | \quad (2.14)$$

où  $\emptyset$  est la partition vide (dont toutes les parts sont égales à zéro). Notons également que  $\Gamma_{R+}$  (resp.  $\Gamma_{R-}$ ) est conjugué à  $\Gamma_{L+}$  (resp.  $\Gamma_{L-}$ ) via l'involution  $\omega$  de  $\mathcal{B}$  qui envoie  $|\lambda\rangle$  sur  $|\lambda'\rangle$ .



On étend ces définitions « multiplicativement » (ou plutôt « compositionnellement » s'agissant d'opérateurs) à des suites de variables. Par exemple, si  $\mathbf{x} = (x_i, i \geq 1)$  est une suite de variables, on note :

$$\Gamma_{L+}(\mathbf{x}) := \prod_{i=1}^{\infty} \Gamma_{L+}(x_i).$$

Pour la définition, on prendra le produit de gauche à droite, mais la proposition suivante nous dira que l'ordre est indifférent. On remarque que ce produit infini est bien défini au sens formel, c'est à dire que pour toutes partitions  $\lambda, \mu$  l'élément  $\langle \lambda | \otimes | \mu \rangle$  de cet opérateur est une série formelle (infinie) bien définie en les variables  $x_i$ .

Par définition, l'action de l'opérateur  $\Gamma_{L+}(\mathbf{x})$  est d'entrelacer les partitions de manière croissante, autrement dit de fabriquer des tableaux semi-standard. En déroulant les définitions, la proposition 8 se reformule donc ainsi :

$$s_{\lambda}(\mathbf{x}) = \langle \emptyset | \Gamma_{L+}(\mathbf{x}) | \lambda \rangle. \quad (2.15)$$

Notons que l'on a également

$$s_{\lambda}(\mathbf{x}) = \langle \lambda | \Gamma_{L-}(\mathbf{x}) | \emptyset \rangle. \quad (2.16)$$

Plus généralement, en exponentiant et multipliant les quatre opérateurs  $\Gamma_{L/R,+/-}$ , on fabrique des opérateurs nouveaux qui « entrelacent » des partitions successivement selon les quatre entrelacements possibles. Une propriété remarquable qui permet de travailler avec de tels produits est que les opérateurs de vertex satisfont des relations de (quasi)commutation remarquables :

**Proposition 9** (Relations de commutation des opérateurs de vertex). *Pour  $a_1, a_2 \in \{L, R\}$ , on a :*

$$\Gamma_{a_1+}(x_1)\Gamma_{a_2-}(x_2) = \begin{cases} \frac{1}{1-x_1x_2} \Gamma_{a_2-}(x_2)\Gamma_{a_1+}(x_1) & \text{si } a_1 = a_2, \\ (1+x_1x_2) \Gamma_{a_2-}(x_2)\Gamma_{a_1+}(x_1) & \text{si } a_1 \neq a_2. \end{cases} \quad (2.17)$$

*De plus  $\Gamma_{a_1+}(x_1)$  commute avec  $\Gamma_{a_2+}(x_2)$ , et  $\Gamma_{a_1-}(x_1)$  commute avec  $\Gamma_{a_2-}(x_2)$ .*

Cette proposition est bien connue sous des formes diverses en combinatoire algébrique. On consultera par exemple [You10, Lemma 3.3] pour une démonstration (algébrique) complète dans la formulation utilisée ici. On notera que, malgré leur formulation algébrique, chacun des énoncés du lemme cache en fait un énoncé combinatoire, obtenu en extrayant les éléments de matrices dans les identités d'opérateurs. Par exemple, le fait que  $\Gamma_{L+}(x_1)$  et  $\Gamma_{L+}(x_2)$  commutent signifie simplement que pour toute paire de partitions  $(\lambda, \nu)$ , il existe une bijection sur l'ensemble des partitions  $\mu$  telles que  $\lambda \prec \mu \prec \nu$ , qui échange les quantités  $|\mu| - |\lambda|$  et  $|\nu| - |\mu|$ . Cette bijection est réalisée par la classique “involution de Bender-Knuth” [BK72]. La formulation habituelle de cette propriété est simplement de dire que les fonctions de Schur, définies comme fonctions de partitions des SSYT, sont bien des fonctions symétriques ! On construit facilement une involution similaire pour les autres cas de la dernière phrase du lemme (voir [Bou+17] où c'est fait explicitement). Les relations (2.17) sont plus difficiles à démontrer, et les démonstrations bijectives sont souvent connues sous le nom de « règles locales ». Elles apparaissent notamment dans les travaux de Gessel [Ges93], Krattenthaler [Kra06], Pak–Postnikov [PP96], et Fomin (voir [Sta99, Chap.7]).

**Remarque 6.** Dans l'article [Bet+14], avec mes coauteurs, nous avons (re)donné des preuves purement bijectives de chacun des cas de la proposition (il semble que le  $a_1 \neq a_2$  n'apparaissait pas dans littérature sous une forme aussi bijective que celle que nous donnons). Bien que la proposition elle-même soit bien connue, disposer d'une démonstration bijective simple dans tous les cas a des conséquences intéressantes pour la génération aléatoire, comme nous en reparlerons en section 2.8 du chapitre 4.

**3.4. — Première application des relations de commutations : RSK et identité de Cauchy**

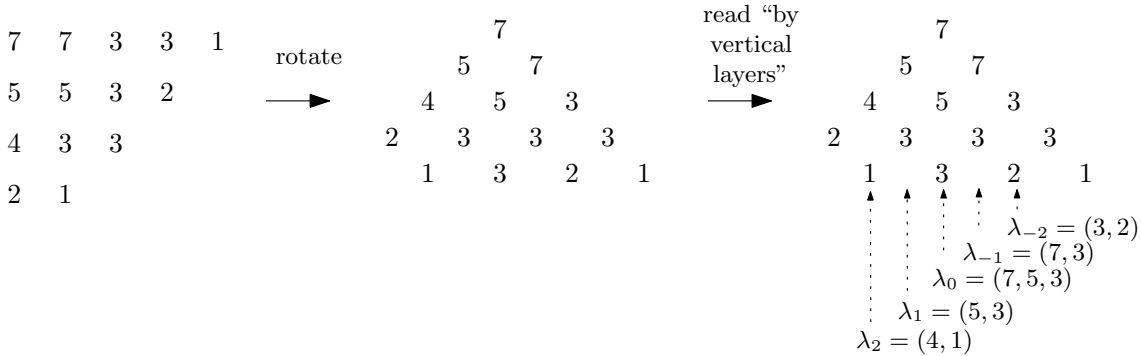


FIGURE 2.11 – À gauche, une partition plane selon sa définition habituelle : un tableau fini d’entiers décroissants selon les deux directions. À droite, sa réalisation sous la forme d’une suite de partitions entrelacées de la forme (2.18). Figure chipée à mes notes de cours au MPRI.

Considérons l’ensemble de toutes les suites de partitions d’entiers  $\vec{\lambda} = (\lambda^{(i)}, i \in \mathbb{Z})$  telles que  $\lambda^{(i)}$  est égale à la partition vide pour  $|i|$  assez grand, et telles que

$$\dots \prec \lambda^{(-2)} \prec \lambda^{(-1)} \prec \lambda^{(0)} \succ \lambda^{(1)} \succ \lambda^{(2)} \succ \dots \tag{2.18}$$

Un telle suite sera appelée *partition plane*, et peut-être vue comme un tableau d’entiers décroissant selon deux directions, voir la figure 2.11. On se donne une suite de variables formelles  $\mathbf{z} = (z_i, i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2})$  et on forme la série génératrice  $F(\mathbf{z})$  de toutes les partitions planes, où la suite  $\vec{\lambda}$  est comptée avec un poids

$$\prod_{i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} z_i^{|\lambda^{(i+\frac{1}{2})}| - |\lambda^{(i-\frac{1}{2})}|}$$

Autrement dit, l’exposant de  $z_i$  marque le changement de taille de la partition lors du  $i$ -ème entrelacement. On notera qu’en coupant la suite (2.18) pour ne garder que les indices négatifs (resp. les indices positifs, en inversant droite et gauche), on obtient un tableau semi-standard de forme  $\lambda^{(0)}$ . Une partition plane n’est donc autre que la donnée de deux SYYT de même forme (ici  $\lambda^{(0)}$ ) et la série génératrice s’écrit donc :

$$F(\mathbf{z}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} s_{\lambda}(\mathbf{z}_-) s_{\lambda}(\mathbf{z}_+), \tag{2.19}$$

où  $\mathbf{z}_-$  et  $\mathbf{z}_+$  sont respectivement les sous-suites de  $\mathbf{z}$  indexées par les indices positifs et négatifs.

En revenant aux opérateurs de vertex on a clairement, en développant formellement le produit d’opérateurs :

$$F(\mathbf{z}) = \langle \emptyset | \prod_{i < 0} \Gamma_{L+}(z_i) \prod_{i > 0} \Gamma_{L-}(z_i) | \emptyset \rangle. \tag{2.20}$$

On remarque que dans l'expression précédente, si tous les  $\Gamma_{L+}$  apparaissaient à droite (et non à gauche) des  $\Gamma_{L-}$  dans le produit d'opérateurs, la quantité évaluée serait égale à 1, par (2.14). Or on dispose justement de relations de (quasi)-commutation nous permettant de changer l'ordre des opérateurs! Pour faire passer tous les  $\Gamma_{L+}$  à droite, il faut que chaque  $\Gamma_{L+}(z_i)$  pour  $i < 0$  "commute" avec chaque  $\Gamma_{L-}(z_j)$  pour  $j \geq 0$ , ce qui par la proposition fait apparaître un facteur  $(1 - z_i z_j)^{-1}$ . On obtient ainsi la très importante identité de Cauchy :

**Proposition 10** (Identité de Cauchy, voir par exemple [Sta99]). *On a*

$$F(\mathbf{z}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} s_{\lambda}(\mathbf{z}_-) s_{\lambda}(\mathbf{z}_+) = \prod_{i < 0 < j} \frac{1}{1 - z_i z_j}.$$

**Remarque 7.** *Si l'on dispose d'une démonstration bijective de la relation de quasi-commutation entre  $\Gamma_{L+}$  et  $\Gamma_{L-}$ , il est possible de transformer l'argument en un démonstration bijective de l'identité de Cauchy. On retrouve ainsi le fameux algorithme RSK<sup>7</sup>, bijection entre matrices d'entiers et paires de tableaux semi-standard de même forme, qui démontre bijectivement l'identité de Cauchy. Ce point de vue est souvent attribué à Fomin et magnifiquement exposé (sans mention, d'ailleurs, des opérateurs de vertex) dans son appendice au livre [Sta99].*

Il est naturel à ce stade, de remarquer que ce que l'on vient de faire pour les suites de partitions de la forme (2.18) peut être largement généralisé. Par exemple, plutôt que de considérer des entrelacements successifs selon les relations  $\dots, \prec, \prec, \succ, \succ \dots$ , on pourrait alterner  $\prec$  et  $\succ$  selon un ordre choisi. On pourrait également insérer des entrelacements « duaux » où les partitions duales seraient entrelacées. La fonction génératrice aurait alors une forme analogue à (2.20), en remplaçant les opérateurs de vertex  $\Gamma_{L+}$  et  $\Gamma_{L-}$  par chacun des quatre types d'opérateurs, à chaque position, conformément à la suite d'entrelacements choisie. Puisque l'on connaît les relations de quasi-commutation entre les quatre types d'opérateurs de vertex, on aurait obtenu une version de l'identité de Cauchy pour chaque choix de séquence d'entrelacement. Ce que l'on vient d'esquisser ici n'est autre que la notion de *processus de Schur* due à Okounkov et Reshetikhin [OR03], et le fait que leur fonction de partition a une forme produit explicite<sup>8</sup>. Nous n'entrerons pas ici dans la théorie (ni même dans les définitions précises des processus de Schur). Nous énonçons tout de même la propriété dont nous venons d'esquisser la démonstration!

**Proposition 11** (Fonction de partition des processus de Schur, [OR03]). *Pour toute suite  $\square = (\square_i, i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2})$  avec  $\square_i \in \{\prec, \succ, \prec', \succ'\}$ , la série génératrice des suites de partitions  $(\lambda^{(i)}, i \in \mathbb{Z})$  telles que  $\lambda^{(i)} = \emptyset$  pour  $|i|$  assez grande, et telle que*

$$\dots \square_{-\frac{3}{2}} \lambda^{(-1)} \square_{-\frac{1}{2}} \lambda^{(0)} \square_{\frac{1}{2}} \lambda^{(1)} \square_{\frac{3}{2}} \lambda^{(2)} \square_{\frac{5}{2}} \dots$$

*comptées avec un poids  $z_i$  marquant la valeur absolue de la différence  $||\lambda_{i+\frac{1}{2}}| - |\lambda_{i-\frac{1}{2}}||$  est*

7. nous pourrions dire "les algorithmes RSK", puisque chaque règle locale (chaque démonstration bijective des relations de commutation) conduit in fine à un algorithme différent. Néanmoins il existe une règle locale plus canonique que les autres, qui correspond bien à L'algorithme RSK, voir encore [Sta99].

8. stricto sensu, la notion de processus de Schur est un peu plus générale, puisque chacun des entrelacements peut être associé à un nombre infini de variables; ce que l'on esquisse ici est le cas combinatoire le plus naturel de ces modèles.

donnée par le produit

$$F_{\square}(\mathbf{z}) = \frac{\prod_{\substack{i < j, \\ (\square_i, \square_j) = (\prec, \succ') \\ \text{ou } (\square_i, \square_j) = (\prec', \succ)}} (1 + z_i z_j)}{\prod_{\substack{i < j, \\ (\square_i, \square_j) = (\prec, \succ) \\ \text{ou } (\square_i, \square_j) = (\prec', \succ')}} (1 - z_i z_j)}$$

Les produits infinis dans le membre de droite « détectent » simplement les paires d'opérateurs qu'il faut faire commuter pour trivialisier le produit d'opérateurs de vertex correspondant à  $\square$  (on détecte chaque fois qu'un entrelacement vers le haut apparaît à gauche d'un qui est vers le bas), et donne le facteur multiplicatif correspondant venant de la proposition précédente.

Deux remarques s'imposent ici :

- la première, c'est que les partitions planes sont de beaux objets, et que nous aimerions passer un peu de temps avec eux ou avec leur famille. C'est ce que nous ferons dans la section 2 au chapitre 4, où nous introduirons les *Rail Yard Graphs*, qui sont un modèle de dimères plan dont la fonction  $F_{\square}$  ci-dessus est à peu de choses près la fonction de partition.
- la seconde, c'est l'apparente similarité entre la somme de Cauchy (2.19) et notre expression pour la série génératrice des cartes et constellations (2.11). La fonction génératrice des cartes, incluant tous les genres et contrôlant les degrés de deux classes de sommets, s'obtient « simplement » en ajoutant un poids diagonal dans la somme de Cauchy. De plus, ce poids est multiplicatif sur les contenus. De cette structure très particulière, nous pourrions tirer beaucoup d'informations. Pour cela, nous allons maintenant introduire le point de vue fermionique sur l'espace de Fock, qui a justement le bon goût de faire intervenir de manière très naturelle, les contenus.

On remarquera plus tard que les deux remarques sont liées, puisque l'espace de Fock fermionique jouera un rôle fondamental dans la compréhension statistique des partitions planes et plus généralement des Rail Yard Graphs.

### 3.5. — Espace de Fock Fermionique

Étant donnés deux symboles  $\bullet$  et  $\circ$  (appelés respectivement *particules noires* et *particules blanches*, on parlera aussi de *sites occupés* et de *sites vides*, voyant les particules blanches comme des absences de particules noires), un *diagramme maya* [MJD00] est un élément  $\mathbf{m}$  de  $\{\bullet, \circ\}^{\mathbb{Z}+1/2}$  tel que  $\mathbf{m}_k$  stationne au bout d'un certain rang à  $\bullet$  pour  $k \rightarrow -\infty$  et à  $\circ$  pour  $k \rightarrow +\infty$ . Il est alors clair que la quantité

$$c = \#\{k > 0, \mathbf{m}_k = \bullet\} - \#\{k < 0, \mathbf{m}_k = \circ\} \quad (2.21)$$

est un entier *fini*, et on l'appelle la *charge* de  $\mathbf{m}$ . Soient  $k_1 > k_2 > \dots$  les positions des  $\bullet$  dans  $\mathbf{m}$  énumérées en ordre décroissant et soit

$$\lambda_i = k_i - c + i - 1/2.$$

Il est facile de voir que  $\lambda$  est une partition d'entier et que la correspondance  $\mathbf{m} \mapsto (\lambda, c)$  est univoque. Le diagramme maya n'est autre que le *mot de contour* lisant le bord du diagramme de la partition, et la charge indique l'offset avec lequel cette lecture est effectuée, voir la figure 2.9. La paire  $(\lambda, c)$  est appelée une *partition chargée*. On notera pour abrégier  $\emptyset_n$  le diagramme maya correspondant à la partition vide de charge  $n$ , et par un léger abus de notation, on dénotera souvent  $\emptyset$  pour le diagramme  $\emptyset_0$ .

L'espace de Fock fermionique, noté  $\mathcal{F}$ , est l'espace de Hilbert infini dimensionnel engendré par la base orthonormée  $|\mathbf{m}\rangle$  où  $\mathbf{m}$  parcourt l'ensemble de tous les diagrammes mayas. Pour  $c \in \mathbb{Z}$ , on note  $\mathcal{F}_c \subset \mathcal{F}$  le sous-espace engendré par les diagrammes de charge  $c$ , de telle sorte que  $\mathcal{F} = \bigoplus_{c \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_c$ . Par la bijection entre diagrammes mayas et partitions chargées, chaque  $\mathcal{F}_c$  est canoniquement identifié à l'espace bosonique  $\mathcal{B}$ . Cela définit une action des opérateurs bosoniques  $\Gamma_{L\pm}$  et  $\Gamma_{R\pm}$  sur  $\mathcal{F}$  qui laisse chaque  $\mathcal{F}_c$  invariant (on utilisera les mêmes notations pour ces opérateurs, et l'on remarque que les relations de commutation de la proposition 9 restent valides).

Pour  $k \in \mathbb{Z} + 1/2$ , on définit les *opérateurs fermioniques*  $\psi_k$  et  $\psi_k^*$  (dits de création/annihilation) par leur action sur un vecteur de base  $|\mathbf{m}\rangle$  par

$$\begin{aligned} \psi_k |\mathbf{m}\rangle &= \begin{cases} (-1)^{\#\{j>k, \mathbf{m}_j=\bullet\}} |\mathbf{m}^{(k)}\rangle & \text{si } \mathbf{m}_k = \circ, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ \psi_k^* |\mathbf{m}\rangle &= \begin{cases} (-1)^{\#\{j>k, \mathbf{m}_j=\bullet\}} |\mathbf{m}^{(k)}\rangle & \text{si } \mathbf{m}_k = \bullet, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.22)$$

où  $\mathbf{m}^{(k)}$  est le diagramme maya obtenu à partir de  $\mathbf{m}$  en inversant la couleur de la particule sur le site  $k$ . Ces opérateurs ont donc pour effet d'ajouter ou supprimer la particule en position  $k$ , et récoltent un signe qui compte le nombre de particules occupées à droite avant l'ajout. Il est direct de vérifier les (classiques) relations d'anticommutation des opérateurs fermioniques :

**Proposition 12** (Anticommutation des opérateurs fermioniques). *Pour tous  $k$  et  $k'$  dans  $\mathbb{Z} + 1/2$ , on a*

$$\{\psi_k, \psi_{k'}\} = 0, \quad \{\psi_k^*, \psi_{k'}^*\} = 0, \quad \{\psi_k, \psi_{k'}^*\} = \delta_{k,k'}. \quad (2.23)$$

où  $\{a, b\}$  est l'anticommutateur de  $a$  et  $b$  :  $\{a, b\} = ab + ba$ .

Il est en fait possible d'exprimer les opérateurs bosoniques en terme des opérateurs fermioniques. On a par exemple :

$$\Gamma_{L+}(\mathbf{x}) = \exp \left( \sum_k \frac{1}{k} p_k(\mathbf{x}) \sum_i \psi_i^* \psi_{k+i} \right). \quad (2.24)$$

On peut démontrer cette formule en utilisant uniquement les relations de commutation, de manière à faire apparaître un déterminant où l'on reconnaît les fonctions de Schur, voir par exemple l'appendice de [Oko01]. On peut aussi remarquer que l'effet de l'opérateur  $\psi_i^* \psi_{k+i}$  est de « faire sauter » une particule de la position  $i$  à la position  $k+i$ , ce qui sur la partition correspondante revient à ajouter un ruban de taille  $k$ ; cette formule n'est donc qu'une reformulation équivalente de la formule de Murnaghan-Nakayama évoquée plus haut. Comme on l'a fait pour les fonctions de Schur, on préférera parfois voir les opérateurs comme dépendant des « variables  $p_i$  », ce l'on indiquera comme précédemment avec un tilde, par exemple :

$$\tilde{\Gamma}_{L+}(\mathbf{p}) = \Gamma_{L+}(\mathbf{x}), \quad \text{où } \mathbf{p} = (p_i(\mathbf{x}))_{i \geq 1}.$$

En mettant opérateurs bosoniques et fermioniques à la même enseigne, on peut commencer à faire des calculs très puissants. Notamment, on remarque que l'opérateur

$$\psi_k \psi_k^* \quad (2.25)$$

permet de tester si une particule est présente en position  $k$  : il donne zéro sinon, et laisse l'élément invariant si oui. En insérant cet opérateur à une position choisie dans un produit d'opérateurs de vertex de type (2.20), on peut ainsi former une fonction de partition restreinte qui ne compte que les partitions planes ayant une particule à une position donnée. En utilisant les relations de commutations qui précèdent<sup>9</sup> on peut calculer explicitement cette fonction, et exprimer ainsi la probabilité qu'une partition plane aléatoire ait une particule à une position donnée. On peut par exemple en déduire simplement des énoncés de formes limites (voir la figure 4.11). Plus généralement, on montre que les fonctions de corrélation entre plusieurs particules dans les processus de Schur sont données par des expressions déterminantales, c'est l'un des résultats remarquables de la théorie des processus de Schur d'Okounkov et Reshetikhin [OR03]. Pour une illustration « en action » du genre de résultats que donnent ce genre d'approches, on pourra consulter le théorème 15 page 76, qui donne une version adaptée au cas des Rail Yard Graphs.

### 3.6. — Cartes et fonctions tau

Nous en arrivons maintenant à ce qui est l'objectif principal de cette section, à savoir énoncer que les fonctions génératrices de cartes sont des fonctions tau. La définition ci-dessous est recopiée directement de [Oko01] dont elle emprunte à peu de choses près les notations.

**Définition 6.** On considère quatre suites infinies de variables formelles  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{p}', \mathbf{q}'$  indexées par  $\mathbb{N}_{>0}$ , et une variable formelle  $z$ . On note  $\{z\}$  la suite  $\{z\} := (z^i, i \geq 1)$ . On note :

$$\gamma(z, \mathbf{r}) := \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} r_k z^k \right).$$

Une suite de fonctions  $\tau_n(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  est une *solution de la hiérarchie 2-Toda* ssi pour toute paire  $\ell, m \in \mathbb{Z}$ , on a

$$\begin{aligned} & \left[ z^{\ell-m} \right] \gamma\left(\frac{1}{z}, -2\mathbf{q}'\right) \tau_{m+1}(\mathbf{p} + \mathbf{p}', \mathbf{q} + \mathbf{q}' + \{z\}) \tau_{\ell}(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \mathbf{q} - \mathbf{q}' - \{z\}) \\ &= \left[ z^{m-\ell} \right] \gamma\left(\frac{1}{z}, 2\mathbf{p}'\right) \tau_m(\mathbf{p} + \mathbf{p}' - \{z\}, \mathbf{q} + \mathbf{q}') \tau_{\ell+1}(\mathbf{p} - \mathbf{p}' + \{z\}, \mathbf{q} - \mathbf{q}'). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Cette équation s'entend au sens des développements formels en série de Taylor en  $\mathbf{p}'$  et  $\mathbf{q}'$ , chaque coefficient donnant une équation différentielle en les variables  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$ .

**Remarque 8.** Cette définition peut paraître effrayante, mais elle est formidablement compacte au regard de la quantité d'équations qu'elle contient, puisqu'en plus du choix de  $\ell$  et de  $m$ , chaque coefficient du développement en  $\mathbf{q}', \mathbf{p}'$  donne une équation différentielle quadratique reliant les fonctions  $\tau_i$ . Par exemple, en choisissant  $\ell = m - 1 = n$  et en extrayant le coefficient de  $q'_1$  (tous les autres  $p'_i$  et  $q'_i$  étant mis à zéro) on obtient :

$$\frac{\partial^2}{\partial p_1 \partial q_1} \log \tau_n = \frac{\tau_{n+1} \tau_{n-1}}{\tau_n^2}, \quad (2.27)$$

*équation utilisée par Okounkov dans son fameux papier sur les nombres de Hurwitz [Oko00].*

9. Plus précisément, on introduit les opérateurs formels  $\Psi(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \psi_k z^k$  et  $\Psi^*(w) = \sum_{k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \psi_k^* w^k$  et l'on montre qu'ils satisfont eux aussi des relations de commutation remarquables avec les opérateurs  $\Gamma$ . Par exemple  $\Gamma_{L^+}(t) \Psi(z) = \frac{1}{1-tz} \Psi(z) \Gamma_{L^+}(t)$ . On peut ainsi insérer l'opérateur  $\Psi(z) \Psi^*(w)$  dans un produit de type (2.20) et obtenir une formule close pour la série génératrice correspondante. Pour obtenir l'action de l'opérateur (2.25) il reste ensuite à extraire le coefficient de  $z^k w^k$ , ce qui explique que les résultats « explicites » obtenus avec cette approche font intervenir des doubles intégrales de contour, comme par exemple le théorème 15 page 76.

On notera que la notion présentée ici concerne une suite de fonctions  $\tau_n$  et non une unique fonction  $\tau$ . Néanmoins, chacune de ces fonctions  $\tau_n$  est elle-même solution d'une hiérarchie d'équations plus restreinte. En effet, si l'on considère le cas  $\ell = m - 1$  et que l'on substitue  $\mathbf{q}' = 0$ , alors on peut remarquer que le membre de gauche de (2.26) s'annule, et dans le membre de droite chaque coefficient dans le développement en  $\mathbf{p}'$  donne une équation aux dérivées partielles, *en les variables  $\mathbf{p}$  seulement* pour l'unique fonction  $\tau_\ell(\cdot, \mathbf{q})$ . Les « variables »  $\mathbf{q}$  ne jouent plus qu'un rôle de paramètres spectateurs. Cette famille infinie d'équations différentielles satisfaites par la fonction  $\tau_\ell$  est appelé la *hiérarchie KP* [MJD00]. L'équation non triviale de plus petit degré de cette hiérarchie est l'équation KP, qui s'obtient en extrayant le coefficient de  $p'_1 p'_2$ . Après calcul (!) elle s'écrit :

$$-\frac{\partial^2}{\partial p_3 \partial p_1} F + \frac{\partial^2}{\partial p_2 \partial p_2} F + \frac{1}{12} \frac{\partial^4}{(\partial p_1)^4} F + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{(\partial p_1)^2} F \right)^2 = 0, \text{ où } F = \log \tau_\ell. \quad (2.28)$$

Le théorème suivant est remarquable.

**Théorème** (voir [GJ08] ou [OS01 ; HO15]). *Pour tout  $m \geq 2$  la fonction  $\tau(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  des  $m$ -constellations (Définition 5 page 24) est la composante  $n = 0$  d'une solution de la hiérarchie 2-Toda. En particulier, c'est une fonction tau de la hiérarchie KP en les variables  $\mathbf{p}$  (et aussi en les variables  $\mathbf{q}$ ).*

Évoquons rapidement les grandes lignes de la démonstration de cet énoncé. On démontre en fait que toute suite de fonctions de la forme

$$\tau_n(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \langle \emptyset_n | \tilde{\Gamma}_+(\mathbf{p}) A \tilde{\Gamma}_-(\mathbf{q}) | \emptyset_n \rangle \quad (2.29)$$

où

$$A = e^{\sum_{i,j} a_{i,j} : \psi_i \psi_j^* :} \quad (2.30)$$

et les  $a_{i,j}$  sont des coefficients formels arbitraires<sup>10</sup> est solution. On utilise ici la notation *normal ordering*, à savoir :  $\psi_i \psi_j^*$  : est égal à  $-\psi_j^* \psi_i$  si  $i > 0$  et  $j < 0$ , et à  $\psi_i \psi_j^*$  sinon.

Pour voir cela, on montre deux choses :

1. que l'opérateur  $A \otimes A$  agissant sur  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$  commute avec avec l'opérateur  $\Omega := \sum_{k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \psi_k \otimes \psi_k^*$ . C'est de l'algèbre linéaire.
2. que si l'on remplace  $A$  par  $\hat{A} = \tilde{\Gamma}_+(\mathbf{p}') A \tilde{\Gamma}_-(\mathbf{q}')$ , on obtient encore une fonction de la même forme. Cela repose sur l'expression des opérateurs de vertex sous forme fermionique.

L'identité de commutation 1. appliquée à la nouvelle fonction 2. donne une infinie d'équations bilinéaires sur les coefficients de cette fonction. C'est cette infinité d'équations bilinéaires qui se met sous la forme de la définition (2.26). Les énoncés 1. et 2. se démontrent de manière assez commode (de l'algèbre linéaire) si l'on dispose de la représentation de l'espace de Fock comme « wedge semi-infini ». Nous renvoyons par exemple à [MJD00], au très clair cours [Bor15] encore au pratique appendice de [Oko01] qui donne les principaux détails en quelques pages.

10. Il faut néanmoins s'assurer que l'on ne fabrique pas de coefficients infinis en évaluant les éléments de matrices des opérateurs. On peut par exemple demander que  $a_{i,j}$  soit une série formelle dont la valuation pour une graduation sous-jacente tend uniformément vers l'infini quand  $|i - j|$  tend vers l'infini, comme par exemple en (2.24). Il s'agit de l'approche « formelle » à la construction de fonctions tau [MJD00], il existe également une approche analytique [SW85], mais les différences subtiles entre les deux dépassent le cadre de cette discussion.

Il reste à voir que notre fonction génératrice de constellations est de la forme (2.29) avec  $n = 0$ . En fait, il est assez facile de voir que toute fonction qui est une somme diagonale de fonctions de Schur avec poids multiplicatif en les contenus, c'est-à-dire toute fonction de la forme :

$$\sum_{\lambda} \prod_{\square \in \lambda} f(c(\square)) \tilde{s}_{\lambda}(\mathbf{p}) \tilde{s}_{\lambda}(\mathbf{q}) \quad (2.31)$$

pour une série  $f$  arbitraire avec  $f(0) = 1$  peut être mise sous la forme (2.29) avec  $n = 0$ . En effet, considérons une fonction  $g$  telle que pour  $k > 0$  on ait  $g(k + \frac{1}{2}) = \sum_{i=1}^k \ln f(i)$  et  $g(k - \frac{1}{2}) = -\sum_{i=k}^{-1} \ln f(i)$ . Alors, en raison du lien entre contenus et positions fermioniques illustré sur la figure 2.9, on voit que l'opérateur scalaire

$$\prod_{\square \in \lambda} f(c(\square))$$

peut être représenté fermioniquement par l'opérateur :

$$e^{\sum_{k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} g(k) : \psi_k \psi_k^* :}$$

Pour voir cela, il suffit de regrouper la contribution des cases de contenu positif (resp. négatif) en fonction de la particule (resp. antiparticule) présente à leur droite (resp. gauche), voir figure 2.12. La somme (2.31) se réécrit donc :

$$\tau(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \langle \emptyset_0 | \tilde{\Gamma}_+(\mathbf{p}) e^{\sum_{k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} g(k) : \psi_k \psi_k^* :} \tilde{\Gamma}_-(\mathbf{q}) | \emptyset_0 \rangle$$

qui a la forme de fonction tau voulue. Les fonctions tau de la forme (2.31) sont dites hypergéométriques, voir [OS01] ou encore [GJ08].

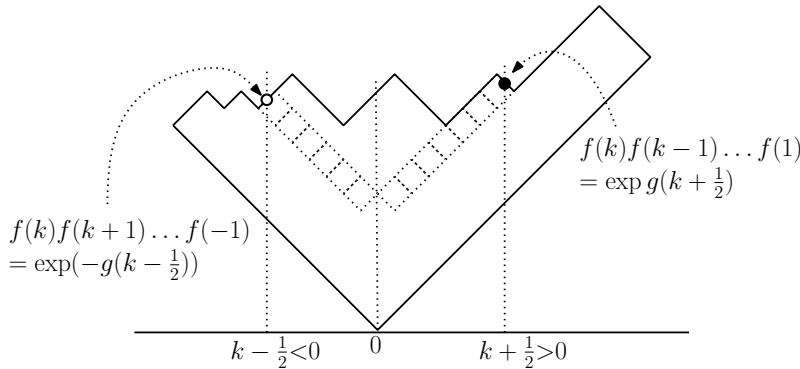


FIGURE 2.12 – Poids par particule permettant d'obtenir les poids multiplicatifs sur les contenus des cases.

### 3.7. — Conclusion à la section 3

Le but de cette section était de montrer à nos lecteurs et lectrices les aspects algébriques de l'énumération de cartes : le lien entre énumération de cartes et algèbre du groupe symétrique, puis théorie des représentations, puis espace de Fock, pour donner une idée de la puissance que donnent les relations de commutations entre les différents opérateurs naturels opérant sur cet espace.

On pourra s'étonner de la place importante que j'ai accordée à ces notions dans cette section introductive, dans la mesure où elles jouent un rôle marginal dans mon travail : elles interviennent surtout dans le chapitre 4, à titre de contexte ou au plus de boîte noire.



Ma motivation est double : d'une part, il me semblait utile de donner une introduction à ces notions sous une forme aisément accessible à un combinatoriste, et complémentaire des nombreuses références déjà existantes dans des styles plus complets, plus algébriques, ou plus proches de la physique. Mais surtout, l'ensemble de cette section représente en soi un programme de travail. Pour l'instant, tous les résultats issus de la combinatoire « fermionique » ne sont connectés aux cartes qu'au travers de théories non combinatoires. L'unification de ces combinatoires est une question naturelle, et tout ce que nous venons de voir dans ce chapitre, si l'on essaie de le voir sous la loupe de la combinatoire des cartes, représente en soi un vaste programme de recherche. Contrairement aux chapitres suivants qui présenteront du travail déjà fait, ce chapitre introductif parlait donc, principalement, de travail restant à faire.

#### 4. — BIJECTIONS ET CARTES ALÉATOIRES

La combinatoire bijective des cartes est devenue en l'espace de quelques dizaines d'années un champ d'activité extrêmement riche, notamment dans le cas planaire. Nous renvoyons aux articles [BF12a ; AP15] pour des avancées récentes, à l'article de survey [Sch15], ou à l'habilitation d'Éric Fusy [Fus15] puisque les habilitations sont faites pour être lues ! Ici, nous nous contenterons de présenter la bijection la plus utilisée et la plus fondamentale, car elle et ses variantes sous-tendent la plupart des résultats sur les cartes aléatoires : la bijection de Schaeffer pour les quadrangulations biparties. Nous évoquerons ensuite quelques aspects de la théorie des limites d'échelle de cartes, en préparation du chapitre 5.

##### 4.1. — Bijection des arbres étiquetés

Comme son nom ne l'indique pas, la bijection de Schaeffer de 1998 a d'abord été découverte par Cori et Vauquelin en 1981 [CV81]. Néanmoins, c'est bien Schaeffer dans sa thèse [Sch99] qui en a extrait la substance, permettant à la fois les généralisations futures et les applications probabilistes, dont la première [CS04] pour le profil des quadrangulations planaires. Stricto sensu nous allons présenter la version « pointée » de cette bijection, apparue plus tard. Nous allons la présenter dans le cas du genre supérieur, où elle est due à Marcus et Schaeffer [MS01 ; CMS09]<sup>11</sup>. En fait, nous allons aussi présenter une remarquable extension de cette bijection au cas « multipointé » en lien avec les tessellations de Voronoï des cartes, due à Miermont [Mie09]. Pour ne pas dire « bijection de Cori-Vauquelin-Schaeffer-Marcus-Miermont » qui est trop long, ni « bijection de Schaeffer », nous parlerons ici de *bijection des arbres étiquetés* bien que dans le cas de ses généralisations au genre supérieur ou multipointées, elle n'implique plus uniquement des arbres.

On dit qu'une carte est *étiquetée* si elle est munie d'une application de l'ensemble de ses sommets dans  $\mathbb{Z}$ , telle que les étiquettes de deux voisins diffèrent de 0, 1, ou  $-1$ . On considère ces objets à translation de toutes les étiquettes près. L'*étiquetage positif* de cette carte est l'unique étiquetage tel que l'étiquette minimum soit égale à 1. On peut l'obtenir à partir d'un étiquetage équivalent en ajoutant à toutes les étiquettes la quantité  $1 - \ell_{\min}$  où  $\ell_{\min}$  est l'étiquette minimale. Dans cette section toutes nos cartes sont enracinées. On appellera 2-bijection de  $A$  vers  $B$  une application surjective de  $A$  vers  $B$  telle que tout point de  $B$  a exactement deux antécédents.

11. Le travail de Marcus et Schaeffer est resté à l'état de manuscrit pendant de longues années. La seule référence publiée est donc mon article commun [CMS09] avec ces deux auteurs, dix ans plus tard, où la bijection est présentée dans sa version pointée et avec les applications aux schémas de rationalité. Certains auteurs accolent pour cette raison mon nom à cette bijection, mais c'est me faire trop d'honneur ! Je n'ai rien ajouté à la partie bijective de ce travail.

**Proposition 13** (Bijection des arbres étiquetés [CV81 ; Sch99 ; CS04 ; MS01 ; CMS09]).  
*Pour tout  $g, n$ , il existe une 2-bijection entre les quadrangulations biparties de genre  $g$  à  $n$  faces, munies d'un sommet marqué, et les cartes à une face étiquetées de genre  $g$  à  $n$  arêtes. De plus, cette bijection envoie naturellement les  $n + 1 - 2g$  sommets non pointés de la quadrangulation vers les  $n + 1 - 2g$  sommets de la carte à une face, de telle sorte que la distance au sommet pointé dans la quadrangulation devienne l'étiquette dans l'étiquetage positif dans la carte à une face.*

La bijection des arbres étiquetés procède comme suit. Étant donné une quadrangulation  $\mathbf{q}$  munie d'un sommet pointé  $v_0$ , on étiquette chaque sommet de la carte par sa distance à  $v_0$ . Par l'inégalité triangulaire, l'étiquette le long d'une arête varie d'au plus un, et par bipartition de la carte, elle ne peut varier de 0. Cela implique qu'il n'y a, à rotation près, que deux types de faces possible, voir la figure 2.13. On utilise alors les spectaculaires « règles de Schaeffer », voir encore la figure 2.13. Ces règles disent d'ajouter, dans chaque face de  $\mathbf{q}$ , une nouvelle arête, placée suivant les variations des étiquettes autour de la face. On note ensuite  $\mathbf{t}$  la carte formée de toutes les nouvelles arêtes, ainsi que de tous les sommets de  $\mathbf{q}$  sauf  $v_0$ . Par construction,  $\mathbf{t}$  est une carte étiquetée munie de son étiquetage positif, et les étiquettes représentent bien les distances dans  $\mathbf{q}$ . Il n'est pas évident que  $\mathbf{t}$  est connexe, ni que c'est une carte de genre  $g$ , ni qu'elle a une unique face : la démonstration est néanmoins élémentaire et repose sur la possibilité de construire un « arbre couvrant dual » de la carte, voir [CMS09 ; Cha09b] ou encore [BC11a].

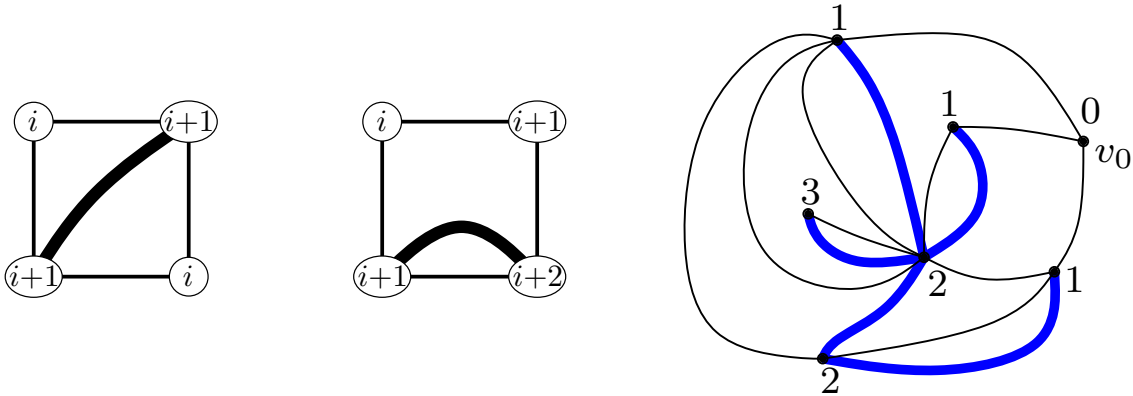


FIGURE 2.13 – **Bijection des arbres étiquetés et règles de Schaeffer.** (Gauche) Les variations d'étiquettes possibles autour d'une face dans une quadrangulation bipartie, à rotation près :  $(i, i + 1, i, i + 1)$  ou  $(i, i + 1, i + 2, i + 1)$  où  $i$  est l'étiquette minimum. Les règles de Schaeffer indiquent comment ajouter une arête nouvelle (en gras) à l'intérieur de chaque face. (Droite) Un exemple planaire complet, où l'on voit que la carte formée de toutes les nouvelles arêtes est un arbre (étiqueté).

La bijection des arbres étiquetés a des applications énumératives spectaculaires. Par exemple, dans le cas planaire, une carte à une face étiquetée n'est autre qu'un arbre (plan, enraciné), dont chaque arête est munie d'un « incrément » dans  $\{0, +1, -1\}$  qui décrit la variation de l'étiquette lorsque l'on s'éloigne de la racine. Puisqu'une quadrangulation planaire à  $n$  faces possède par la formule d'Euler,  $n + 2$  sommets, on démontre ainsi bijectivement la formule de Tutte :

$$Q_0(n) = \frac{2 \cdot 3^n}{n + 2} \text{Cat}(n),$$

où  $\text{Cat}(n)$  est le nombre de Catalan. En genre supérieur, l'application énumérative est un peu moins simple mais la bijection permet de retrouver une partie de la structure des séries génératrices, ainsi que les exposants de comptage asymptotique, voir [CMS09].

Nous présentons maintenant la généralisation « multi-pointée » de la bijection due à Miermont. Pour  $k \geq 1$ , une *quadrangulation bipartie  $k$ -pointée* est un uplet

$$(\mathfrak{q}; v_1, v_2, \dots, v_k; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k)$$

où  $\mathfrak{q}$  est une quadrangulation bipartie enracinée, où  $v_1, v_2, \dots, v_k$  sont  $k$  sommets distincts de  $\mathfrak{q}$  et où  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$  sont des entiers naturels, considérés à translation conjointe près (on peut fixer une classe d'équivalence en demandant que le ou les  $\delta_i$  minimaux vailent 0). La bijection de Miermont fonctionne comme la bijection de Schaeffer, sauf que pour le calcul des distances, les  $k$ -sommets pointés agissent en compétition les uns avec les autres : chacun tente de « s'emparer » des sommets dont il est le plus proche. De plus, cette compétition est perturbée par le choix des *délais*  $\delta_i$ , au sens où le  $i$ -ième sommet n'a le droit de commencer la compétition qu'après avoir attendu un temps  $\delta_i$ .

Pour que la bijection soit bien définie, on demande que deux contraintes techniques soient satisfaites :

$$\forall i, j, \quad d(v_i, v_j) \equiv \delta_i - \delta_j \pmod{2}, \quad (2.32)$$

$$\forall i \neq j \quad d(v_i, v_j) > |\delta_i - \delta_j|. \quad (2.33)$$

Formellement, la bijection de Miermont procède comme suit : on commence par étiqueter chaque sommet  $v$  de  $\mathfrak{q}$  par la quantité  $\ell(v)$  définie par :

$$\ell(v) := \min_{i \in [1..k]} d(v, v_i) + \delta_i. \quad (2.34)$$

On remarque ensuite que, comme pour la bijection de Schaeffer, seuls sont possibles après étiquetage les deux types de faces de la figure 2.13. On applique alors les règles de Schaeffer comme précédemment. On a :

**Proposition 14** (Bijection des arbres étiquetés, version multipointée). *Pour tout  $g \geq 0$ ,  $k \geq 1$ , la construction précédente est une 2-bijection entre les quadrangulations biparties  $k$ -pointées de genre  $g$  satisfaisant (2.32)-(2.33) et les cartes étiquetées de genre  $g$  à  $k$  faces, les faces étant numérotées de 1 à  $k$ . De plus, l'étiquette d'un sommet dans l'étiquetage positif de la carte à  $k$  faces correspond à l'étiquette (2.34) dans la quadrangulation. Enfin, si  $m_i$  est l'étiquette minimum dans la  $i$ -ième face de la carte à  $k$  faces, alors on a  $m_i - \delta_i = m_j - \delta_j$  pour tous  $i, j$ .*

La bijection a la propriété remarquable suivante. Si un sommet  $v$  de  $\mathfrak{q}$  est tel que le minimum dans (2.34) est atteint une unique fois, pour la valeur  $i \in [1..k]$ , alors  $v$  se situe à l'intérieur de la face numéro  $i$  dans la carte à  $k$  faces correspondante. Autrement dit, les  $k$  faces correspondent, si l'on néglige les sommets réalisant les cas d'égalité, à une partition des sommets de  $\mathfrak{q}$  en  $k$  parties, chacune correspondant aux sommets qui sont atteints par la  $i$ ème source, lors d'une exploration géodésique démarrée avec les délais  $\delta_i$ . Il est naturel d'appeler « cellules de Voronoï » ces  $k$  ensembles, par analogie avec les diagrammes de Voronoï Euclidiens habituels. C'est d'ailleurs pour étudier les tessellations de Voronoï des cartes Browniennes que Miermont a au départ introduit cette bijection [Mie09]. Nous reverrons les diagrammes de Voronoï apparaître au chapitre 5.

#### 4.2. — Cartes d'excès fini et schémas

La bijection des arbres étiquetés permet de comprendre beaucoup de choses sur le comportement asymptotique des cartes, que ce soit du point de vue énumératif ou probabiliste.

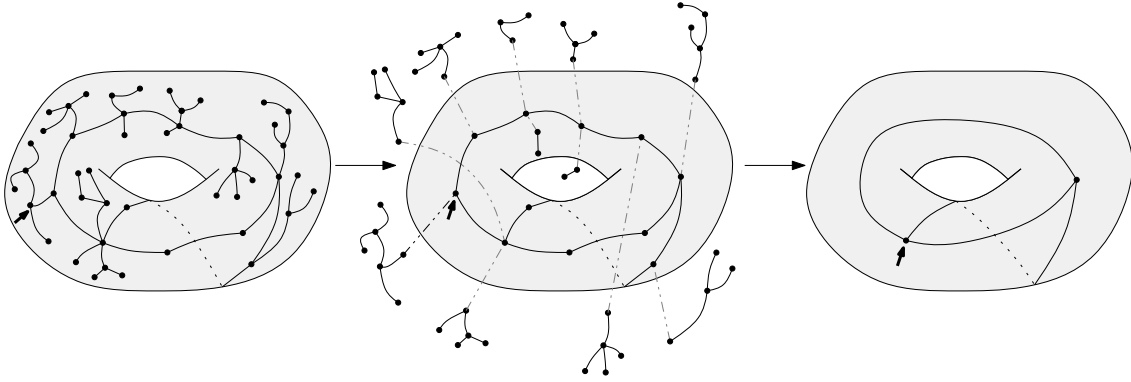


FIGURE 2.14 – Une carte et son schéma

Puisque cette bijection et ses variantes ramènent les quadrangulations à des cartes d'excès fixé<sup>12</sup>, commençons par des remarques élémentaires sur la structure de ces cartes, via la notion de schéma.

**Schémas.** Si  $M$  est une carte de genre  $g$  à  $k$  faces avec  $2g + k - 1 > 0$  (autrement dit,  $M$  n'est pas un arbre), on définit le *schéma* de  $M$  comme la carte obtenue à partir de  $M$  par les opérations successives suivantes :

- On efface toutes les feuilles (sommets de degré 1, de  $M$ ) et continue de le faire récursivement jusqu'à ce qu'il n'y ait plus que des sommets de degré au moins 2.
- On remplace chaque chaîne maximale de sommets de degrés 2 par une unique arête.

La figure 2.14 illustre la notion. Si  $M$  est enracinée, le schéma de  $M$  est naturellement muni d'une racine induite par celle de  $M$ .

Le schéma de  $M$  est donc une carte dont tous les sommets ont degré au moins 3, ce qui implique que pour  $g$  et  $f$  fixés, il n'y a qu'un nombre fini de schémas possibles (puisqu'il n'y a clairement qu'un nombre fini de *graphes* possibles avec excès fixé et degrés au moins 3).

Réciproquement, toute carte s'obtient à partir de son schéma en *remplaçant chaque arête par une chaîne d'arbres*. En introduisant la série génératrice  $T(x)$  des arbres plans :

$$T(x) = 1 + xT(x)^2,$$

on peut alors explicitement écrire la série génératrice des cartes de schéma donné comme une fraction rationnelle en  $T(x)$ , avec un dénominateur une puissance de  $(1 - xT(x)^2)$ . On peut de plus facilement analyser la singularité ce qui conduit à l'énoncé suivant (voir la dérivation explicite dans [Cha09b, p. 2.1.3], écrite dans le cas à une face, mais tous les arguments sont génériques).

**Proposition 15.** *Pour un schéma  $s$  à  $e(s)$  arêtes, le nombre de cartes enracinées de schéma  $s$  à  $n$  arêtes est asymptotique à :*

$$c_{e(s)} 4^n n^{\frac{1}{2}e(s)},$$

où  $c_{e(s)}$  est une constante que l'on pourrait calculer explicitement. En particulier à genre  $g$  et nombre de faces  $k$  fixés, la contribution dominante est donnée par les cartes maximisant  $e(S)$ . Ces cartes sont celles dont le schéma est cubique (tous les sommets de degré 3) et sont appelées *cartes dominantes*, elles sont telles que  $e(S) = 6g + 3k - 6$ .

12. L'excès d'une carte est le nombre d'arêtes en plus d'un de ses arbres couvrants, algébriquement c'est le premier nombre de Betti, ou encore la dimension de l'espace des cycles. Un carte de genre  $g$  à  $f$  faces a excès  $2g + f - 1$ , dans un contexte où le nombre de sommets ou d'arêtes tendent vers l'infini à  $g$  et  $f$  fixés, on parlera donc de cartes « d'excès fini ».

Les cartes dominantes seront importantes dans toutes les applications asymptotiques et probabilistes, notamment au chapitre 5. Elles ont aussi été importantes dans mon travail purement bijectif<sup>13</sup>.

### 4.3. — Quelques idées sur les grandes cartes aléatoires

**Point de vue métrique, topologie de Gromov-Hausdorff-Prokhorov.** On peut étudier les grandes cartes aléatoires, et plus généralement, les grands graphes, selon plusieurs points de vue. On peut par exemple s'intéresser à la loi du degré d'un sommet pris au hasard, ou au degré maximal (voir [GR94; GW00]). On peut également considérer des limites dites « locales », ce que nous ferons brièvement au chapitre 3 (Section 4) auquel nous reportons la discussion sur ce sujet. Le point de vue que nous décrirons ici est celui de l'étude des graphes ou cartes *renormalisées* vues comme des « espaces métriques compacts mesurés ».

En général, si  $G_n$  est un graphe aléatoire (dont le nombre de sommets et/ou d'arêtes tend vers l'infini avec  $n$ ), on choisira de voir « le graphe  $G_n$  » comme un espace métrique mesuré, à savoir comme le triplet

$$G_n \equiv (V(G_n), d_n, \mu_n)$$

où  $V(G_n)$  est l'ensemble des sommets de  $G_n$ , où  $d_n$  est la distance de graphe sur  $V(G_n)$ , et où  $\mu_n$  est la mesure uniforme sur  $V(G_n)$ . Un tel triplet<sup>14</sup> est appelé un *espace métrique mesuré*. La catégorie des espaces métriques mesurés compacts considérés à isométrie mesurée près est elle-même un espace métrique, pour la *distance de Gromov-Hausdorff-Prokhorov (GHP)*, voir [Mie09]. Dans les situations qui nous intéressent, le diamètre de nos graphes tend vers l'infini avec  $n$ , et nous considérerons les graphes *renormalisés*, ce qui pour nous voudra dire des espaces métriques mesurés de la forme :

$$(V(G_n), \frac{1}{n^\alpha} d_n, \mu_n)$$

où  $\alpha$  vaudra soit  $\frac{1}{2}$  (arbres et cartes d'excès fixé) soit  $\frac{1}{4}$  (cartes générales ou quadrangulations aléatoires). On s'assurera ainsi de garder des espaces de diamètre d'espérance finie qui auront un chance de converger (et de fait, convergeront) en loi pour la métrique GHP.

Démontrer des énoncés de convergence en loi pour la métrique GHP est en général quelque chose de difficile, qui requiert une compréhension probabiliste très fine des modèles. Plus simplement, ce type de convergence implique la convergence de lois finies-dimensionnelles telles que « la loi jointe des distances entre  $k$  points pris au hasard ». Les lecteurs ou lectrices qui seraient moins à l'aise avec la convergence en loi sur des espaces de dimension infinie peuvent garder ce point de vue en tête. D'ailleurs, pour la plupart des énoncés que nous considérerons dans ce mémoire, nous aurions pu conserver ce type de point de vue. La convergence GHP et l'existence d'objets limites nous donnera néanmoins un cadre naturel de formulation de certains résultats, ainsi qu'un support commode à l'intuition.

**Arbres aléatoires, CRT.** Un arbre plan enraciné de taille  $n$  (= une carte enracinée de genre 0 à une face et  $n$  arêtes) peut classiquement et bijectivement être encodé par un mot de Dyck. Un mot de Dyck aléatoire uniforme, qui n'est autre qu'une marche aléatoire de

13. Si par sensibilité beaucoup de bijectivistes ont une préférence pour les petites valeurs de  $n$ , il n'y a pas de raison intrinsèque à ce que la combinatoire bijective ne s'intéresse qu'aux problèmes de comptage exact. De fait, il est tout à fait possible de faire de la combinatoire bijective asymptotique, et c'est d'ailleurs ce que j'ai beaucoup fait.

14. nous ne rentrerons pas ici dans les considérations techniques pour lesquelles nous renvoyons à [Mie09].

longueur  $2n$  à pas  $\pm 1$  conditionnée à rester positive et à terminer en zéro, a une hauteur typique (et moyenne) de l'ordre de  $O(\sqrt{n})$ . Si on le normalise par un facteur  $2n$  en temps, et par un facteur  $\sqrt{n}$  en hauteur, il converge (en loi, pour par exemple la topologie de la norme infinie sur les fonctions continues à support compact) vers *l'excursion Brownienne normalisée*. À partir de l'excursion, il est possible de définir un objet limite appelé le *Continuum Random Tree (CRT)*, qui est à l'excursion Brownienne ce qu'un arbre est à son mot de Dyck (voir [Le 05]). Le CRT est la limite en loi, pour la topologie GHP, des arbres plans uniformes renormalisés, ce que l'on pourra écrire

$$\frac{1}{\sqrt{n}}T_n \xrightarrow{(d) \text{ GHP}} T_\infty$$

où  $\frac{1}{\sqrt{n}}T_n$  désigne l'espace métrique mesuré  $(V(T_n), \frac{1}{\sqrt{n}}d_n, \mu_n)$  avec les notations précédentes, et où  $T_\infty$  est le CRT. On retiendra que les arbres aléatoires ont des distances d'ordre  $O(\sqrt{n})$  et que correctement renormalisés ils convergent vers un objet limite explicite, bien décrit, et aujourd'hui très bien compris.

**Cartes d'excès fixé.** Pour  $g \geq 0$  et  $k \geq 1$  fixé, considérons  $M_n^{(g,k)}$  une carte enracinée aléatoire uniforme parmi celles ayant  $n$  arêtes, genre  $g$ , et  $k$  faces, avec  $(g, k) \neq (0, 1)$ . Une telle carte a excès  $2g + k - 1$ , qui reste fini quand  $n \rightarrow \infty$ . Il n'est pas très difficile de voir que dans une telle carte, les distances typiques sont d'ordre  $\sqrt{n}$  comme dans les arbres. On a de fait la convergence

$$\frac{1}{\sqrt{n}}M_n^{(g,k)} \xrightarrow{(d) \text{ GHP}} M_\infty^{(g,k)}$$

où  $M_\infty^{(g,k)}$  peut-être construite en choisissant *uniformément* un schéma dominant enraciné  $S$  de genre  $g$  à  $k$  faces, puis en greffant à la place de chaque arête  $e$  un CRT marqué de masse  $x_e$ , où le vecteur  $(x_e)_{e \in e(S)}$  suit une loi de Dirichlet de paramètre  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ . Cet énoncé et cette construction, qui ne sont pas difficiles, sont rappelés dans [Add+18].

Les cartes d'excès fixé n'ont guère été étudiées, en particulier parce qu'elles ne semblent à *première vue* pas très intéressantes (la question de la convergence en loi pour GHP par exemple, est assez claire, et leurs propriétés qualitatives également). Nous avons néanmoins été naturellement amenés à les considérer et à leur découvrir des propriétés remarquables comme nous le verrons au chapitre 5.

**Cartes Browniennes.** Nous abordons maintenant les cartes aléatoires générales, dont l'excès croît linéairement avec la taille, qui convergent vers la carte Brownienne, et qui sont généralement ce que l'on entend par « cartes aléatoires ». Nous formulerons ici les résultats pour les quadrangulations biparties mais ils s'appliquent, conjecturalement ou prouvablement, à de nombreux autres modèles aux constantes de normalisation près (voir par exemple [Le 13]).

Pour  $n, g \geq 0$ , soit  $\mathbf{q}_n^{(g)}$  une quadrangulation bipartie aléatoire uniforme de genre  $g$  à  $n$  faces, choisie uniformément, et  $\mathbf{d}_n, \mu_n$  respectivement la distance de graphe et la mesure uniforme sur les sommets.

La carte étiquetée associée par la bijection des arbres étiquetés,  $\mathbf{t}_n^{(g)}$ , est une carte d'excès fini. Heuristiquement, il est tentant de penser que dans cette carte d'excès fini les distances sont de l'ordre de  $O(\sqrt{n})$ , et que les étiquettes se comportent comme les valeurs d'une marche aléatoire de longueur  $O(\sqrt{n})$ , et donc sont d'ordre  $O(n^{1/4})$ . Rappelons que ces étiquettes correspondent, via la bijection, aux distances à la racine dans la carte  $\mathbf{q}_n^{(g)}$ . Il est possible de donner un sens à ces heuristiques et de montrer, qu'en effet, la distance maximale à la racine dans  $\mathbf{q}_n^{(g)}$  est d'ordre  $O(n^{1/4})$ , voir par exemple [CS04] ([Cha10] en genre plus grand) pour les premiers résultats en ce sens.

La convergence en loi de  $\mathbf{q}_n^{(g)}$  pour GHP est une question *beaucoup* plus difficile, puisque la bijection des arbres étiquetés n’encode pas de manière évidente les distances entre les sommets non racine. Elle a été démontrée par Miermont [Mie13] et Le Gall [Le 13] indépendamment en 2012, pour le genre 0 dans des articles célèbres. Le cas du genre  $g \geq 1$  a été annoncé dans [BM]. On dispose<sup>15</sup> donc aujourd’hui du résultat de convergence :

$$(\mathbf{q}_n^{(g)}, \frac{1}{n^{1/4}} \mathbf{d}_n, \mu_n) \xrightarrow{(d) \text{ GHP}} (\mathbf{q}_\infty^{(g)}, d_\infty, \mu_\infty),$$

en distribution pour la topologie de GHP, où  $(\mathbf{q}_\infty^{(g)}, d_\infty, \mu_\infty)$  est *la carte Brownienne de genre  $g$* , objet construit dans le continu à partir d’une adaptation de la bijection des arbres étiquetés.

De nombreuses propriétés de la carte Brownienne sont connues, par exemple sa dimension de Hausdorff est presque sûrement quatre [Le 07 ; Bet10], sa topologie est celle d’une surface de genre  $g$  ([LP08] ou [Mie08b] pour le genre 0, [Bet12] en genre plus grand) ce qui montre en particulier qu’elle dépend du genre. Bien que ces considérations probabilistes fines dépassent le cadre de notre travail combinatoire, nous serons amenés à révéler de mystérieuses propriétés des cartes Browniennes en lien avec les hiérarchies intégrables évoquées en section précédente, au chapitre 5.

Notons également qu’une approche très puissante, travaillant directement dans le continu, à la carte Brownienne, est en cours de développement par Miller et Sheffield, voir par exemple [MS15] et les papiers suivants des mêmes auteurs. À ce stade notre travail n’interagit pas avec ces approches (qui d’ailleurs pour l’instant sont principalement développées en genre 0). Nous terminerons ici notre aperçu des cartes aléatoires avec une image :

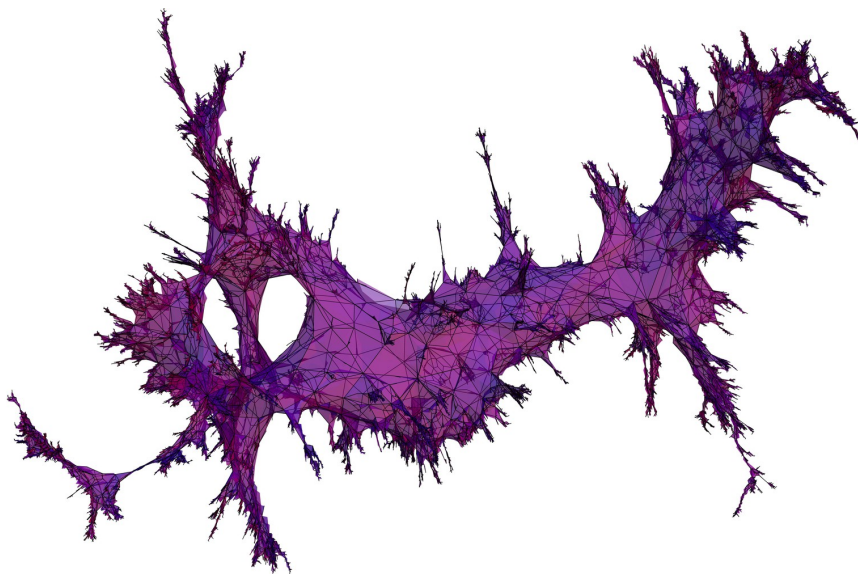


FIGURE 2.15 – Une « carte Brownienne de genre 2 », ou plus précisément une très grande quadrangulation bipartite aléatoire de genre 2, plongée dans  $\mathbb{R}^3$  par un algorithme de type « attraction ressorts/répulsion électrostatique » (puis dans  $\mathbb{R}^2$  pour impression!). Image due à Jérémie Bettinelli. Pour les algorithmes de génération utilisés, voir [Cha09b].

15. Le papier [BM] n’étant pas publié, les plus sceptiques de nos lecteurs et lectrices pourront préférer parler, pour  $g > 0$ , de l’existence de cartes Browniennes de genre  $g$ . En effet, la convergence de sous-suites a été démontrée dans [Mie09].





# Sur les cartes à une face [Cha10 ; Cha11 ; CFF13 ; Ang+13 ; BC11b]

*Mais il était ici, rangé dans ma serviette,  
Entre mon rouge à lèvres et l'étui à lunettes!*

*Solange (Françoise Dorléac),  
Les demoiselles de Rochefort, Jacques Demy.*

Nous commencerons notre parcours dans les propriétés énumératives des cartes de genre supérieur par les cartes à une face<sup>1</sup>. Cette classe de carte est la seule (avec les cartes planaires, mais notre point de vue dans tout ce document sera de se concentrer sur le genre supérieur) pour laquelle on peut dire que le programme général consistant à unifier la théorie énumérative, au moyen d'une description complète de la combinatoire des objets (autrement dit, d'avoir un point de vue bijectif unifié sur l'ensemble des formules existantes) est réalisé. Ce chapitre est principalement basé sur la série d'articles [Cha10 ; Cha11 ; CFF13 ; BC11b] dont les deux premiers sont issus de ma thèse [Cha09b]. Plus précisément :

- En section 1 nous présentons brièvement les cartes à une face.
- En section 2 nous rappelons la notion de trisection issue de ma thèse [Cha10 ; Cha11] puis la bijection qui en découle et qui permet de compter bijectivement les cartes à une face de genre fixé de manière partiellement récursive. Nous présentons ensuite en section 3 un travail effectué avec Valentin Féray et Éric Fusy en 2013 [CFF13] qui déchiffre la combinatoire de cette récursivité pour arriver aux arbres  $C$ -décorés. C'est grâce à ce travail que l'on peut considérer la question de l'énumération bijective des cartes à une face comme résolue. Nous en présenterons en section 4 une plaisante application probabiliste avec l'identification de la limite locale des cartes à une face aléatoires de genre linéaire, issue de [Ang+13].
- En section 5 je décris l'extension du cas cubique (ou du cas asymptotique) de la bijection précédente au cas nonorientable. Cette section est basée sur le travail [BC11b] commun avec Olivier Bernardi et a permis d'obtenir, outre de jolis résultats exacts, les premières formules d'énumération asymptotique pour ces objets.

---

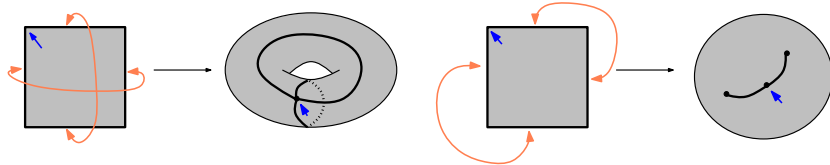
1. Les cartes à une face sont aussi appelées *cartes unicellulaires*, terminologie que nous n'utiliserons pas ici.

Pour les sections 1,2,3,4 et selon la convention adoptée partout dans ce document, nous nous en tiendrons au cas *orientable* sans néanmoins le préciser.

1. — SUR LES CARTES À UNE FACE

Une carte à une face est, comme son nom l'indique, une carte (comme définie au chapitre précédent) ayant une unique face. La manière la plus simple de concevoir un tel objet est de le voir comme une surface formée par le recollement bord-à-bord des arêtes d'un polygone, comme sur la figure 3.1. De manière équivalente, mais souvent plus pratique à étudier, une carte à une face à  $n$  arêtes est la donnée d'un multigraphe à  $n$  arêtes muni d'un ordre cyclique de ses demi-arêtes autour de chaque sommet (l'ordre « clockwise »), tel que le parcours effectué en longeant le bord des arêtes de la carte et en tournant selon cet ordre autour des sommets, visite tous les coins de la carte, voir la figure 3.2. Ce parcours n'est autre que le « tour » autour du polygone dans la représentation polygonale. On rappelle que, dans l'une ou l'autre des représentations, nos cartes sont enracinées, c'est à dire munies d'un coin distingué représenté par une flèche sur les figures.

FIGURE 3.1 – Deux cartes à une face à 2 arêtes, de genres respectifs 1 et 0, vues comme recollements de polygones.



Les cartes à une face ont fait l'objet de très nombreux travaux énumératifs, et de nombreuses formules explicites ont été obtenues, par différentes méthodes, pour différents problèmes de comptage concernant ces objets et leurs variantes. Si l'on tient (comme ici) à adopter un point de vue strictement combinatoire, il est important de noter que ces formules peuvent être séparées en deux catégories, suivant que le genre des cartes est contrôlé de manière explicite, ou bien de manière pondérée sous la forme d'une série génératrice.

Ces formules pondérées sont celles que l'on obtient les plus naturellement par des méthodes non purement combinatoires. La plus célèbre d'entre elles est la formule de Harer et Zagier [HZ86] obtenue via la connexion avec les intégrales de matrices, qui donne le nombre  $\epsilon_g(n)$  de cartes à une face enracinées de genre  $g$  à  $n$  arêtes par sa série pondérée :

$$\sum_{g \geq 0} \epsilon_g(n) q^{n+1-2g} = (2n-1)!! \sum_{i \geq 1} 2^{i-1} \binom{n}{i-1} \binom{q}{i}. \quad (3.1)$$

Cette formule a ensuite été retrouvée par la théorie des représentation du groupe symétrique et de nombreuses variantes obtenues [HZ86 ; Jac88 ; Zag95 ; GS98 ; PS02] (voir également l'appendice par Zagier du livre [LZ04] pour une présentation logiquement minimale de la théorie nécessaire). Ces formules s'interprètent bijectivement en termes d'énumération de cartes coloriées dont le genre n'est pas fixé, et des preuves bijectives très satisfaisantes sont connues, voir [Las01 ; GN05 ; SV08 ; MV09] et le magnifique [Ber12].

L'autre famille<sup>2</sup> de formules concerne des cartes dont le genre, fixé, est un paramètre explicite de la formule. La première telle formule a été obtenue par Lehman et Walsh, qui

2. La division entre deux catégories de formules est partiellement artificielle. Ainsi, il est souvent trivial par le calcul de transformer une formule d'un type en l'autre. Mais du point de vue de la combinatoire pure, on se retrouve alors face à des questions très différentes !

furent les premiers<sup>3</sup> à s'intéresser à l'énumération de cartes de genre supérieurs dans une série d'articles fondateurs [WL72a ; WL72b ; WL75]. À l'aide de méthodes relativement élémentaires et de calculs remarquables, Lehman et Walsh ont obtenu une formule close pour le nombre de cartes à une face de genre et nombre d'arête fixés, sous la forme d'un polynôme explicite de degré  $3g$  fois un nombre de Catalan :

$$\epsilon_g(n) = \frac{(2n)!}{n!(n+1-2g)!2^{2g}} \sum_{\gamma \vdash g} \frac{(n+1-2g)^\ell}{\prod_i m_i!(2i+1)^{m_i}} \text{Cat}(n), \quad (3.2)$$

où  $(x)_k = \prod_{j=0}^{k-1} (x-j)$ ,  $\ell$  est le nombre de parts de  $\gamma$ , et  $m_i$  est le nombre de parts égales à  $i$  dans  $\gamma$ , la somme étant prise sur les partitions  $\gamma$  de  $g$ . D'autres formules ont été obtenues en utilisant la théorie des représentations, permettant de contrôler plus de paramètres, notamment les très riches formules données dans [GS98 ; PS02] pour les cartes de degrés fixés. Citons aussi la forme récursive de la Harer-Zagier (voir (3.6) ci-dessous). Ces formules où le genre apparaît de manière explicite sont plus difficiles à comprendre du point de vue purement combinatoire, malgré l'intérêt que pourrait avoir leur compréhension, non seulement pour les applications probabilistes mais aussi en raison de l'importance des cartes à une face dans la théorie des cartes de genre fixé en général que l'on abordera au prochain chapitre.

Ma contribution principale au domaine est d'avoir, avec mes coauteurs, donné les outils permettant de décrire la combinatoire des cartes de genre fixé, et en particulier de comprendre toutes les formules de cette deuxième catégorie. En fait, la description que l'on obtient avec les arbres C-décorés est si simple qu'elle permet également de comprendre simplement toutes les formules concernant les cartes à une face coloriées. Elle donne donc une réponse unifiée très satisfaisante à la question de la compréhension bijective des cartes à une face en général. Cela s'est fait en deux étapes, avec les articles [Cha11] puis [CFF13], que nous présentons dans les deux prochaines sections.

## 2. — LA BIJECTION DES TRISECTIONS [Cha11]

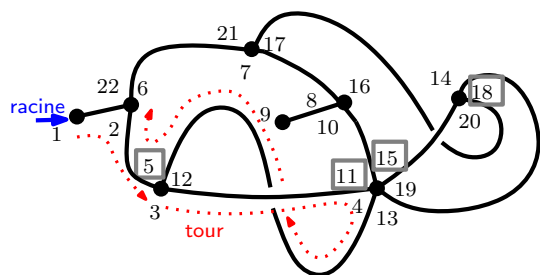


FIGURE 3.2 – Une carte à une face de genre 2. En suivant le tour (dont le début est indiqué en pointillés) on visite tous les coins de la carte. Les coins sont ici numérotés par ordre de parcours et les étiquettes des trisections sont encadrées.

Nous présentons maintenant la notion de trisection et la bijection de [Cha11]. Les figures 3.2 et 3.3 joueront dans notre présentation un rôle prépondérant.

Étant donnée une carte à une face enracinée à  $n$  arêtes, numérotons ses coins de 1 à  $2n$  dans l'ordre de parcours horaire autour de l'unique face, comme sur la figure 3.2. Soit  $v$  un sommet de  $M$  de degré  $k \geq 1$ , et soit  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  la suite des étiquettes de ses coins incidents, en ordre antihoraire autour de  $v$ , en commençant au minimum  $a_1 = \min a_i$ . Si

3. Les travaux de Lehman et Walsh sont trop souvent oubliés de la littérature récente (et je fais ici mon mea culpa, ayant moi-même fortement négligé ces références dans mes premières années de recherche). Ainsi, la formule de Harer et Zagier (1986) n'est en fait qu'une redécouverte de celle de Lehman et Walsh (1972) (ce qui n'enlève rien à la profondeur des résultats de [HZ86] qui vont bien au delà de l'énumération de cartes!). Par ailleurs, ce que l'on appelle souvent les «équations de Tutte» en genre supérieur (dues à Tutte dans le cas planaire) ont été écrites pour la première fois par Lehman et Walsh.

pour un certain  $j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$ , on a  $a_{j+1} < a_j$ , on dit alors que le coin de  $v$  étiqueté  $a_{j+1}$  est une *trisection* de  $M$ . Une manière équivalente de définir les trisections est de considérer l'ensemble des coins de  $M$  qui sont des *descentes* au sens où ils sont précédés d'un coin d'étiquette supérieure ou égale en sens antihoraire. Chaque sommet contient au moins un tel coin, celui qui porte l'étiquette minimum. Les trisections sont précisément les descentes qui ne sont pas de cette forme.

La figure 3.2 montre une carte de genre deux ayant quatre trisections. Plus généralement on a le lemme suivant, pris à ma thèse :

**Lemme 16** (Lemme des trisections [Cha11]). *Une carte à une face de genre  $g$  a exactement  $2g$  trisections.*

L'objet de ce document n'est pas de donner des démonstrations, mais évoquons tout de même celle du lemme qui est presque immédiate.

*Démonstration.* Si l'on note  $n_-$  le nombre de coins qui sont des descentes,  $n_+ = 2n - n_-$  le nombre d'autres coins, et  $\tau$  le nombre de trisections, alors puisque chaque sommet contient exactement une descente qui n'est pas une trisection (celle allant vers son minimum) on a  $n_- = \tau + v$  où  $v = n + 1 - 2g$  est le nombre de sommets par la formule d'Euler. Il reste à voir par un examen de la variation *locale* des étiquettes autour d'une arête, que chaque arête induit exactement une montée et une descente, sauf l'arête racine qui contient deux descentes. On a donc  $n_- = n_+ + 2$ , ce qui donne assez d'équations pour éliminer  $n_+, n_-$ , et trouver  $\tau$ .  $\square$

On notera qu'une carte à une face de genre 0 n'a pas de trisection, ce qui est par ailleurs très clair graphiquement : lorsque l'on longe le tour d'un arbre en sens horaire, on tourne toujours dans le même sens autour de chaque sommet et la seule descente est celle qui va vers le coin minimum. La présence d'une trisection cache donc une sorte «d'entrelacement» non planaire de la carte. Très informellement, on peut voir les  $2g$  trisections comme une réalisation combinatoire locale des  $2g$  anses de la surface, et il est naturel de vouloir s'en servir pour découper la carte de manière canonique et ainsi faire décroître son genre. Le résultat suivant était la principale innovation bijective de ma thèse :

**Théorème 1 ([Cha11] – Bijection des trisections).** *Notons  $\mathcal{E}_g(n)$  l'ensemble des cartes à une face enracinées de genre  $g$  et pour  $k \geq 1$ , notons  $\mathcal{E}_g^{(2k+1)}(n)$  l'ensemble des telles cartes où un sous-ensemble de  $(2k+1)$  sommets est distingué. Alors pour  $g > 0$  et  $n \geq 1$ , on a une bijection :*

$$2g \mathcal{E}_g(n) \simeq \mathcal{E}_{g-1}^{(3)}(n) + \mathcal{E}_{g-2}^{(5)}(n) + \mathcal{E}_{g-3}^{(7)}(n) + \dots + \mathcal{E}_0^{(2g+1)}(n), \quad (3.3)$$

*où dans le membre de gauche  $2g \mathcal{E}_g(n)$  représente l'ensemble des éléments de  $\mathcal{E}_g(n)$  portant une trisection marquée. De plus, si  $M$  et  $(M', S')$  sont en correspondance, le graphe sous-jacent de  $M$  est obtenu à partir de celui de  $M'$  en identifiant les sommets de  $S'$  en un seul sommet.*

La bijection sous-jacente à ce théorème, qui consiste à itérer une certaine opération de découpage de la carte, est résumée sur la figure 3.3(a-b).

## 2.1. — Commentaires et corollaires

Le premier corollaire énumératif de la construction précédente est la :

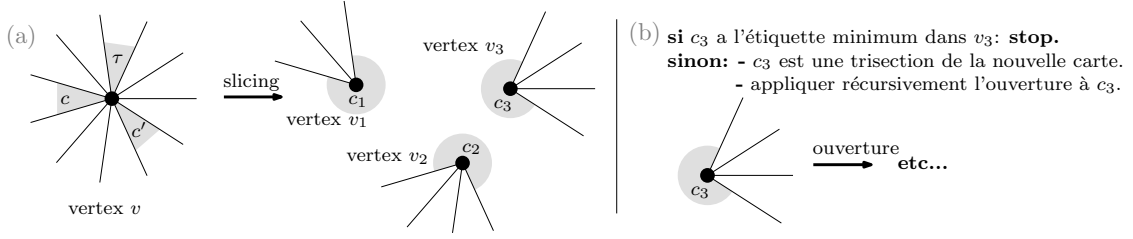


FIGURE 3.3 – (a) Étant donné une trisection  $\tau$ , on considère le coin  $c$  d'étiquette minimum autour du sommet, et  $c'$  le coin d'étiquette minimum apparaissant entre  $c$  et  $\tau$  dont l'étiquette dépasse celle de  $\tau$ . « L'ouverture » de la trisection donne naissance à trois nouveaux sommets  $v_1, v_2, v_3$ , de coins distingués  $c_1, c_2, c_3$ . (b) La bijection récursive des trisections : si  $c_3$  a l'étiquette minimum dans  $v_3$ , on s'arrête ; sinon, on montre [Cha11] que  $c_3$  est une trisection de la nouvelle carte  $M'$  ; dans ce cas, on itère alors l'opération d'ouverture sur la carte  $(M', c_3)$ . À la fin de l'opération, si  $k \geq 1$  est le nombre d'itérations effectuées, on obtient une carte de genre  $g - k$  avec  $2k + 1$  sommets résultant des ouvertures successives, et l'on peut montrer que ces sommets peuvent être « recollés » d'une unique manière pour reconstruire la configuration de départ.

**Théorème 2 ([Cha11] – Récurrence des trisections).** *Le nombre  $\epsilon_g(n)$  de cartes à une face enracinées à  $n$  arêtes satisfait :*

$$2g\epsilon_g(n) = \binom{n+3-2g}{3}\epsilon_{g-1}(n) + \binom{n+5-2g}{5}\epsilon_{g-2}(n) + \cdots + \binom{n+1}{2g+1}\epsilon_0(n), \quad (3.4)$$

où  $\epsilon_0(n) = \text{Cat}(n)$  qui compte les arbres plans, est le  $n$ -ième nombre de Catalan.

Étonnamment, malgré la quantité de formule connues sur ces objets, cette version récursive n'avait jamais été remarquée.

En itérant la bijection des trisections, on voit que toute carte à une face de genre  $g$  peut s'obtenir à partir d'un arbre plan par des recollements successifs d'ensembles impairs de sommets. Du point de vue énumératif on obtient une preuve bijective du résultat suivant :

**Proposition 17.** *On a  $\epsilon_g(n) = R_g(n)\text{Cat}(n)$  où  $R_g(n)$  est un polynôme de degré  $3g$  à coefficients rationnels divisible par  $(n+1)_{(2g+1)}$ .*

On notera que (3.4) donne un moyen efficace de calculer les  $R_g(n)$ .

La récurrence permet également de traiter le cas asymptotique à genre fixé, chronologiquement traité d'abord avec la construction plus faible de l'article [Cha10]. Pour  $g \geq 1$  fixé, considérons un élément aléatoire uniforme  $M$  de  $\mathcal{E}_g(n)$ . Alors avec probabilité tendant vers 1, le schéma de  $M$  (voir Section 4) est cubique, ce qui implique que l'ouverture de chacune de ses trisections conduit à une carte  $M'$  de genre  $g - 1$  avec trois sommets marqués. On appelle *séquence d'ouverture* une suite  $M = M_g, M_{g-1}, \dots, M_0$  où  $M_{i-1}$  s'obtient à partir de  $M_i$  en ouvrant une telle trisection. De manière équivalente, une séquence d'ouverture est donc le choix d'une trisection à ouvrir dans chacune des cartes  $M_g, \dots, M_1$ . D'après ce que l'on vient de dire, presque toutes les cartes de  $\mathcal{E}_g(n)$  ont au moins une séquence d'ouverture, et plus précisément par le lemme des trisections presque toutes ont exactement  $(2g)(2g-2)\dots 2 = 2^g g!$  séquences d'ouverture.

**Théorème 3 ([Cha10] – Structure asymptotique des cartes à une face).** *Pour  $g \geq 1$  fixé, il y a une bijection asymptotique quand  $n$  tend vers l’infini<sup>a</sup> entre l’ensemble des cartes à une face de genre  $g$  à  $n$  arêtes munies d’une séquence d’ouverture et l’ensemble des arbres plans à  $n$  arêtes munis d’un  $g$ -uplet d’ensembles de trois sommets marqué.*

*Puisque presque toutes les cartes ont  $2^g g!$  séquences d’ouverture, on a :*

$$\epsilon_g(n) \sim \frac{1}{2^g g!} \binom{n+1}{3, 3, \dots, 3, n+1-3g} \text{Cat}(n) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi} 12^g g!} n^{3g-\frac{3}{2}} 4^n. \quad (3.5)$$

a. Une bijection asymptotique quand  $n$  tend vers l’infini, entre deux ensemble  $A$  et  $B$  indexés par  $n$ , est une bijection entre deux sous-ensembles  $A' \subset A$  et  $B' \subset B$  tels que  $|A'|/|A| = 1 - o(1)$  et  $|B'|/|B| = 1 - o(1)$ .

Cette formule asymptotique est due à Bender, Canfield et Richmond [BCR93], et on en obtient ici une preuve bijective claire. Nous reverrons au chapitre 5 plus d’applications asymptotiques et probabilistes de la bijection.

### 3. — LA BIJECTION DES ARBRES $C$ -DÉCORÉS [CFF13]

En itérant la bijection des trisections, on voit que toute carte à une face peut s’obtenir à partir d’un arbre plan en recollant des sommets. Informellement, une carte à une face peut donc se voir comme une paire formée d’un arbre plan et d’une certaine « structure » encodant l’historique des recollements. Les formules énumératives et notamment la formule de Lehman-Walsh (3.2) suggèrent fortement que cette structure peut se décrire de manière simple. C’est effectivement le cas, comme nous l’avons compris avec Éric et Valentin dans l’article [CFF13] qui repose sur l’introduction des arbres  $C$ -décorés et des  $C$ -permutations.

Une *permutation à cycles signés* est une permutation dans laquelle chaque cycle porte un signe, soit  $+$  soit  $-$ . Une  *$C$ -permutation* est une permutation à cycles signés dans laquelle tous les cycles sont de longueur impaire, voir la figure 3.4(a). Pour toute  $C$ -permutation  $\sigma$  sur  $n$  éléments, le *rang* de  $\sigma$  est  $r(\sigma) = n - \ell(\sigma)$ , où l’on rappelle que  $\ell(\sigma)$  est le nombre de cycles de  $\sigma$ . Remarquons que  $r(\sigma)$  est pair puisque tous les cycles ont longueur impair. Le *genre* de  $\sigma$  est défini comme la quantité  $g(\sigma) = r(\sigma)/2$ .

Un *arbre  $C$ -décoré* à  $n$  arêtes est une paire  $\gamma = (T, \sigma)$  où  $T$  est un arbre plan (enraciné) à  $n$  arêtes et  $\sigma$  est une  $C$ -permutation sur  $n + 1$  éléments. Le *genre* de  $\gamma$  est défini comme le genre de la  $C$ -permutation  $\sigma$ . Remarquons que les sommets de  $T$  peuvent être canoniquement étiquetés (par exemple par un parcours autour de l’arbre partant de la racine), on peut donc voir  $\sigma$  comme une permutation des  $n + 1$  sommets de  $T$  (ce que nous ferons, comme sur la figure 3.4(c)). Le *graphe sous-jacent* de  $\gamma$  est le graphe  $G$  obtenu à partir de  $T$  en contractant en un unique sommet les sommets dans chacun des cycles de  $\sigma$ , voir la figure 3.4(d). On remarque que les sommets de  $G$  sont en bijection avec les cycles de  $\sigma$ .

Le résultat suivant est le principal résultat de ce chapitre :

**Théorème 4 ([CFF13] – bijection des arbres  $C$ -décorés).** *Pour  $n \geq 1$  et  $g \geq 0$ , soit  $\mathcal{T}_g(n)$  l’ensemble des arbres  $C$ -décorés à  $n$  arêtes de genre  $g$ . il existe une bijection qui réalise :*

$$2^{n+1} \mathcal{E}_g(n) \simeq \mathcal{T}_g(n).$$

*De plus cette bijection préserve le graphe sous-jacent des objets, c’est-à-dire que le graphe sous-jacent d’une carte à une face de genre  $g$  est obtenu en contractant en un*

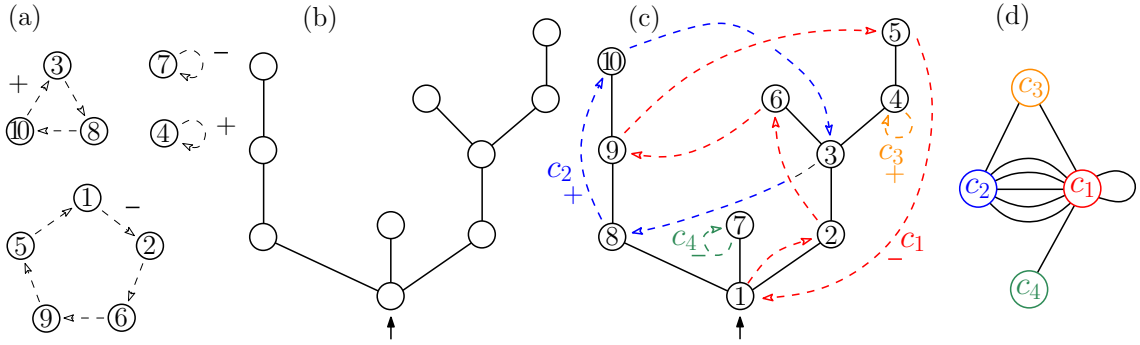


FIGURE 3.4 – (a) Une  $C$ -permutation  $\sigma$ . (b) Un arbre plan  $T$ . (c) L'arbre  $C$ -décoré  $(T, \sigma)$ . (d) Son graphe sous-jacent.

seul sommet chaque cycle de la  $C$ -permutation dans l'arbre  $C$ -décoré qui lui correspond.

La démonstration du théorème 4 est extrêmement simple. La bijection des trisections nous dit déjà que tout élément de  $\mathcal{E}_g(n)$  s'obtient à partir d'un arbre en recollant des sommets. Il suffit alors de voir que les  $C$ -permutations encodent exactement la « trace » de cette ouverture. Pour cela, il suffit de vérifier que les  $C$ -permutations vérifient, elles aussi, la récurrence des trisections. Autrement dit, les  $C$ -permutations « résolvent combinatoirement » la récurrence des trisections :

**Lemme 18.** *L'ensemble  $\mathcal{C}_g(n)$  des  $C$ -permutations de genre  $g$  sur  $n$  éléments vérifie la récurrence combinatoire :*

$$2g \mathcal{C}_g(n) \simeq \mathcal{C}_{g-1}^{(3)}(n) + \mathcal{C}_{g-2}^{(5)}(n) + \mathcal{C}_{g-3}^{(7)}(n) + \dots + \mathcal{C}_0^{(2g+1)}(n)$$

où  $\mathcal{C}_g^{(k)}$  désigne l'ensemble des éléments de  $\mathcal{C}_g(n)$  ayant  $k$  cycles distincts marqués.

*Idée de démonstration.* Un élément non-minimal dans une  $C$ -permutation  $\sigma$  est un élément qui n'est pas le minimum dans son cycle. Si  $\sigma$  est de genre  $g$ , elle a  $2g$  éléments non minimaux, il suffit donc de voir que les  $C$ -permutations avec un élément non-minimal marqué sont en bijection avec les  $C$ -permutations de genre inférieur avec un nombre impair  $\geq 3$  de cycle marqués. Cela se fait très simplement en concaténant les cycles marqués, ordonnés par minimums décroissants, nous renvoyons à [CFF13] pour les détails.  $\square$

Le lemme (et plus précisément, sa démonstration, qui n'utilise que des recollements de cycles) implique directement, par récurrence, que les arbres  $C$ -décorés satisfont la récurrence du théorème 1. On en déduit facilement par induction l'existence de la bijection annoncée dans le théorème 4. On utilise pour cela le fait que si l'on a une bijection  $2gA \simeq 2gB$  pour deux ensembles finis  $A$  et  $B$  et  $g \geq 1$ , il existe une bijection  $A \simeq B$  qui s'obtient par *oracle* à partir de la précédente. Cela découle du théorème de Hall qui assure que tout graphe biparti régulier admet un couplage parfait, voir [CFF13] pour les détails.

### 3.1. — Corollaires et commentaires

Du point de vue énumératif, la bijection des arbres  $C$ -décorés permet de démontrer bijectivement, et très simplement, toutes les formules connues sur les cartes à une face générales et biparties<sup>4</sup>. Dans l'article [CFF13], nous donnons ainsi des démonstration

4. Il reste, bien sûr des questions ouvertes, notamment le cas des constellations ou des cartes étiquetées de « type Hurwitz », ou encore la magnifique formule de [BZ10] qui généralise le théorème matrix-tree en tout genre.

unifiées et purement combinatoires de nombreuses formules connues sur ces objets. Nous en décrivons ici quelques unes.

Une C-permutation de genre  $g$  a, en plus de ses  $n + 1 - 2g$  points fixes, un type cyclique de la forme  $(2\gamma_i + 1)_{i=1\dots\ell(\gamma)}$  où  $\gamma$  est une partition de  $g$ . Puisqu'il est facile de compter le nombre de permutations de type cyclique donné, en sommant sur les  $\gamma$  possibles, on obtient une expression explicite des polynômes  $R_g(n)$  ci-dessus, c'est la formule de Lehman et Walsh (3.2), la première démontrée historiquement sur les cartes à une face, qui obtient ainsi une preuve bijective on ne peut plus claire.

Une autre formule célèbre est la formule de récurrence de Harer et Zagier, qui est facilement équivalente à la formule (3.1) mais combinatoirement très différente. Pour  $g = 0$  ce n'est autre que la récurrence de Rémy [Rém85], pour laquelle ce dernier a donné une interprétation bijective très utile pour les applications probabilistes et la génération aléatoire. Grâce aux arbres C-décorés, on met les deux formules sous le même toit et on obtient une preuve bijective « à la Rémy » de la formule de Harer et Zagier.

**Proposition 19** (Récurrence de Harer et Zagier [HZ86 ; LZ04]). *Les nombres  $\epsilon_g(n)$  satisfont la récurrence suivante, valide pour  $g \geq 0$  et  $n \geq 1$  (avec  $\epsilon_0(0)=1$  et  $\epsilon_g(n)=0$  si  $g < 0$  ou  $n < 0$ ) :*

$$(n + 1)\epsilon_g(n) = 2(2n - 1)\epsilon_g(n - 1) + (n - 1)(2n - 1)(2n - 3)\epsilon_{g-1}(n - 2). \quad (3.6)$$

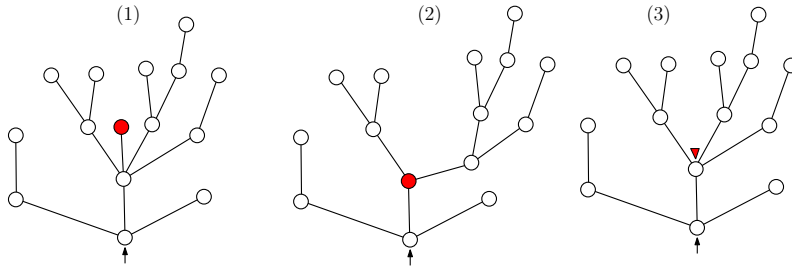


FIGURE 3.5 – La bijection de Rémy pour les arbres plans, où l'on distingue deux cas : (1) le sommet marqué est une feuille ; (2) le sommet marqué n'est pas une feuille. (3) L'arbre obtenu après contraction du sommet marqué dans l'un et l'autre cas, et le coin marqué permettant d'inverser la construction.

*Démonstration à la Rémy, voir [CFF13].* En genre 0, où  $\epsilon_0(n) = \text{Cat}(n)$  est le nombre d'arbres plans enracinés à  $n$  arêtes, la formule s'écrit

$$(n + 1)\epsilon_0(n) = 2(2n - 1)\epsilon_0(n - 1). \quad (3.7)$$

Dans le membre de gauche, on compte des arbres portant un sommet marqué, et dans le membre de droite on compte, deux fois, les arbre de taille inférieure avec un coin marqué. Or étant donné un arbre avec un sommet marqué  $v$ , on peut « contracter » le sommet  $v$  comme sur la figure 3.5. L'opération de contraction produit un arbre de taille inférieure avec un coin marqué et dépend du fait que  $v$  soit ou non une feuille ce qui explique le facteur 2. On obtient ainsi directement (3.7), c'est la bijection de Rémy [Rém85].

Pour traiter le cas du genre supérieur, tentons d'appliquer la bijection de Rémy à un arbre C-décoré  $(T, \sigma)$  avec un sommet marqué  $v$ , deux cas se présentent. Si le sommet  $v$  est un point fixe de  $\sigma$ , on applique la bijection de Rémy comme si de rien n'était et on obtient le premier terme dans (3.6). Sinon, on applique *deux fois* la bijection de Rémy : une fois sur le sommet  $v$ , et une fois sur le sommet suivant  $v$  dans son cycle de  $\sigma$ . On



présERVE ainsi la contrainte de parité des cycles dans la C-permutation, et on obtient une configuration dont la taille a diminué de 2 et le genre de 1, ce qui donne facilement le deuxième terme dans (3.6). En effet, le facteur  $(2n-3)(2n-1)$  permet d'appliquer, deux fois, la bijection de Rémy inverse, et le facteur  $(n-1)$  permet de choisir à quel endroit de la C-permutation de taille inférieure insérer nos deux nouveaux sommets.  $\square$

Un réel avantage de la bijection des arbres C-décorés est qu'elle préserve le graphe sous-jacent, elle donne donc accès à de nombreux paramètres comme le degré des sommets. En fait, on peut contrôler toute la distribution des degrés, y compris dans les cartes biparties, on démontre ainsi bijectivement le résultat suivant au départ obtenu via la théorie des représentations :

**Proposition 20** (Goupil et Schaeffer [GS98, Theorem 2.1], voir aussi Biane [Bia05]). *Pour  $\mu$  et  $\nu$  des partitions de  $n$ , le nombre  $\beta_g(n; \lambda, \mu)$  de cartes à une face enracinées de genre  $g$  à  $n$  arêtes dont les distributions de degrés des sommets blancs et noirs sont données respectivement par  $\mu$  et  $\nu$  est donné par*

$$\beta_g(n; \lambda, \mu) = \frac{1}{2^{2g}} \sum_{g_1+g_2=g} P_{g_1}(\lambda) P_{g_2}(\mu) \quad \text{où } P_g(\lambda) = \sum_{\gamma_1+\dots+\gamma_m=g} \frac{(m+2g_2-1)!}{\prod_i m_i!} \prod_{r=1}^m \frac{1}{2^{\gamma_r+1}} \binom{\lambda_r-1}{2^{\gamma_r}}.$$

On laissera les lecteurs et lectrices démontrer bijectivement cette proposition par les arbres C-décorés, ce qui est immédiat si l'on sait faire, mais requiert un peu de savoir-faire en comptage d'arbres. Plus généralement, retrouver les nombreuses formules d'énumération de cartes à une face existant dans la littérature, et au départ démontrées de nombreuses manières différentes, directement et de manière unifiée à partir des arbres C-décorés, est un *très bon* exercice de combinatoire énumérative, que nous recommandons chaleureusement à toutes celles et ceux qui nous lisent, en particulier aux plus jeunes (exercice que nous avons effectué avec plaisir dans la deuxième partie de [CFF13], qui donne donc à la fois l'énoncé et le corrigé).

Au delà de la compréhension bijective unifiées des formules (et de la possibilité de répondre simplement à de nouvelles questions énumératives qu'on se poserait sur ces objets) la bijection des arbres C-décorés, puisqu'elle préserve le graphe sous-jacent, permet toute une variété d'applications.

Dans [CFF13] nous donnons ainsi une application aux polynômes de Kerov, des objets liés à la théorie des représentations du groupe symétrique et qui, grâce à des travaux de Féray [Fér10] s'expriment comme des fonctions de partitions compliquées des cartes à une face. Notre bijection permet d'exprimer ces mêmes polynômes directement en terme de fonctions de partitions (toujours compliquées!) d'arbres.

Plus proche de ce qui nous intéresse ici, la bijection permet de nombreuses applications probabilistes, dans l'étude des grandes cartes aléatoires, à une face ou non. Certaines de ces applications (notamment celles qui concernent les limites d'échelle et les cartes Brownienne) seront données au chapitre 5, mais la plus directe d'entre elle, qui concerne l'étude « locale » des cartes à une face aléatoires, sera traitée dès la section suivante.

#### 4. — APPLICATION : ÉNUMÉRATION ET LIMITE LOCALE EN GRAND GENRE [Ang+13]

Dans cette section on décrit une « application » de la bijection des arbres C-décorés (guillemets car cela demande tout de même un peu de travail!) issue de l'article [Ang+13], dans lequel nous étudions l'asymptotique des cartes à une face dont le genre  $g$  est *linéaire*

en leur nombre d'arêtes. Notons que par la formule d'Euler pour une carte à une face de genre  $g \sim \alpha n$  à  $n$  arêtes et  $v$  sommets on a :

$$v = n + 1 - 2g$$

et donc nécessairement  $\alpha \leq \frac{1}{2}$ . Lorsque  $\alpha = 1/2$ , on s'intéresse à des cartes de genre « presque maximal ». Ces cartes ont  $o(n)$  sommets et sont très différentes de celles que l'on étudiera ici. Nous nous intéressons ici au cas où  $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$  qui correspond au régime où les nombres de sommets et arêtes croissent tous deux linéairement. Dans ce régime nous déterminons à la fois l'asymptotique énumérative et la limite locale.

Les résultats de [Ang+13] concernent le comportement « local » de grandes cartes aléatoires. Pour donner un sens à ce « comportement », il nous faut d'abord définir une topologie sur les cartes, afin de pouvoir ensuite donner des théorèmes limites. Si  $m$  est une carte enracinée, on définit la boule  $B_r(m)$  comme la carte enracinée formée par tous les sommets et arêtes de  $m$  à distance au plus  $r$  du sommet racine de  $m$ . On définit alors la *topologie locale* [AS03 ; BS01] sur l'ensemble des cartes enracinées (de genre arbitraire), à partir de la métrique suivante :

$$d_{\text{loc}}(m, m') = e^{-\sup\{r : B_r(m) \approx B_r(m')\}},$$

où l'on écrit  $M \approx M'$  si  $M$  et  $M'$  sont isomorphes comme cartes enracinées. Autrement dit, on décide que deux cartes sont très proches si leurs boules autour de la racine coïncident jusqu'à un rayon très grand.

La topologie de la limite locale donne un cadre naturel pour étudier le comportement de grandes cartes aléatoires. En genre 0 cette question est très bien comprise. Pour les arbres, la convergence un résultat classique, voir [Ald98]. Pour les cartes générales, le cas historiquement le plus étudié est celui des triangulations. Notamment Angel et Schramm [AS03] on construit l'UIPT (Uniform Infinite Planar Triangulation), une certaine triangulation planaire *infinie et aléatoire* qui est la limite, en loi, pour la topologie locale, des grandes triangulations planaires. On pourrait construire de la même façon l'objet limite pour les cartes générales, les quadrangulations, etc. On s'attend à ce que ces objets limites soient les mêmes si l'on considère des cartes de n'importe quel genre  $g \geq 0$  fixé.

La situation est très différente si l'on laisse le genre croître linéairement avec la taille. Dans ce cas, le degré moyen limite est strictement plus grand que dans le cas planaire, ce qui laisse attendre un comportement de nature « hyperbolique », voir [AR15 ; Ben10 ; Ray15]. La question de la limite locale des triangulations de genre linéaire est encore ouverte (voir [Cur16] qui contient notamment une belle conjecture). Le cas des cartes à une face, *beaucoup* plus simple, est ce que nous avons fait dans [Ang+13].

On note  $\text{Geom}(\xi)$  une variable géométrique de paramètre  $\xi \in (0, 1)$  :

$$\mathbf{P}(\text{Geom}(\xi) = k) = (1 - \xi)^{k-1} \xi \quad \text{pour } k \geq 1.$$

Pour  $\xi \in (0, 1)$  on note  $T_\xi$  l'arbre de Galton-Watson de loi de reproduction  $\text{Geom}(\xi) - 1$ . Pour  $\xi > 1/2$  cet arbre est surcritique, c'est à dire qu'il a une probabilité positive d'être infini. On note  $T_\xi^\infty$  l'arbre  $T_\xi$  conditionné à être infini.

**Théorème 5 ([Ang+13] Comportement local des cartes à une face aléatoires de genre linéaire).** *Soit  $g_n$  une suite telle que  $g_n/n \rightarrow \theta$  avec  $\theta \in [0, 1/2)$ . Soit  $U_{g_n, n}$  une carte à une face enracinée aléatoire, uniforme, parmi celles de genre  $g_n$  à  $n$  arêtes. Alors on a la convergence suivante, en loi, pour la topologie de la limite locale :*

$$U_{g_n, n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} T_{\xi_\theta}^\infty,$$

où  $\xi_\theta = \frac{1-\beta_\theta}{2}$ , et où  $\beta_\theta$  est l'unique solution  $\beta \in [0, 1)$  de l'équation :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\beta} - \beta \right) \log \frac{1+\beta}{1-\beta} = (1-2\theta). \quad (3.8)$$

Remarquons que la moyenne de la loi de reproduction géométrique dans le théorème 5 vaut  $(1+\beta_\theta)/(1-\beta_\theta) > 1$ , et donc l'arbre de Galton-Watson est bien surcritique. On ne donnera pas la démonstration du théorème ici, mais nous espérons que nos lecteurs et lectrices seront d'accord avec le fait que, muni de la bijection des arbres  $C$ -décorés, nous avons le bon outil pour le démontrer. La méthode choisie dans [Ang+13] consiste à obtenir une formule énumérative pour les cartes dont le degré de la racine est fixé, ce qui par une opération de « chirurgie » permet ensuite de considérer des cartes dont la boule de rayon  $r$  autour de la racine est fixée (ce que l'on veut pour étudier la limite locale).

Au passage, on obtient aussi une formule pour le nombre total de cartes à une face dans le régime considéré. Pour l'énoncer, introduisons d'abord, pour  $\beta \in (0, 1)$ , la variable aléatoire  $X_\beta$  à valeur dans les entiers impairs, dont la loi est donnée par :

$$\mathbf{P}(X_\beta = 2k+1) := \frac{1}{Z_\beta} \frac{\beta^{2k+1}}{2k+1},$$

où

$$Z_\beta = \sum_{k \geq 0} \frac{\beta^{2k+1}}{2k+1} = \frac{1}{2} \log \frac{1+\beta}{1-\beta} = \operatorname{arctanh} \beta.$$

On voit facilement que (3.8) est équivalente à

$$\mathbf{E}[X_\beta] = \frac{1}{Z_\beta} \frac{\beta}{1-\beta^2} = \frac{1}{1-2\theta}. \quad (3.9)$$

On a alors :

**Théorème 6 ([Ang+13] Énumération des cartes à une face de genre linéaire).**

Supposons que  $g_n \sim \theta n$ , et soit  $\beta_n$  telle que  $\mathbf{E}[X_{\beta_n}] = \frac{n}{s} + o(n^{-1/2})$  et  $s_n = n+1-2g_n$ . Alors quand  $n$  tend vers l'infini, le nombre de cartes à une face enracinées de genre  $g_n$  à  $n$  arêtes est équivalent à

$$\epsilon_{g_n}(n) \sim A_\theta \frac{(2n)!}{n! s_n! \sqrt{s_n}} \frac{(Z_{\beta_n})^{s_n}}{4g_n \beta_n^{n+1}},$$

$$\text{où } A_\theta = \frac{2}{\sqrt{2\pi \operatorname{Var}(X_{\beta_\theta})}}.$$

Remarquons que  $\beta_n \rightarrow \beta_\theta$ . Si  $g = \theta n + o(\sqrt{n})$  on peut choisir  $\beta_n$  égal à  $\beta_\theta$  et indépendant de  $n$ .

Le théorème 6 est, lui, une conséquence immédiate de la bijection des arbres  $C$ -décorés : compter les cartes à une face de genre  $g_n$  à  $n$  arêtes revient à compter les  $C$ -permutations de taille  $n+1$  à  $s_n$  cycles (avec leur poids naturel de  $\frac{1}{2k+1}$  par cycle de taille  $k$ ), ce qui revient à estimer la probabilité que la somme de  $s_n$  copies indépendantes  $X_\beta$  soit égale à  $(n+1)$ . Le théorème central limite local fait justement cela, et calculs faits on obtient la formule ci-dessus — où la variance et la moyenne de  $X_\beta$  apparaissent donc naturellement.

Pour conclure cette section, on peut noter que les résultats de cette section peuvent probablement s'obtenir directement à partir des formules énumératives non bijectives, au prix de plus de calculs, et sans la compréhension naturelle des quantités que l'on voit apparaître. Ce n'est pas le cas de résultats de structure plus complexes. En effet, si l'on

montre ici que les grandes cartes à une face de genre linéaire sont localement des arbres, on peut s'interroger sur leur structure globale. Par exemple, quelle est leur diamètre ? Ces questions sont résolues dans un article de Gourab Ray [Ray15] qui utilise les arbres  $C$ -décorés et, pour le coup, on ne voit pas trop comment faire sans.

**Proposition 21** ([Ray15, Thm. 1.1 & Cor. 1.2]). *Pour tout  $\theta \in (0, \frac{1}{2})$  il existe  $\epsilon, K > 0$  tel que, dans les notations du théorème 5, le diamètre de  $U_{g,n}$  est compris entre  $\epsilon \log(n)$  et  $K \log(n)$  avec probabilité tendant vers 1, quand  $n$  tend vers l'infini. La même chose est vraie pour la distance entre deux sommets choisis uniformément au hasard.*

### 5. — LE CAS NON-ORIENTABLE [BC11B]

La question de l'énumération des cartes sur des surfaces non-orientables suit de près celle du cas orientable. De nombreux résultats peuvent être adaptés, souvent au prix de difficultés supplémentaires, mais pas tous. La généralisation au cas non-orientable est ainsi un moyen très intéressant de mieux comprendre les constructions orientables, et de tester leurs limites. Ce que nous présenterons dans cette section entre dans ce cadre : avec Olivier Bernardi, nous avons généralisé la bijection des trisections au cas des surfaces non-orientables, mais uniquement dans le cas des cartes cubiques (ou de manière équivalente, dans le cas dominant de l'asymptotique).

Les cartes à une face non-orientables ont été moins étudiées que leur analogue orientable. Au moyen d'intégrales de matrices, Goulden et Jackson ont obtenu dans [GJ97] un analogue de la formule d'Harer et Zagier dans sa version « colorée » (équation (3.1)). Plus tard Ledoux [Led09], grâce à des méthodes de polynômes orthogonaux, a obtenu une formule de récurrence du type de celle de Harer et Zagier (équation (3.6)). Enfin, après le travail présenté ici, Bernardi [Ber12] a donné une bijection menant à de nouvelles formules énumératives pour ces objets faisant étonnamment intervenir le nombre de cartes planaires. La bijection de Bernardi (qui s'applique aussi dans le cas orientable où elle prend une forme particulièrement élégante, pour ne pas dire magnifique, qui donne presque gratuitement la formule (3.1)) n'est malheureusement pas bien adaptée à l'étude des cartes de genre fixé qui est ce qui nous intéresse le plus dans tout ce document. La bijection que nous allons présenter reste à ce jour la seule à traiter des cartes à une face non-orientables de genre fixé, et la possibilité de l'unifier en toute généralité avec la construction des arbres  $C$ -décorés reste une question ouverte.

Rappelons que la classification des surfaces (connexes, compactes) générales prend la forme suivante : pour chaque  $g \geq 0$  il existe une unique surface orientable de genre  $g$  qui est le tore à  $g$  anses noté  $\mathbb{S}_g$ , et pour chaque  $g \geq \frac{1}{2}$  dans  $\frac{1}{2}\mathbb{N}$  il existe une unique surface non-orientable<sup>5</sup> de genre  $g$ , obtenue en recollant  $2g$  plans projectifs à la sphères, notée  $\mathbb{N}_g$ .

Pour représenter une carte non-orientable, la convention la plus simple est d'utiliser la convention « graphe plus système de rotation », si ce n'est que désormais certaines arêtes peuvent être *twistées* : lorsque l'on fait le tour d'une face et que l'on emprunte une arête twistée, sur la représentation planaire, on traverse cette arête pour continuer sur l'autre côté. De plus, cette représentation n'est pas unique : on peut décider d'inverser l'ordre cyclique autour de n'importe quel sommet, à condition d'inverser également les arêtes twistées et non-twistées parmi les arêtes non-boucles incidentes, et l'on obtient la

5. Il n'existe pas de définition unanime de ce qu'il faut appeler le genre dans le cas non-orientable. Celle que l'on utilise ici est fréquente en combinatoire énumérative, elle permet d'utiliser la même version de la formule d'Euler dans les cas orientable et non-orientable. Dans mes articles publiés [BC11b ; CD17], ce que j'appelle ici le *genre* est appelé le *type* mais j'ai préféré ici faire l'économie de cette terminologie supplémentaire.

même carte. Autrement dit, les cartes non orientables sont des objets combinatoires naturels considérés modulo une relation d'équivalence par flips. Cela les rend beaucoup plus difficiles à étudier que les cartes orientables. On consultera l'introduction de [BC11b] pour une bonne formalisation, bien utilisable en pratique, de la notion de carte combinatoire non orientable. Nous nous en tiendrons à cette évocation ici.

On considèrera ici des cartes à une face enracinées *précubiques* c'est à dire n'ayant que des sommets de degré 1 (feuilles) ou 3 (nœuds). Ces cartes seront toujours enracinées sur une feuille. Les cartes précubiques sont une généralisation naturelle des arbres binaires plantés à n'importe quelle surface. Commençons par ré-examiner le cas orientable. Par la bijection des trisections, chaque carte à une face précubique orientable de genre  $g$  porte  $2g$  trisections, et il est facile de voir que celles-ci ne partagent jamais de sommet. L'opération d'ouverture prend une forme très simple, puisque qu'on sépare simplement ce sommet (cubique) en trois feuilles, comme ci dessous :

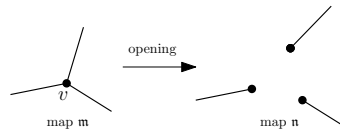


FIGURE 3.6 – L'ouverture d'un sommet cubique portant une trisection.

En notant  $\xi_g(m)$  le nombre de cartes précubiques *orientables* de genre  $g$  à  $2m + 1$  arêtes, on obtient alors directement la récurrence de [Cha10], pour  $g \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  :

$$2g\xi_g(m) = \binom{m+4-3g}{3} \xi_{g-1}(m), \quad (3.10)$$

qui implique puisque  $\xi_0(m) = \text{Cat}(m)$  que  $\xi_g(m) = \frac{(2m)!}{12^g g! m! (m+1-3g)!}$ .

Le principal résultat énumératif de l'article [BC11b] est la généralisation suivante de la récurrence (3.10) :

**Théorème 7 ([BC11b] – récurrence des trisections, cas cubique, non-orientable).** *Les nombres  $\eta_h(m)$  de cartes à une face précubiques non-orientables de genre  $h$  à  $2m + \mathbb{1}_{h \in \mathbb{N}}$  arêtes satisfont la récurrence :*

$$(2h-1) \cdot \eta_h(m) = 4 \binom{m' - 3[h-1]}{3} \eta_{h-1}(m) + 3 \binom{m' - 3[h-1]}{3} \xi_{h-1}(m), \quad (3.11)$$

où  $m' = m + (-1)^{2h}$ , et  $\xi_h(m)$  est le nombre de cartes orientables précubiques de genre  $h$  à  $2m + \mathbb{1}_{h \in \mathbb{N}}$  arêtes, qui est 0 si  $h \notin \mathbb{N}$ , et est donné ci-dessus sinon.

Donnons ici quelques mots des éléments principaux entrant dans la démonstration du théorème 7, qui repose sur trois ingrédients non triviaux.

1. Généraliser la notion de trisection. Étant donnée une carte unicellulaire non-orientable à  $n$  arêtes, il est toujours possible de numérotter ses coins de 1 à  $2n$  suivant l'ordre de parcours comme nous le faisons dans la figure 3.2. Néanmoins, nous ne disposons plus d'une notion d'ordre « clockwise » autour des sommets et ne pouvons donc

plus définir les descentes ni les trisections sans d'abord choisir, *conventionnellement*, ce que nous appellerons l'ordre clockwise autour de chaque sommet. La solution trouvée dans [BC11b] est étonnante, et consiste à choisir pour chaque sommet la convention qui maximise le nombre de *coins gauches* autour de chaque sommet (voir figure 3.7(a)). On peut ensuite définir les trisections comme précédemment.

2. Généraliser l'opération d'ouverture. Il reste vrai, un peu miraculeusement, que les sommets portant une trisection au sens que nous venons de définir peuvent être « ouverts » en trois feuilles pour obtenir une carte à une face de genre inférieur, comme en figure 3.6. Néanmoins, ce n'est plus une bijection. Étant donné une carte avec trois feuilles marquées, il y a en effet *quatre* façon de recoller ces trois feuilles ensemble en préservant la structure de carte à une face, comme sur la figure 3.8. Seule une de ces opérations préserve l'orientabilité, et trois la détruisent, ce qui permet de comprendre les facteurs 4 et 3 dans le membre de droite de (3.11).
3. Il reste à généraliser le lemme des trisections. Malheureusement, le nombre de trisections dans le cas nonorientable n'est pas déterminé par le genre. La figure 3.7 montre deux cartes sur la bouteille de Klein ( $g = 1$ ) qui portent respectivement 0 et 2 trisections. On construit cependant une involution sur les cartes qui montre *qu'en moyenne*, les cartes précubiques à une face de genre  $g$  ont  $(2g - 1)$  trisections. Cela explique le membre de gauche de 3.11. Cette involution compliquée a le gros défaut d'être assez peu locale, réduisant les perspectives d'applications probabilistes de la construction.

On en déduit facilement des formules explicites pour les nombres  $\eta_h(m)$  :

**Corollaire 22** ([BC11b]). *Soit  $h \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$  et  $m \geq 3h + (-1)^{\mathbb{1}_{h \in \mathbb{S}}}$ . Le nombre de cartes non-orientables précubiques à une face, de genre  $h$  et à  $2m + \mathbb{1}_{h \in \mathbb{N}}$  arêtes est donné par :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } h \in \mathbb{N} : \quad \eta_h(m) = c_h \binom{m+1}{3, 3, \dots, 3, m+1-3h} \text{Cat}(m) \text{ où } c_h = 3 \cdot 2^{3h-2} \frac{h!}{(2h)!} \sum_{l=0}^{h-1} \binom{2l}{l} 16^{-l} \\ \text{si } h \notin \mathbb{N} : \quad \eta_h(m) = \frac{4^{m+[h]-1} (m-1)!}{6^{[h]} (2h-1)! (m-1-3[h])!} \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Comme dans le cas orientable, la construction valable dans le cas cubique s'étend facilement au cas asymptotiquement dominant, on trouve alors :

**Théorème 8** ([BC11b] – **asymptotique des cartes à une face non-orientables**). *Soit  $\kappa_h(n)$  le nombre de cartes à une face non-orientables enracinées de genre  $h$  à  $n$  arêtes. On a quand  $n$  tend vers l'infini*

$$\kappa_h(n) \sim \frac{c_h}{\sqrt{\pi} 6^h} n^{3h-\frac{3}{2}} 4^n \quad \text{si } h \in \mathbb{N} \quad , \quad \kappa_h(n) \sim \frac{4^{[h]}}{2 \cdot 6^{[h]} (2h-1)!} n^{3h-\frac{3}{2}} 4^n \quad \text{si } h \notin \mathbb{N}.$$

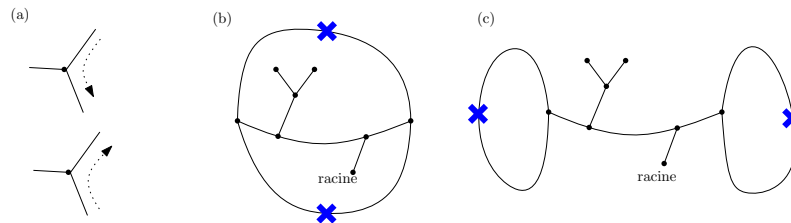


FIGURE 3.7 – (a) un coin droit (haut) et un coin gauche (bas). Si l'on changeait la convention pour l'ordre horaire autour de ce sommet, on inverserait les deux notions. (b) et (c) Deux cartes à une face sur la bouteille de Klein ( $g = 1$ ), projetées dans le plan en utilisant l'orientation canonique à chaque sommet (majorité de coins gauches). La première a deux trisections, la seconde en a zéro. Ces deux cartes sont en fait reliées par l'involution de l'article [BC11b], et ont bien ensemble en moyenne  $2g - 1 = 1$  trisection.

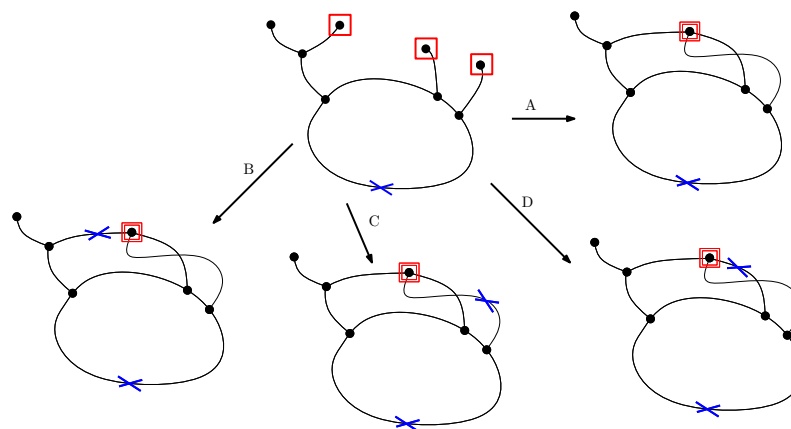


FIGURE 3.8 – Les quatre façons de recoller trois feuilles pour former une trisection marquée, dans le cas non-orientable. Seule l'une des quatre a la propriété de préserver l'orientabilité de la carte de départ, dans le cas où elle le serait (ce qui n'est pas le cas sur cet exemple).





# Fonctions tau, Fermions, pavages [CC15 ; BCC17 ; Bou+17 ; Bet+14]

*Deux idées immobiles ne peuvent exister à la fois dans le monde moral, de même que dans le monde physique deux corps ne peuvent occuper à la fois la même place.*

*Alexandre Pouchkine, La Dame de Pique (1834).*

Ce chapitre est basé sur deux ensembles de travaux à première vue fort différents. Le premier est l'article [CC15], dans lequel nous obtenons une nouvelle formule de récurrence quadratique, très simple, pour énumérer les cartes par genre et nombre d'arêtes (et/ou sommets). Au passage, nous évoquerons aussi les résultats de Goulden et Jackson [GJ08] sur le cas des triangulations, qui nous précèdent et nous ont inspiré. Ces travaux reposent principalement sur le fait que les fonctions génératrices de cartes sont des « fonctions tau » de la hiérarchie KP. Le second est l'ensemble des deux articles [BCC17 ; Bou+17] qui étudient des modèles de pavages du plan appelés *Rail Yard Graphs*<sup>1</sup> ainsi que les *Steep Tilings* (pavages pentus) qui en sont un cas particulier.

Ce qui fait le lien entre ces travaux, c'est que tous les deux reposent sur les propriétés combinatoires de l'espace de Fock fermionique. Pour les cartes, c'est la théorie des représentations du groupe symétrique qui, en reliant cartes et fonctions de Schur, permet d'exprimer les séries génératrices de cartes comme des observables au moyen de la machinerie Fermionique. C'est de cette expression, qui du point de vue combinatoire est encore une boîte noire, que l'on obtient la structure de fonction tau de la hiérarchie KP et les relations quadratiques qui en découlent<sup>2</sup>. Quant aux modèles de dimères, il est classique que les opérateurs de vertex agissant sur l'espace de Fock peuvent s'interpréter comme des matrices de transferts de modèles de particules ou de de dimères. En les multipliant, on fabrique des modèles de dimères exactement solubles sur certains réseaux plans. Nos articles [BCC17 ; Bou+17] systématisent cette construction, et introduisent des opérateurs nouveaux qui permettent de localiser tous les types de dimères. Cela fait ainsi de nos « Rail Yard Graphs » des modèles de dimères très généraux qui soient exactement solubles.

1. Réseaux de gares de triage. On utilisera ici la version anglaise.

2. Nos travaux n'interviennent ici qu'à la toute fin, dans l'obtention des récurrences explicites, les liens entre cartes et fonctions tau étant connus depuis longtemps.

Nous avons brièvement expliqué au chapitre 2 ce que sont l'espace de Fock et les opérateurs de vertex. Bien que cela ne soit pas nécessaire pour comprendre les énoncés de ce chapitre, nos lecteurs et lectrices pourront choisir de se rafraîchir la mémoire s'ils souhaitent comprendre un peu plus profondément sur quoi ils reposent. Ce chapitre est organisé comme suit :

- En section 1 nous présentons les récurrences quadratiques de l'article [CC15].
- En section 2 nous présentons les Rail Yard Graphs et nos résultats, tout en disant quelques mots sur les Steep Tilings de [BCC17]. Nous concluons en section 2.8 par quelques mots sur des algorithmes de génération aléatoire de processus de Schur et en particulier de Rail Yard Graphs.

## 1. — RÉCURRENCES QUADRATIQUES POUR COMPTER LES CARTES [CC15]

### 1.1. — Introduction en digression : la récurrence de Goulden et Jackson

Dans l'article [GJ08], Goulden et Jackson ont montré que le nombre  $T_g^n$  de triangulations enracinées de genre  $g$  à  $2n$  faces était solution de l'équation suivante<sup>3</sup> :

$$(n+1)T_g^n = 4n(3n-2)(3n-4)T_{g-1}^{n-2} + 4 \sum_{\substack{i+j=n-2 \\ h+k=g}} (3i+2)(3j+2)T_h^i T_k^j, \quad (4.1)$$

les conditions initiales étant conventionnellement :  $T_0^{-1} = -\frac{1}{2}$  et  $T_g^n = 0$  pour  $n < -2$  ou  $2g > n + 1$ . Cette équation est remarquable pour plusieurs raisons.

D'abord, elle permet de calculer très aisément les nombres  $T_g^n$ , y compris pour des valeurs de  $g$  très grandes. Il s'agit d'une amélioration spectaculaire par rapport aux méthodes précédentes. En effet, ce qui était connu de mieux jusqu'alors était le calcul des séries génératrices de genre fixé par la méthode des équations de Tutte, voir [Gao93]. Même grâce aux progrès remarquables effectués par l'école Eynard [Eyn16] qui a donné des moyens très élégants de résoudre récursivement ces équations, le calcul de la série génératrice des triangulations de genre  $g$  repose sur l'introduction d'un nombre important de séries auxiliaires, multivariées (les séries  $F_{g,k}(x_1, \dots, x_k)$  dont les  $k$  paramètres marquent le degré de  $k$  faces marquées additionnelles) que l'on est obligé de calculer également. Même avec de bonnes méthodes et de bonnes paramétrisations, la taille de ces résultats intermédiaires est énorme, et en pratique, leur calcul n'est possible que pour les petits genres. De ce point de vue, l'équation (4.1) est donc absolument spectaculaire.

Le fait que les séries génératrices de cartes satisfont des équations aux dérivées partielles non linéaires (soient des fonctions tau de KP) n'est pas nouveau, bien que [GJ08] en propose une re-démonstration. Ce qui est nouveau dans (4.1), c'est que cette équation ne fait intervenir qu'un petit nombre de paramètres ( $n$  et  $g$ ). C'est cette réduction du nombre de paramètres qui est au cœur de l'argument de Goulden et Jackson pour établir (4.1).

D'autre part, ce qui caractérise les méthodes à base d'équations de Tutte que l'on vient de mentionner, c'est leur *universalité*. Ce qui peut être fait pour les triangulations peut aussi être fait pour les quadrangulations, les cartes générales, les cartes de degrés fixés, etc. De la même façon, la structure de fonction tau des séries génératrices de cartes est très universelle. Pourtant, l'argument de [GJ08] est extrêmement spécifique au cas des triangulations. Cela pose aussitôt la question suivante : la possibilité d'éliminer des paramètres est-elle universelle ? Autrement dit, peut-on obtenir des récurrences compactes similaires, à peu de paramètres, pour d'autres familles de cartes ? Notamment, pour les cartes générales ? C'est ce dernier cas que nous avons réussi à traiter dans [CC15].

---

3. En fait, cette équation était apparue avant dans la littérature de physique mathématique. En effet, on pourra vérifier que l'équation (B.6) dans [KKN99] est équivalente à (4.1).

Dans la suite, nous allons présenter les résultats de [CC15] et l'idée de leur démonstration. Nous ne reparlerons pas du cas des triangulations, qui est plus simple, et que nos lectrices et lecteurs pourront s'amuser à retrouver en exercice à partir du point de vue développé ici : on pourra consulter la feuille d'exercices de mon cours à Aléa 2017 pour une démonstration selon ces lignes de la formule (4.1) à partir de l'équation KP (2.28).

### 1.2. — Théorèmes principaux de [CC15]

On s'intéresse ici à l'énumération de cartes enracinées de genre fixé. On rappelle qu'une carte est *bipartie* si ses sommets peuvent être coloriés de deux couleurs de telle sorte qu'il n'y ait pas d'arête monochromatique. Les deux couleurs seront toujours pour nous *noir* et *blanc*, et le sommet racine sera toujours blanc. Une *quadrangulation* est une carte dont toutes les faces ont degré 4. Il existe une bijection classique, purement locale, due à Tutte [Tut63] entre quadrangulations biparties à  $n$  faces de genre  $g$  et cartes à  $n$  arêtes de genre  $g$  (toutes nos cartes ici sont enracinées). Voir la figure 4.1. Cette bijection fait correspondre le nombre de sommets et faces de la carte au nombre de sommets blancs et noirs de la quadrangulation, respectivement.

Pour  $g, n \geq 0$ , notons  $Q_g^n$  le nombre de quadrangulations biparties enracinées de genre  $g$  à  $n$  faces. De manière équivalente,  $Q_g^n$  est donc le nombre de cartes enracinées de genre  $g$  à  $n$  arêtes. Par convention, nous considérons qu'il existe une unique carte sans arêtes, et qu'elle a genre zéro, une face, et un sommet. Le premier résultat de [CC15] est le suivant :

**Théorème 9 ([CC15] – Récurrence quadratique pour les cartes, par genre et arêtes).** *Le nombre  $Q_g^n$  de cartes de genre  $g$  à  $n$  arêtes satisfait la relation de récurrence :*

$$\frac{n+1}{6}Q_g^n = \frac{4n-2}{3}Q_g^{n-1} + \frac{(2n-3)(2n-2)(2n-1)}{12}Q_{g-1}^{n-2} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k+\ell=n \\ k,\ell \geq 1}} \sum_{\substack{i+j=g \\ i,j \geq 0}} (2k-1)(2\ell-1)Q_i^{k-1}Q_j^{\ell-1}$$

pour  $n \geq 1$ , avec les conditions initiales  $Q_g^0 = \mathbf{1}_{\{g=0\}}$ , et  $Q_g^n = 0$  si  $g < 0$  ou  $n < 0$ .

On démontre en fait un résultat plus général, où en plus des arêtes et du genre, on contrôle le nombre de faces. Considérons le polynôme  $Q_g^n(x)$  qui compte les mêmes cartes que  $Q_g^n$  mais où l'exposant de la variable  $x$  marque le nombre de faces :

$$Q_g^n(x) := \sum_{\mathfrak{m}} x^{\#\text{faces de } \mathfrak{m}}, \quad (4.2)$$

où la somme est prise sur les cartes enracinées de genre  $g$  à  $n$  arêtes. Alors on a la généralisation suivante du théorème 9 :

**Théorème 10 ([CC15] – Récurrence quadratique pour les cartes, par genre, arêtes, et sommets).** *Les polynômes  $Q_g^n(x)$  qui comptent les cartes de genre  $g$  à  $n$  arêtes avec un poids  $x$  par sommet satisfont l'équation de récurrence :*

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{6}Q_g^n(x) = & \frac{(1+x)(2n-1)}{3}Q_g^{n-1}(x) + \frac{(2n-3)(2n-2)(2n-1)}{12}Q_{g-1}^{n-2}(x) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k+\ell=n \\ k,\ell \geq 1}} \sum_{\substack{i+j=g \\ i,j \geq 0}} (2k-1)(2\ell-1)Q_i^{k-1}(x)Q_j^{\ell-1}(x), \end{aligned}$$

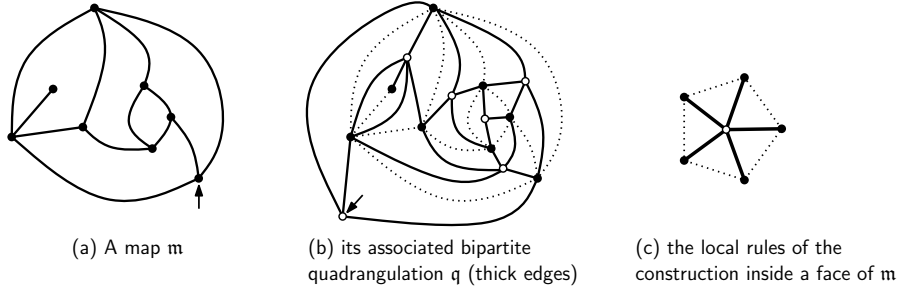


FIGURE 4.1 – **Bijection de Tutte.** À gauche, une carte  $m$  de genre  $g$  à  $n$  arêtes. On ajoute un nouveau sommet (blanc) dans chaque face, et on triangule. La carte  $q$  formée de tous les sommets (anciens et nouveaux) et de toutes les nouvelles arêtes est une quadrangulation bipartite.

pour  $n \geq 1$ , avec les conditions initiales  $Q_g^0(x) = x \cdot \mathbf{1}_{\{g=0\}}$ , et  $Q_g^n = 0$  si  $g < 0$  ou  $n < 0$ .

On notera que la substitution  $x = 1$  redonne le théorème 9. En extrayant le coefficient de  $x^f$  dans le théorème 10, pour  $f \geq 1$ , on obtient une récurrence explicite qui permet de compter les cartes par genre, nombre d'arêtes, et de faces, qui a des cas particuliers intéressants lorsque le nombre de faces  $f$  est petit. En particulier, pour  $f = 1$  l'équation devient linéaire est l'on retrouve la fameuse équation de récurrence de Harer et Zagier que nous avons étudiée au chapitre précédent! À ce jour, le cas  $f = 1$  est le seul cas de cette récurrence que nous savons interpréter bijectivement<sup>4</sup>.

Enfin, le théorème admet encore une autre formulation, qui met en évidence la dualité entre sommets et faces propre aux cartes. Soit  $M_g^{i,j}$  le nombre de cartes enracinées de genre  $g$  à  $i$  sommets et  $j$  faces. Par la relation d'Euler on a :

$$i + j = n + 2 - 2g,$$

ce qui implique que  $M_g^{i,j} = Q_g^{i+j+2g-2,j}$ . Le théorème précédent prend alors la forme suivante :

**Théorème 11 ([CC15] – Récurrence quadratique pour les cartes, par genre, sommets, et faces).** Le nombre  $M_g^{i,j}$  de cartes enracinées de genre  $g$  à  $i$  sommets et  $j$  faces satisfait la récurrence :

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{6} M_g^{i,j} &= \frac{(2n-1)}{3} \left( M_g^{i-1,j} + M_g^{i,j-1} + \frac{(2n-3)(2n-2)}{4} M_{g-1}^{i,j} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{i_1+i_2=i \\ i_1, i_2 \geq 1}} \sum_{\substack{j_1+j_2=j \\ j_1, j_2 \geq 1}} \sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ g_1, g_2 \geq 0}} (2n_1-1)(2n_2-1) M_{g_1}^{i_1, j_1} M_{g_2}^{i_2, j_2}, \end{aligned}$$

pour  $i, j \geq 1$ , avec les conditions initiales  $M_g^{i,j} = 0$  si  $i + j + 2g < 2$ , et si  $i + j + 2g = 2$  alors  $M_g^{i,j} = \mathbf{1}_{\{(i,j)=(1,1)\}}$ . On note ici  $n = i + j + 2g - 2$ ,  $n_1 = i_1 + j_1 + 2g_1 - 1$ , et  $n_2 = i_2 + j_2 + 2g_2 - 1$ .

### 1.3. — Idée de démonstration : élimination de variables dans l'équation KP

Une fois que l'on sait que les fonctions génératrices de cartes sont des fonctions tau de la hiérarchie KP, les résultats de [CC15] sont quasiment immédiats, à quelques astuces

4. Dans son mémoire de M2, Baptiste Louf donne une bijection pour le cas à deux faces dans le cas cubique (récurrence de Goulden et Jackson). Elle est déjà fort compliquée!

près qui sont notre contribution au sujet. La démonstration du théorème 9 procède comme suit :

Étape 1. La première astuce est de vouloir compter les quadrangulations biparties plutôt que les cartes. Les deux sont équinumérées par la bijection de Tutte vue plus haut, mais elles font intervenir des fonctions tau différentes. En effet, la fonction génératrice des cartes générales *comme* celle des cartes biparties est une fonction tau de la hiérarchie KP. Dans notre travail, nous utilisons la seconde. Précisément, la fonction

$$H \equiv H(z, w, x; p_1, p_2, \dots, \dots)$$

comptant les cartes biparties où  $z, w, x$  marquent respectivement les arêtes, les sommets, et les sommets noirs, et où la variable  $p_i$  marque le nombre de faces de degré  $2i$  pour  $i \geq 1$  est une fonction tau de la hiérarchie KP<sup>5</sup> Dans cette fonction, les cartes sont enracinées et comptées avec poids « un sur leur nombre d'arêtes ». Pour se ramener au cas qui nous intéresse, il suffit de considérer la spécialisation

$$\theta : p_i \longmapsto \mathbf{1}_{i=2},$$

puisqu'on ne considère ainsi plus que des faces de degré 4, à savoir des quadrangulations. Autrement dit, la fonction  $\theta H \equiv (\theta H)(z, w, x)$  est la fonction génératrice des quadrangulations biparties par leurs trois paramètres naturels.

Étape 2. La théorie de la hiérarchie KP nous dit que la fonction  $H$  introduite plus haut est solution de l'équation KP, voir (2.28) en section 3.6 :

$$-H_{3,1} + H_{2,2} + \frac{1}{12}H_{1,1,1,1} + \frac{1}{2}(H_{1,1})^2 = 0, \quad (4.3)$$

où les indices correspondent à des dérivations partielles, par exemple  $H_{3,1} = \frac{\partial^2}{\partial p_3 \partial p_1} H$ . Tout le problème ici est que les dérivées partielles ne commutent pas avec l'opérateur  $\theta$ . Il n'est donc pas clair qu'en appliquant  $\theta$  à l'équation (4.3), on puisse de ramener à une équation portant uniquement sur la fonction  $\theta H$ , ou de manière équivalente une équation de récurrence sur les  $Q_g^n(x)$ . Pourtant on montre :

**Lemme 23.** *Tous les coefficients des fonctions apparaissant après l'application de  $\theta$  à l'équation (4.3) peuvent s'exprimer uniquement en termes de nombres de quadrangulations. Précisément, pour  $n, g \geq 1$ , on a :*

$$[z^{2n}w^{n+2-2g}]\theta H_{2,2} = \frac{n-1}{2}Q_g^n(x), \quad (4.4)$$

$$[z^{2n}w^{n+1-2g}]\theta H_{1,1} = (2n-1)Q_g^{n-1}(x), \quad (4.5)$$

$$[z^{2n}w^{n+2-2g}]\theta H_{1,4} = (2n-1)(2n-2)(2n-3)Q_{g-1}^{n-2}(x), \quad (4.6)$$

$$[z^{2n}w^{n+2-2g}]\theta H_{3,1} = \frac{2n-1}{3}(Q_g^n(x) - (1+x)Q_g^{n-1}(x)). \quad (4.7)$$

Remarque. Ce lemme implique directement les théorèmes voulus. La démonstration des trois premières égalités est plus ou moins triviale pour tout cartographe confirmé. Par exemple, pour la première, le membre de gauche compte des quadrangulations dans lesquelles *deux* quadrangles ont été distingués, par l'action de l'opérateur  $\frac{\partial^2}{\partial p_3 \partial p_1}$ . Il est clair que ce nombre s'exprime en fonction des nombres de quadrangulations quitte à multiplier par un polynôme en  $n$  (pour gérer les détails et vraiment obtenir le membre de droite, il faut tenir compte des facteurs d'enracinements et de symétrie,

5. Voir section 3.6.

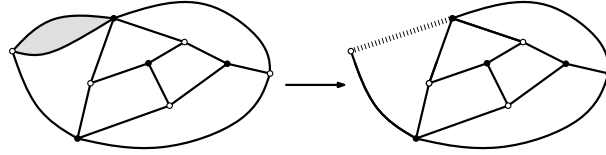


FIGURE 4.2 – **Contraction de digône.** Une quadrangulation bipartie munie d'un « défaut digonal » marqué peut être vue comme une quadrangulation bipartie (sans défaut) avec une arête marquée. On peut ainsi se débarrasser des opérateurs  $\frac{\partial}{\partial p_1}$  et montrer les deuxième et troisième équations du lemme 23.

ce qui demande de réfléchir patiemment, voir [CC15]). Dans les deux équations suivantes l'action de l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial p_1}$  s'interprète comme le marquage d'une face de degré 2 (digône). Or un digône peut être contracté pour obtenir une arête, voir la figure 4.2. On se retrouve alors à compter des quadrangulations avec des arêtes marquées, ce qui ne pose pas de problème.

L'astuce. L'unique vraie contribution de [CC15], qui tient en une ligne, est la quatrième égalité du lemme. A priori, le coefficient  $[z^{2n}w^{n+2-2g}]\theta H_{3,1}$  compte des quadrangulations munies d'un digône et d'un hexagone marqué. Si le digône ne pose pas de problème par l'argument de contraction, il n'est pas du tout évident que les « quadrangulations munies d'un défaut hexagonal » soient énumérées par une fonction simple des  $Q_g^n(x)$ . Or c'est bien le cas ! Il suffit pour cela d'écrire l'équation qui décrit l'effacement de la racine dans une quadrangulation bipartie : voir la figure 4.3, qui clôt la démonstration !

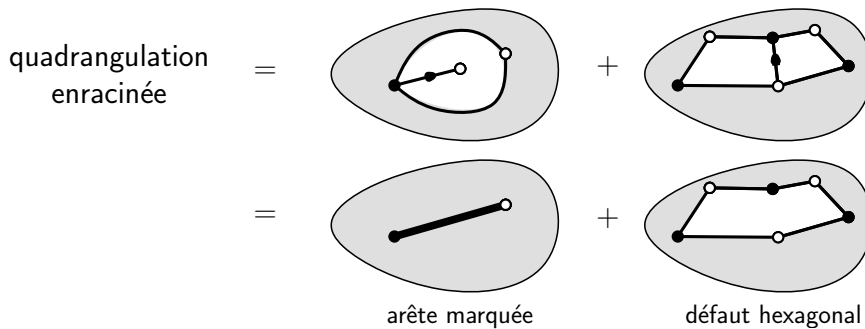


FIGURE 4.3 – **L'astuce de [CC15].** Partant d'une quadrangulation bipartie, on examine les deux cas possibles après effacement de l'arête racine. Le premier cas fait apparaître un digône, que l'on traite comme précédemment, et le deuxième fait apparaître un défaut hexagonal. On obtient ainsi une équation qui relie les configurations issues de défauts hexagonaux à des configurations purement quadrangulaires. Autrement dit, on exprime les coefficients de  $\theta H_3$  (ou  $\theta H_{3,1}$ ) en fonction des nombres  $Q_g^n(x)$  ce qui, calculs faits, donne la quatrième équation du lemme. On notera au passage que cette astuce n'est vraiment pas compliquée.

#### 1.4. — D'autres corollaires : fonctions génératrices et récurrence des $t_g$ .

Soit  $q_g(t) := \sum_{n \geq 0} Q_g^n(1)t^n$  la fonction génératrice des cartes enracinées de genre  $g$  où  $t$  marque le nombre d'arêtes. On sait depuis [BC91] que  $q_g(t)$  est une fonction rationnelle de  $\rho := \sqrt{1 - 12t}$ , et de plus [AG99] montre que cette fonction n'a de pôles qu'à  $\rho = 0$  et  $\rho = -2$ . En genre 0 le résultat remonte à Tutte [Tut63] et l'on a :

$$q_0(t) = T - tT^3, \tag{4.8}$$

où  $T = \frac{1-\sqrt{1-12t}}{6t}$  est l'unique série formelle solution de l'équation

$$T = 1 + 3tT^2. \quad (4.9)$$

**Remarque 9.** *Bien sûr, être une fonction rationnelle de  $T$  ou de  $\rho$  est équivalent, mais on préférera travailler avec  $T$ , qui a un sens combinatoire clair. En effet,  $T$  est la série génératrice des arbres étiquetés apparaissant dans la bijection de Cori-Vauquelin-Schaeffer-Marcus (voir chapitre 2). Néanmoins, l'interprétation bijective de cette rationalité reste un problème ouvert, malgré les progrès de [CMS09].*

En terme des séries  $q_g(t)$ , le théorème 9 se met sous la forme suivante :

**Théorème 12 ([CC15] – récurrence pour les fonctions génératrices de cartes de genre fixé).** *Pour  $g \geq 0$ , on a  $q_g(t) = R_g(T)$  où  $T$  est donné par (4.9) et  $R_g$  est une fraction rationnelle qui peut être calculée récursivement par :*

$$\begin{aligned} \frac{D}{DT} \left( \frac{(T-1)(T+2)}{3T} R_g(T) \right) &= \frac{(T-1)^2}{18T^4} (2D+1)(2D+2)(2D+3) R_{g-1}(T) \\ &+ \frac{(T-1)^2}{3T^4} \sum_{\substack{i+j=g \\ i,j \geq 1}} ((2D+1)R_i(T))((2D+1)R_j(T)), \end{aligned}$$

$$\text{où } D = \frac{T(1-T)}{T-2} \frac{d}{dT}.$$

À partir du théorème précédent, il est facile d'effectuer l'analyse de singularité des fonctions  $q_g(t)$ . On voit que la singularité dominante de  $q_g(t)$  est unique, atteinte à  $t = \frac{1}{12}$ , et le comportement dominant est d'ordre  $\frac{1}{(2-t)^{5g-3}}$ . On en déduit facilement que

$$Q_g^n \sim t_g n^{\frac{5(g-1)}{2}} 12^n, \quad (4.10)$$

pour un nombre positif  $t_g$ . De plus, on voit que les nombres  $\tau_g = (5g-3)\alpha_{5g-3}^{(g)} = 2^{5g-2}\Gamma(\frac{5g-1}{2})t_g$  satisfont la récurrence

$$\tau_g = \frac{1}{3}(5g-4)(5g-6)\tau_{g-1} + \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{g-1} \tau_h \tau_{g-h}, \quad (4.11)$$

ce qui permet de calculer les  $t_g$  par induction à partir de  $t_1 = \frac{1}{24}$  (*i.e.*  $\tau_1 = \frac{1}{3}$ ). Ces résultats étaient connus précédemment (Pour (4.10) voir [BC86], ou [CMS09 ; Cha10] pour les interprétations bijectives ; Pour (4.11) voir [LZ04, p.201] pour les références dans la littérature de physique mathématique, ou [BGR08] pour une démonstration similaire à celle que l'on esquisse ici, mais partant de la récurrence de Goulden et Jackson).

L'article [CC15] contient d'autres corollaires, notamment concernant d'autres sortes de fonctions génératrices comptant les mêmes objets, et nous y renvoyons directement les lecteurs et lectrices intéressés.

### 1.5. — Encore quelques commentaires, et questions ouvertes.

On pourra être frustré par le caractère un peu technique et terre à terre des idées de preuve que nous avons présentées. Malheureusement, nous avouons ne pas bien comprendre encore le teneur des astuces d'élimination de variables que nous avons utilisées, et malgré l'intérêt des récurrences de [GJ08 ; CC15], nous ne savons toujours pas répondre à la question de leur universalité. À ma connaissance, il existe quatre modèles de cartes, ou objets apparentés, pour lesquels on démontre une récurrence similaire :

- 1-2. Le cas des triangulations [GJ08] et celui des cartes générales [CC15]. Comme on l'a vue, on part de l'équation KP, applique une certaine spécialisation, et l'on arrive à se débarrasser des termes défectueux à l'aide de considérations combinatoires locales (l'approche de Goulden et Jackson était légèrement différente et moins économe, et c'est probablement la raison pour laquelle il n'ont pas pu traiter le cas que nous traitons ici ; mais l'approche présentée ici fonctionne dans les deux cas).
3. Dans [KZ15], Kazarian et Zograf obtiennent une formule similaire pour les cartes biparties :

$$(d+1)f_{g,d} = (2d-1)af_{g,d-1} + (d-2)bf_{g,d-2} + (d-1)^2(d-2)f_{g-1,d-2} + \sum_{i=0}^g \sum_{j=1}^{d-3} (4+6j)(d-2-j)f_{i,j}f_{g-i,d-2-j}, \quad (4.12)$$

où  $a = t + u + v$ ,  $b = 4(tu + tv + uv) - a^2$ , et où  $f_{g,d}$  compte les cartes biparties de genre  $g$  à  $d$  arêtes avec poids  $u, v, t$  par sommets blancs, sommets noirs, et faces. On notera la similarité évidente avec les deux formules précédentes, leur formule venant aussi de KP quoique la stratégie d'élimination soit différente.

4. Le cas des nombres de Hurwitz, avec la récurrence conjecturée par Pandaripande et démontrée par Okounkov. Dans [Oko00], il montre que les nombres  $h_{g,n}$  comptant le nombre de façons d'écrire l'élément neutre du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  comme un produit transitif de  $2g + 2n - 2$  transpositions satisfait la récurrence<sup>6</sup>

$$h_{g,n} = \frac{2}{d^2(d-1)} \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1, n_2 \geq 1}} \sum_{\substack{g_1+g_2+\ell=g+1 \\ g_1, g_2 \geq 0, \ell \geq 1}} \frac{n_1^{2\ell+1} n_2^2}{(2\ell)!} h_{g_1, n_1} h_{g_2, n_2}. \quad (4.13)$$

On notera encore la similarité avec les équations précédentes. La preuve de [Oko00] repose sur le fait que les nombres de Hurwitz donnent des fonctions tau de la hiérarchie 2-Toda. Il utilise ensuite l'équation (2.27) et pour se ramener à une équation à une seule fonction, Okounkov ne fait pas de combinatoire mais un calcul assez simple de commutateur dans l'espace de Fock qui lui permet d'obtenir une équation supplémentaire, qui joue le rôle de la quatrième équation de notre lemme 23.

Dans un travail en cours avec Olivier Bernardi et Éric Fusy, utilisant les trois plus petites équations de la hiérarchie KP et plus d'équations combinatoires, nous arrivons à traiter le cas des hexangulations biparties. Néanmoins, nous en sommes probablement à la préhistoire de ce travail, et n'avons que peu de recul sur la généralité de ces méthodes d'élimination, encore franchement ad-hoc. Non seulement leur universalité, mais le lien avec les équations de Tutte, avec les paramétrisations rationnelles issues de la récurrence topologique, et avec les bijections sont très mal compris.

Le peu que l'on comprenne de ces équations bijectivement est ce qui suit. Dans le cas à une face (on voit ici, par dualité, la récurrence de Goulden et Jackson comme comptant sur les cartes cubiques plutôt que les triangulations, il est donc pertinent de regarder le cas à une seule face), l'équation (4.1) et le théorème 9 deviennent respectivement la récurrence des trisections pour les cartes cubiques démontrée dans ma thèse [Cha09b ; Cha10] et la récurrence d'Harer-Zagier [HZ86], toutes deux démontrées bijectivement au chapitre précédent. Pour l'instant, les seuls autres cas connus concernent la récurrence de Goulden et Jackson pour les cartes cubiques : dans son mémoire de M2, Baptiste Louf en donne une démonstration bijective dans le cas planaire et dans le cas des cartes à 2 faces.

---

6. Cette réécriture compacte de la récurrence est due à Zagier (cours à l'IHP, 2017).



Le cas planaire est très élégant (et semble, par ailleurs, ne pas retomber dans le domaine des bijections planaires déjà connues), le cas à deux faces est lui déjà techniquement impressionnant et semble difficile à généraliser.

En conclusion, cette section pose au moins autant de questions qu'elle n'en résout ! On ne boudera pas son plaisir, néanmoins, d'avoir obtenu ce qui est de loin la meilleure façon de compter les cartes par genre et arêtes. Pour fêter ça, et l'illustrer, voici ce qui est probablement le plus grand nombre de cartes jamais explicitement publié !

$$Q_{88}^{1204} = 1862906329025507701429087194856860100752303478826464686651139110410$$

387054984633406629328445626044380448891813207054903364310524809879399094967820  
258812526084385830808407599414290212608226172827912661475233307248888352912188  
236827505495545940030239281097517641102625278577980334042531191615839435971381  
238442985272557737940508602379418053380055468031334194792488660488256615868275  
715024952114796549641692434096555741689704077427053916550874732696293467315972  
502367970052931863122426521591656787008918425266367776815979484653324132735464  
239243264087122129265643065102128138951200664785808912839699341915201661757147  
719431504361621530502762865959297335574566109556499555988029487044815777886344  
910830107549301856716619395089018876790653259330289017472545011468380710556592  
988421319671238710992032707995992680696249024429066458174458813710828052779932  
637014457767496941459836694971991832852086157157533944298920423738396621122612  
725147669068915419518739514855801364684077691911684183012730072950549770687087  
583388899638996847845498167479463773220397363054413702317312235505794587532540  
510632313283746908485035419494235516825166873309989838103888528436370711573233  
115436156760318899907228495170937150352769385212222829769585486524325982230171  
114903604780746278076755627618016334406195137314033120140609810578408363981422  
172428290380062380199313523803615399830351271250295095971548813467464879720487  
975120664523815230939080755678135721254285677385933815119509574954472906084246  
155118082399220961119696303578757173924144092298436942555001999341946593317991  
832309541198724720770637195052966704191603757076420696337859086511042608119677  
148389977705885670305305157270959769052120754369781444243301003013889576996291  
49086401186231136214696009383994818103565154868.

### 1.6. — Dernière minute : place aux jeunes

Alors que ce mémoire était sur le point d'être envoyé à ses rapporteurs, deux bonnes nouvelles nous sont parvenues presque simultanément venant de la jeune génération. Elles apportent quelques compléments à des remarques faites dans cette section, que nous avons choisi de donner ici, pour bien séparer la contribution de la jeunesse de notre propre travail.

Mathias Lepoutre, étudiant de 2ème année au LIX avec Marie Albenque et Vincent Pilaud, a annoncé une démonstration bijective de la rationalité en  $T$  de la série  $q_g(t)$  pour tout genre  $g \geq 0$ , que nous mentionnions comme un problème ouvert dans la remarque page 65. Ce très beau résultat repose sur l'introduction d'une nouvelle bijection de type « bourgeonnante » pour les cartes tétravalentes de genre supérieur. Comme nous l'avons dit en chapitre introductif, nous avons fait le choix de ne pas parler des questions de rationalité des séries de cartes dans ce mémoire. Il faudra lire la thèse de Mathias pour en savoir plus !

Baptiste Louf, étudiant de première année sous ma direction, a étendu le calcul d'Okounkov/Zagier pour l'équation (4.13) à un cas de nombres de Hurwitz pondérés introduits en section 3. Précisément, il montre que le nombre  $F_{g,d,(n_i)}^{(m)}$  de  $m$ -constellations à  $d$  hyper-

arêtes,  $n_i$  sommets de couleur  $i$  et de genre  $g$ , satisfait :

$$\binom{d}{2} F_{g,d,(n_i)}^{(m)} = \sum d_1 \prod_{i=1}^m \binom{y_i}{k_i} \binom{2 - 2g_2 + (m-1)d_2 - \sum y_i}{2g^* + 2 - \sum k_i} F_{g_1,d_1,(x_i)}^{(m)} F_{g_2,d_2,(y_i)}^{(m)}, \quad (4.14)$$

où la somme porte sur  $d_1 + d_2 = d$ ,  $g^* \geq 0$ ,  $k_i \leq y_i$  et  $0 \leq 2g^* + 2 - \sum k_i \leq 2 - 2g_2 + (m-1)d_2 - \sum y_i$ ,  $n_i = x_i + y_i - k_i$  et  $g = g_1 + g_2 + g^*$ . Cette équation interpole entre les cartes biparties<sup>7</sup> qui correspondent à  $m = 2$ , et la récurrence (4.13) qui est le cas limite  $m \rightarrow \infty$ . La méthode est celle d'Okoukov et repose sur un calcul dans l'espace de Fock qui permet d'exprimer les différentes fonctions  $\tau_n$  de la hiérarchie 2-Toda les unes en fonction des autres, puis d'utiliser l'équation (2.27).

## 2. — RAIL YARD GRAPHS ET PAVAGES PENTUS [Bou+17]

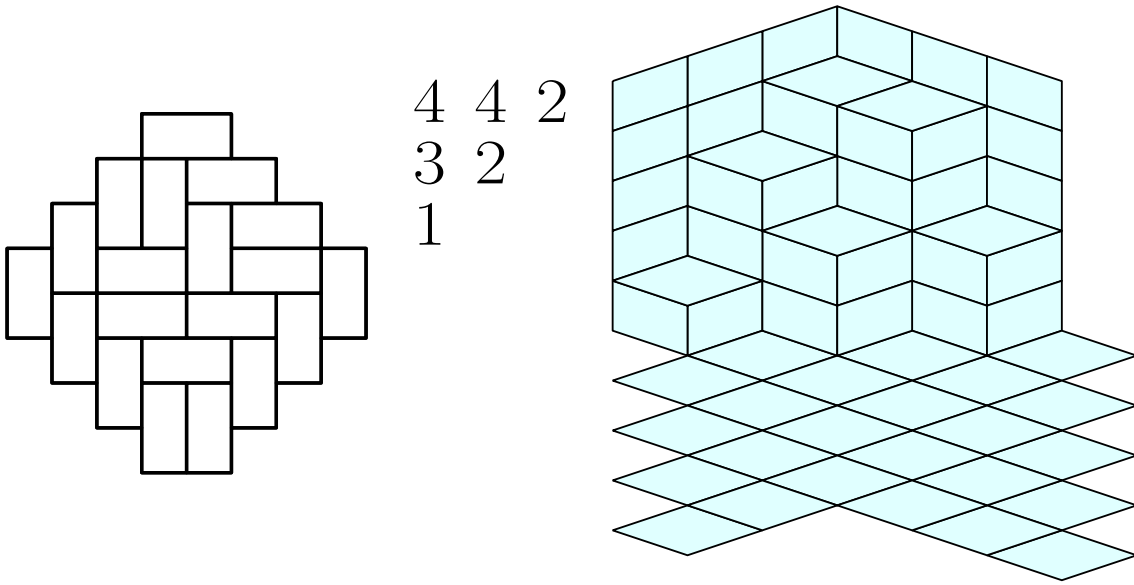


FIGURE 4.4 – À gauche, le diamant aztèque de taille 4, muni de l'un de ses  $2^{\binom{5}{2}}$  pavages par dominos. Au centre et à droite, une partition plane représentée comme tableau d'entiers puis comme un image « tridimensionnelle », que l'on peut aussi voir comme un pavage du plan par losanges. Les deux peuvent être vus comme des cas particuliers de configurations de dimères sur un Rail Yard Graph approprié, voir la figure 4.7 ci-dessous. Pour voir à quoi ressemblent typiquement de tels objets quand leur taille devient très grande, voir la figure 4.11 qui illustre l'existence de formes limites.

### 2.1. — Introduction aux résultats de [BCC17 ; Bou+17]

Nous quittons maintenant le monde des cartes, sans trop nous éloigner cependant : en étudiant des modèles de dimères<sup>8</sup>, nous restons dans le monde de la physique statistique bi-dimensionnelle, et plus particulièrement dans le cadre des modèles exactement solubles. Il s'agira bien de faire de la combinatoire, énumérative et bijective principalement. Notons que tous les modèles évoqués ici sont formulés en termes de *dimères*, mais ils peuvent dualement se voir comme des modèles de *pavages*, par losanges, dominos, ou d'autres formes, comme sur la figure 4.4.

7. notons que la récurrence est différente dans ce cas de celle de Kazarian-Zograf (4.12).

8. Les configurations de dimères sont également appelées *couplages parfaits* ou *perfect matchings*.

Cette section repose sur les articles [BCC17; Bou+17], dans lesquels nous introduisons de nouvelles familles de graphes plans infinis, les *pavages pentus* et les *Rail Yard Graphs*, sur lesquels un certain modèle de dimères (voir plus bas) peut être étudié. Chronologiquement, nous avons d’abord introduit les pavages pentus dans [BCC17], qui sont des modèles de pavages par dominos. C’est ensuite que nous nous sommes rendus compte [Bou+17] que la construction peut être généralisée, ce qui nous a conduit à introduire les Rail Yard Graphs. Dans ce document, nous parlerons donc surtout des Rail Yard Graphs, en nous inspirant fortement de [Bou+17].

Notre modèle des Rail Yard Graphs contient comme cas particuliers à la fois les pavages par dominos du diamant aztèque [Elk+92a; Elk+92b] et les partitions planes [Mac04]. Nous espérons que les qualités esthétiques de ces deux modèles, illustrées par la figure 4.4, suffiront à donner envie à nos lecteurs et lectrices d’en apprendre plus. Ce qui relie ces deux modèles est que tous deux peuvent être vus comme des processus de Schur [OR03], c’est à dire comme des suites de partitions d’entiers aléatoires dont les probabilités de transition sont données par des fonctions de Schur, que nous avons évoqués au chapitre 2. Si la relation entre partitions planes et processus de Schur est bien connue, la correspondance dans le cas du diamant aztèque apparaît implicitement dans [Joh02] et nous sommes, à notre connaissance, les premiers à l’avoir rendue totalement explicite dans [BCC17].

L’intérêt de la reformulation de ces deux modèles comme processus de Schur est double : d’une part, elle permet d’utiliser le formalisme des opérateurs de vertex pour calculer les fonctions de partitions et de nombreuses observables, et d’autre part, elle conduit à une généralisation naturelle des modèles, qui est réalisée par les Rail Yard Graphs. On pourra consulter les introductions de [BCC17; Bou+17] pour une discussion détaillée de l’historique du sujet, que nous résumons ici. Nous avons évoqué au chapitre 2 le lien entre l’énumération de partitions planes, la formule de Cauchy, et la correspondance RSK (voir [Sta99, chap. 7]), lien qui remonte sous cette forme au moins à Bender et Knuth [BK72]. Okounkov [Oko01; Oko02] a ensuite défini la mesure de Schur sur les partitions d’entier, puis avec Reshetikhin introduit les processus de Schur [OR03; OR07]. Ceux-ci contiennent comme cas particulier une généralisation des partitions planes, les partitions planes avec une « frontière arrière » ce qui a conduit à de nombreux travaux [Bor07; BF14; Bor11; Bou+12; BF15].

Notre contribution peut être vue comme la formulation d’un modèle combinatoire général qui réalise le « processus de Schur » de manière bi-dimensionnelle. Ce modèle est un modèle de dimères sur certains graphes plans, et se reformule par dualité comme un modèle de pavages, notamment par dominos dans certains cas, contenant ainsi les exemples du diamant aztèque et des partitions pyramides introduites par Kenyon [Ken05; You09]. Nous exposons ci-dessous les résultats principaux, qui sont notamment le calcul des fonctions de partitions, ainsi que des fonctions de corrélations dont nous montrons qu’elles sont déterminantales. Cela n’avait été fait que dans le cas des partitions planes [OR07] (voir aussi [BF14, Section 5]) et dans le cas particulier du diamant aztèque [CY14] au moyen d’un calcul difficile et très astucieux. Ici, tous ces résultats seront naturellement regroupés dans un formalisme naturel lié à la construction d’opérateurs appropriés agissant sur l’espace de Fock.

## 2.2. — Rail Yard Graphs et configurations de dimères

**Rail Yard Graphs** Commençons par définir les graphes sur lesquels vont vivre nos dimères. On fixe deux entiers  $\ell, r$  tels que  $\ell \leq r$ , et l’on note  $[\ell..r]$  l’ensemble des entiers entre  $\ell$  et  $r$  inclus. On considère alors deux suites binaires indexées par les éléments de  $[\ell..r]$  :

- la suite LR  $\underline{a} = (a_\ell, a_{\ell+1}, \dots, a_r) \in \{L, R\}^{[\ell..r]}$ ,

— la suite de signes  $\underline{b} = (b_\ell, b_{\ell+1}, \dots, b_r) \in \{+, -\}^{[\ell..r]}$ .

Le *Rail Yard Graph* (RYG) associé aux entiers  $\ell$  et  $r$ , à la suite LR  $\underline{a}$  et à la suite de signes  $\underline{b}$ , et noté  $\text{RYG}(\ell, r, \underline{a}, \underline{b})$ , est le graphe biparti plan défini comme suit. Son ensemble de sommet est

$$[2\ell - 1..2r + 1] \times (\mathbb{Z} + 1/2),$$

et l'on dit qu'un sommet est *pair* ou *impair* suivant que son abscisse est paire ou impaire, respectivement. Chaque sommet pair  $(2m, y)$ ,  $m \in [\ell..r]$ , est incident à trois arêtes : deux arêtes *horizontales* connectées aux sommets impairs  $(2m - 1, y)$  et  $(2m + 1, y)$ , et une arête *diagonale* connectée :

- au sommet impair  $(2m - 1, y + 1)$  si  $a_m = L$  et  $b_m = +$ ,
- au sommet impair  $(2m - 1, y - 1)$  si  $a_m = L$  et  $b_m = -$ ,
- au sommet impair  $(2m + 1, y + 1)$  si  $a_m = R$  et  $b_m = +$ ,
- au sommet impair  $(2m + 1, y - 1)$  si  $a_m = R$  et  $b_m = -$ .

Nous espérons que cela rend clair le choix des symboles  $L, R$  et  $+, -$ . On obtient ainsi comme promis un graphe plan, biparti. Si  $e$  en est une arête, on écrira  $e = (\alpha, \beta)$  si  $\alpha$  est l'extrémité paire de  $e$  et  $\beta$  son extrémité impaire. Si  $v$  est un sommet, on écrira  $v^x \in \mathbb{Z}$  son abscisse, et  $v^y \in \mathbb{Z} + 1/2$  son ordonnée.

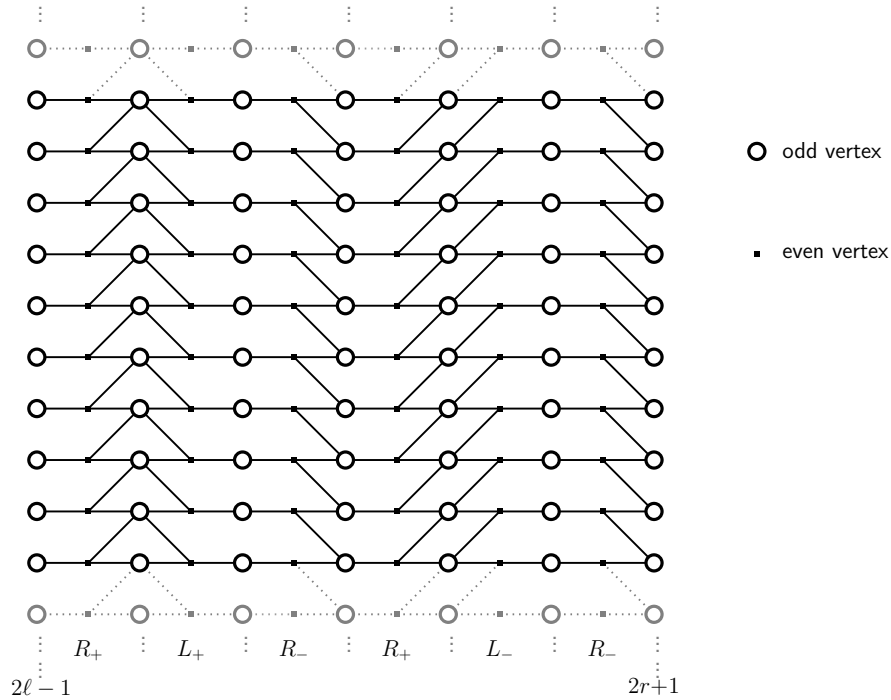


FIGURE 4.5 – Le RYG associé à la suite LR  $RLRRLR$  et à la suite de signes  $++-+--$  (avec  $\ell = 1$ ,  $r = 6$ ). Il est infini et périodique dans la direction verticale, mais fini dans la direction horizontale.

La figure 4.5 montre le RYG associé à la suite LR  $RLRRLR$  et à la suite de signes  $++-+--$ . Notons qu'un RYG est infini et 1-périodique dans la direction verticale. Quand  $\ell = r$ , les suites LR et de signe consistent chacune d'un unique élément, et le RYG correspondant, dit *élémentaire*, peut être de quatre types, voir la figure 4.6. Étant donnés deux RYG  $\text{RYG}(\ell, r, \underline{a}, \underline{b})$  et  $\text{RYG}(\ell', r', \underline{a}', \underline{b}')$  tels que  $\ell' = r + 1$ , on définit leur *concaténation* en prenant l'union de leur ensemble de sommets et d'arêtes. Elle n'est autre que  $\text{RYG}(\ell, r', \underline{aa'}, \underline{bb'})$  où  $\underline{aa'}$  et  $\underline{bb'}$ . Clairement, tout RYG s'obtient par la concaténation de RYG élémentaires.

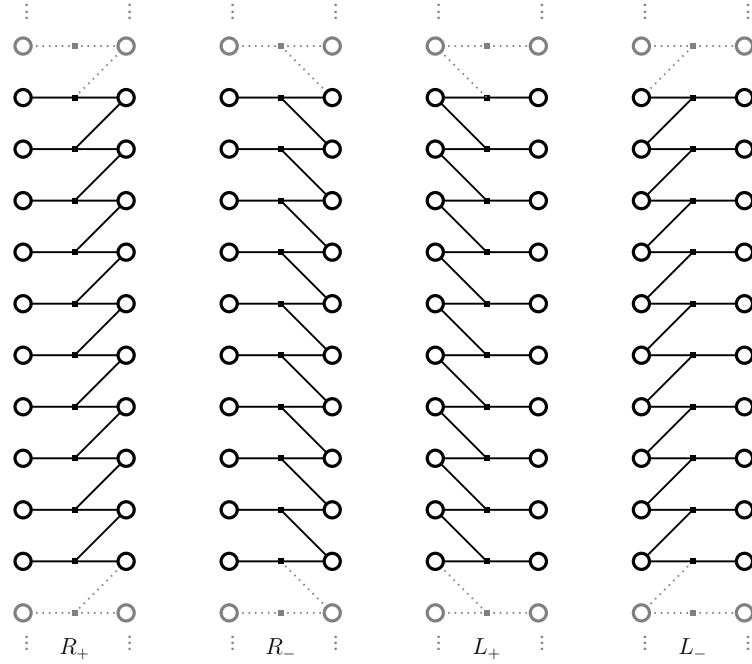


FIGURE 4.6 – Les quatre Rail Yard Graphs élémentaires  $R_+$ ,  $R_-$ ,  $L_+$ , et  $L_-$  (à translation horizontale près)

Le *bord gauche* (resp. *bord droit*) d'un RYG est formé des tous les sommets impairs d'abscisse  $2\ell - 1$  (resp.  $2r + 1$ ). Les sommets qui ne sont pas sur les bords sont dits *internes*. Dans le plan, le graphe délimite des faces, et celles qui sont bornées sont dites *internes*. Notons que les faces internes peuvent être bordées par 4, 6, ou 8 arêtes. Enfin, remarquons que toutes nos définitions font sens dans le cas  $\ell = -\infty$  et/ou  $r = +\infty$ , avec des suites LR et de signes infinies. Dans ce cas, le RYG emplit tout le plan (ou demi-plan), les bords étant envoyés « à l'infini ».

**Configurations de dimères admissibles et pures** Nous décrivons maintenant les configurations de dimères que nous allons autoriser sur nos graphes. Étant donné un Rail Yard Graph  $\text{RYG}(\ell, r, \underline{a}, \underline{b})$  avec  $\ell, r$  finis, une *configuration de dimères admissible* est un appariement partiel<sup>9</sup> de ce graphe tel que

- chaque sommet interne est couvert (i.e. apparié).
- il existe un entier  $n \geq 0$  tel que : tout sommet du bord gauche  $(2\ell - 1, y)$  est couvert pour  $y > n$  et découvert si  $y < -n$ , et tout sommet du bord droit  $(2r + 1, y)$  est couvert si  $y < -n$  et découvert si  $y > n$ ,
- seul un nombre fini d'arêtes diagonales sont couvertes.

Une *configuration de dimères pure* est une configuration admissible pour laquelle la seconde propriété ci-dessus est vrai pour  $n = 0$  : en d'autres termes les sommets découverts sont précisément les sommets du bord gauche d'abscisse négative et les sommets du bord droit d'abscisse positive. Un coup d'œil à la figure 4.7 devrait ici rendre service. La *configuration fondamentale* et la configuration de dimères pure dans laquelle aucune arête diagonale n'est couverte (il n'est pas difficile de se convaincre de son existence et

9. appariement partiel : sous-ensemble d'arêtes ne partageant pas de sommets. On dira qu'une arête est *couverte* si elle fait partie de ce sous-ensemble, et qu'un sommet est *couvert* s'il est incident à une arête couverte (et *découvert* sinon).

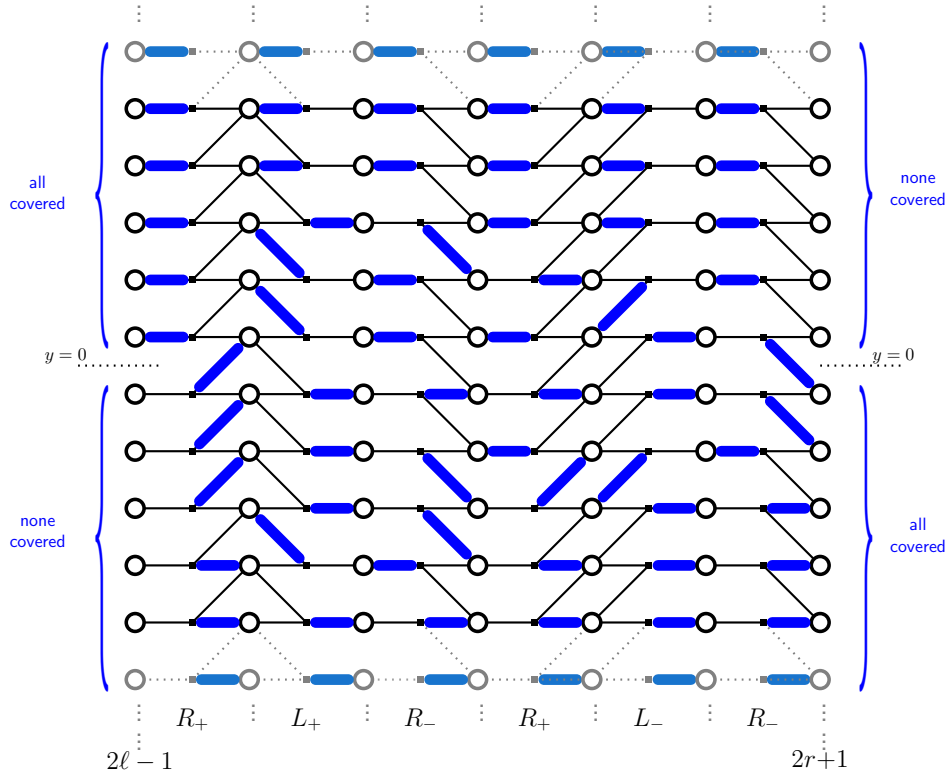


FIGURE 4.7 – Une configuration de dimères pure sur le RYG de la figure 4.5.

unicité, par exemple par induction sur  $r - \ell$ ). Remarquons que toute configuration admissible coïncide avec la configuration fondamentale hors d'une région finie. Une *configuration de dimères élémentaire* est une configuration admissible d'un RYG élémentaire, voir figure 4.8).

Il est intéressant de considérer les cas limites  $\ell = -\infty$  et/ou  $r = +\infty$ , ce qui requiert une légère adaptation de nos définitions. Une configuration admissible (resp. pure, resp. la fondamentale) est un appariement partiel tel que tous les sommets internes sont couverts, et telle qu'il existe deux entiers  $\ell', r'$  tels que :

- à l'intérieur de la bande  $[2\ell' - 1, 2r' + 1] \times \mathbb{R}$ , on voit une configuration admissible (resp. pure, resp. la fondamentale) au sens précédent,
- hors de cette bande, toutes les arêtes couvertes sont horizontales.

**Flips !** On introduit maintenant une transformation locale sur les configurations admissibles appelée le *flip*. Soit  $G$  un RYG,  $C$  une configuration admissible sur  $G$ , et  $f$  une face interne de  $G$ . Si exactement la moitié des arêtes bordant  $f$  appartiennent à  $C$ , alors enlever ces arêtes de  $C$  et les remplacer par les autres arêtes donne une nouvelle configuration  $C'$ . L'opération qui remplace  $C$  par  $C'$  est appelée le *flip* de la face  $f$ , voir la figure 4.9.

On dit que le flip de la face  $f$  est *positif* si après le flip, les arêtes de  $f$  appartenant à la configuration de dimères sont orientées des sommets impairs vers les sommets pairs, dans le sens antihoraire autour de  $g$ . Le flip est *négatif* sinon. La théorie générale des configurations de dimères [Pro02, Theorem 2] nous dit que la relation de flip positif équipe l'ensemble de toutes les configurations pures d'un RYG donné d'une structure de treillis distributif. En particulier, chaque RYG a une unique configuration pure *minimale*, à partir de laquelle toutes les configurations peuvent s'obtenir en utilisant uniquement des flips positifs. En notant que la configuration minimale est la seule à partir de laquelle aucun flip négatif n'est possible, on vérifie aisément que la configuration minimal coïncide avec

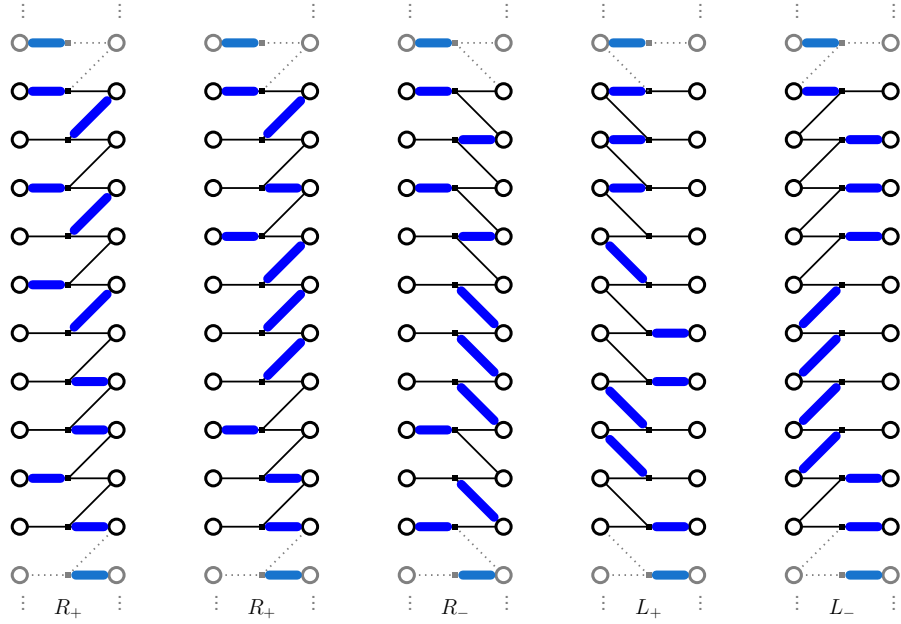


FIGURE 4.8 – Quelques configuration de dimères élémentaires. Le RYG sous-jacent a type  $R+$  dans les deux premiers cas, puis  $R-$ ,  $L+$ ,  $L-$ . Hors de la région représentée, la configuration se répète à l'identique vers le haut/bas, comme sur le dernier niveau représenté.

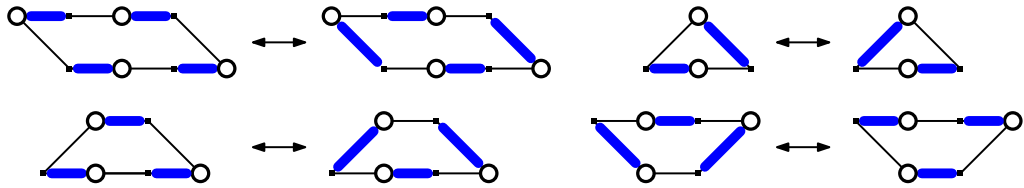


FIGURE 4.9 – Exemples de flips. Tous sont positifs quand on les effectue de gauche à droite.

la configuration fondamentale que nous avons définie plus haut. La *distance de flips* entre deux configurations est le nombre minimal de flips pour aller de l'une à l'autre. Quand l'une des configuration est la fondamentale, on peut réaliser la distance de flips en n'utilisant que des flips positifs.

### 2.3. — Résultats principaux de [Bou+17]

Le premier résultat de [Bou+17], conséquence directe d'un lien avec les processus de Schur, est une formule pour la fonction de partition du modèle de dimères sur un RYG donné. Précisément, soit un Rail Yard Graph  $G = \text{RYG}(\ell, r, \underline{a}, \underline{b})$ , et une suite de variables formelles  $\underline{x} = (x_\ell, x_{\ell+1}, \dots, x_r)$ , où l'on autorise  $\ell = -\infty$  ou  $r = +\infty$ . Le *poids* d'une configuration admissible  $C$  sur  $G$  est défini par

$$w(C) = \prod_{i=\ell}^r x_i^{d_i(C)} \quad (4.15)$$

où  $d_i(C)$  est le nombre de dimères diagonaux dans la colonne  $i$  (i.e. le nombre d'arêtes diagonales couvertes incidentes à un sommet pair d'abscisse  $2i$ ). Ce poids est bien défini puisque  $\sum d_i(C)$  est fini par définition d'une configuration admissible. La *fonction de partition multivariée du modèle de dimère sur les RYG*, notée  $Z(G; \underline{x})$ , est la somme des poids de toutes les configurations de dimères *pures* sur  $G$ .

**Théorème 13 (Fonction de partitions des dimères sur les RYG [Bou+17]).**

La fonction de partition multivariée du modèle de dimères sur les RYG s'écrit

$$Z(G; \underline{x}) = \prod_{\substack{\ell \leq i < j \leq r \\ b_i = +, b_j = -}} z_{ij} \quad (4.16)$$

où

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 + x_i x_j & \text{si } a_i \neq a_j, \\ (1 - x_i x_j)^{-1} & \text{si } a_i = a_j. \end{cases} \quad (4.17)$$

**Remarque 10.** La fonction de partition est toujours une série formelle bien définie, puisque presque tous les facteurs donnent une contribution de 1 à chaque monôme donné dans (4.16).

Une spécialisation intéressante donne le modèle  $q$ -RYG : étant donnée une variable  $q$ , on attache à chaque configuration un poids  $q^d$  où  $d$  est la distance de flips à la configuration minimale. On vérifie (voir [Bou+17]) que l'on peut obtenir ce poids en spécialisant, pour  $i \in [\ell..r]$ ,  $x_i = q^i$  si  $b_i = -$ , et  $x_i = 1/q^i$  si  $b_i = +$ . Notons que si  $\ell$  ou  $r$  sont infinis, cette spécialisation peut être mal définie. Une condition suffisante pour que tout se passe bien la *condition de finitude*

- si  $\ell = -\infty$ , il existe  $\ell'$  fini tel que  $b_i = +$  pour tout  $i < \ell'$ ,
- si  $r = +\infty$ , il existe  $r'$  fini tel que  $b_i = -$  pour tout  $i > r'$ .

**Théorème 14 (Fonction génératrice par flips [Bou+17]).** Sous la condition de finitude, la fonction de partition du modèle  $q$ -RYG, i.e. la fonction génératrice des configurations par leur distance de flips à la configuration minimale est donnée par :

$$Z(G; q) = \prod_{\substack{\ell \leq i < j \leq r \\ b_i = +, b_j = -}} z_{ij} \quad (4.18)$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 + q^{j-i} & \text{si } a_i \neq a_j, \\ (1 - q^{j-i})^{-1} & \text{si } a_i = a_j. \end{cases} \quad (4.19)$$

**Remarque 11.** La forme produit (4.18) est une formule des équerres : si l'on interprète la suite de signes comme décrivant la forme d'un diagramme de Young (possiblement infini) comme sur la figure 4.10. La condition de finitude assure qu'il n'y a qu'un nombre fini d'équerres de longueur donnée.

## 2.4. — Corrélations

Les résultats précédents sont jolis, mais techniquement, ils sont une conséquence directe d'un lien avec les processus de Schur (et de la Proposition 11 page 29). Notre principal mérite jusque-là est donc la description d'un joli modèle de dimères, bien adapté au formalisme des processus de Schur.

Nous décrivons maintenant des résultats plus difficiles et techniquement plus originaux (ce n'est pas pour ça qu'ils sont plus importants). Le formalisme des processus de Schur et des opérateurs de vertex est non seulement bien adapté au calcul des fonctions de partitions (i.e. à l'énumération), mais également au calcul des *corrélations* entre les



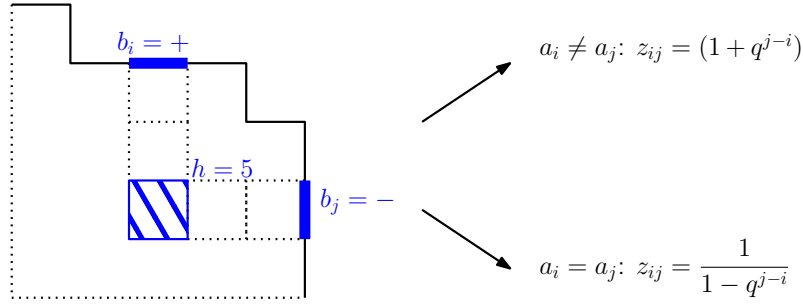


FIGURE 4.10 – Interprétation du théorème 14 comme une formule des équerres. En représentant la suite de signes  $\underline{b}$  comme un chemin dont les pas horizontaux/verticaux correspondent aux  $+/-$ , on obtient un diagramme de Young dont les cases sont indexées par les paires  $(i, j)$  telles que  $i < j$ ,  $b_i = +$ ,  $b_j = -$ . La quantité  $h = j - i$  est la « longueur d'équerre » de la case. Dans notre formule, chaque case d'équerre  $h$  donne un facteur  $1 + q^h$  ou  $(1 - q^h)^{-1}$ , suivant le résultat de la comparaison entre les termes  $a_i$  and  $a_j$  de la suite LR  $\underline{a}$ .

dimères. Par exemple, les opérateurs de vertex permettent assez directement de calculer des fonctions de partitions contraintes, dans lesquelles on ne considère que des configurations dans lesquelles certains dimères sont présents à des positions fixées. Néanmoins, le formalisme et les résultats existants [OR03], une fois traduits dans le langage des RYG, ne permettent de localiser qu'un seul type de dimères (les dimères horizontaux). Une avancée de l'article [Bou+17], qui sous-tend le théorème ci-dessous, a été de construire des opérateurs permettant de localiser *tous* les types de dimères, et ainsi de calculer entièrement les corrélations dans le modèle qui nous intéresse. Nous décrivons maintenant ce résultat.

Pour l'instant, nous avons introduit la fonction de partition du modèle de dimères sur les RYG, qui dépend d'une suite de variables formelles  $\underline{x}$  en général et d'une unique variable  $q$  dans la spécialisation « des flips ». Pour une interprétation statistique ou probabiliste, on considèrera les  $x_i$  ou  $q$  comme des nombres réels positifs ou nuls, tels que la série  $Z(g; \underline{x})$  soit convergente. Comme on voit dans le théorème 13, c'est le cas si et seulement si

$$x_i x_j < 1 \text{ pour tous } i < j \text{ tels que } a_i = a_j, b_i = + \text{ et } b_j = - \quad (4.20)$$

et, quand  $\ell$  ou  $r$  est infini,

$$\sum_{\substack{\ell \leq i < j \leq r \\ b_i = +, b_j = -}} x_i x_j < \infty. \quad (4.21)$$

Dans le modèle  $q$ -RYG, (4.20) est satisfaite dès que  $q < 1$ , et (4.21) revient à la condition de finitude déjà énoncée.

Si l'on suppose le modèle *bien défini*, à savoir que (4.20) et (4.21) sont satisfaites, on peut interpréter  $w(C)/Z(G; \underline{x})$  comme la probabilité de la configuration  $C$ . Pour un ensemble fini d'arêtes  $E$ , on note  $P_{G; \underline{x}}(E)$  la probabilité que toutes les arêtes de  $E$  soient couvertes par un dimère. Le résultat probabiliste principal de [Bou+17] est une expression déterminantale explicite pour  $P_{G; \underline{x}}(E)$ , qui demande d'introduire quelques notations. Pour  $k, k'$  entiers, notons

$$F_k(z) = \frac{\prod_{\substack{i: (a_i, b_i) = (R, +) \\ 2i < k}} (1 + x_i z) \prod_{\substack{j: (a_j, b_j) = (L, -) \\ 2j > k}} \left(1 - \frac{x_j}{z}\right)}{\prod_{\substack{i: (a_i, b_i) = (L, +) \\ 2i \leq k}} (1 - x_i z) \prod_{\substack{j: (a_j, b_j) = (R, -) \\ 2j \geq k}} \left(1 + \frac{x_j}{z}\right)}. \quad (4.22)$$

et

$$G_{k,k'}(z, w) = \frac{F_k(z)}{F_{k'}(w)} \frac{\sqrt{zw}}{z-w}. \quad (4.23)$$

Notons que tous les produits dans (4.22) sont convergents par (4.21), donc  $F_k(z)$  est une fonction méromorphe dans tout le plan complexe, avec des zéros et des pôles sur l'axe réel.

Pour  $\alpha, \beta$  deux sommets de  $G$  tels que  $\alpha^x$  est pair et  $\beta^x$  est impair, on définit :

$$C_{\alpha,\beta} = \frac{1}{(2i\pi)^2} \oint_{C_z} \oint_{C_w} G_{\alpha^x, \beta^x}(z, w) \frac{w^{\beta^y}}{z^{\alpha^y}} \frac{dz}{z} \frac{dw}{w} \quad (4.24)$$

où les contours satisfont les conditions suivantes : (i)  $C_z$  entoure 0 et tous les pôles négatifs de  $F_{\alpha^x}(z)$ , mais pas les positifs ; (ii)  $C_w$  entoure 0 et tous les zéros positifs de  $F_{\beta^x}(w)$ , mais pas les négatifs ; (iii)  $C_z$  et  $C_w$  sont disjoints, et  $C_z$  entoure  $C_w$  ssi  $\alpha^x < \beta^x$ . De tels contours existent bel et bien, voir [Bou+17, section 4].

On peut maintenant énoncer le théorème promis. Rappelons que pour une arête  $e$ , on note  $e = (\alpha, \beta)$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont respectivement l'extrémité paire et impaire de  $e$ .

**Théorème 15 (Corrélations entre les dimères dans les RYG [Bou+17]).** *Soit  $E = \{e_1, \dots, e_s\}$  un ensemble fini d'arêtes de  $\text{RYG}(\ell, r, \underline{a}, \underline{b})$ , avec  $e_i = (\alpha_i, \beta_i)$ . Alors on a :*

$$P_{G;\underline{x}}(e) = (-1)^{H(e)} \underline{x}^{\underline{n}} \det_{1 \leq i, j \leq s} (C_{\alpha_i, \beta_j}), \quad (4.25)$$

où  $h(e)$  est le nombre d'arêtes horizontales de  $e$  dont l'extrémité droite est paire, où  $\underline{x}^{\underline{n}} = x_\ell^{n_\ell} \dots x_r^{n_r}$  avec  $n_k$  le nombre d'arêtes diagonales de  $E$  dans la colonne  $k$ , et  $C$  défini comme dans (4.24).

**Remarque 12.** *Les plus concrets de nos lecteurs ou lectrices pourront légitimement s'interroger sur l'intérêt d'un tel énoncé, étant donné que nos expressions « explicites » font intervenir des intégrales de contour et ne le sont donc pas vraiment. En fait, il s'avère que ces expressions sont extrêmement utiles pour les applications, notamment asymptotiques. Par exemple, retrouver les théorèmes de formes limites à partir des expressions intégrales peut être fait en recyclant une partie des outils développés par Okounkov et Reshetikhin dans leurs travaux sur les partitions planes. Dans [Bou+17, section 6], on donne par exemple une nouvelle démonstration selon ces lignes du phénomène du cercle arctique pour les pavages du diamant aztèque.*

## 2.5. — Quelques éléments des démonstrations : diagrammes mayas et opérateurs de vertex

On rappelle que les diagrammes maya, introduits au chapitre 2, sont des suites binaires de particules et antiparticules  $\bullet$  et  $\circ$  indexées par  $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ , qui stationnent respectivement à  $\bullet$  et à  $\circ$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ . On se restreindra ici aux diagrammes de charge zéro, pour lequel le nombre d'antiparticules en position négative est égal au nombre de particules en position positive.

Il se trouve que les diagrammes mayas indexent naturellement les états de bords des Rail Yard Graphs. Considérons une configuration admissible  $C$  de  $G = \text{RYG}(\ell, r, \underline{a}, \underline{b})$ . où  $\ell$  et  $r$  sont finis. L'état de bord gauche  $\mathbf{I}(C)$  est défini en posant, pour  $k \in \mathbb{Z} + 1/2$ ,

$$\mathbf{I}(C)_k = \begin{cases} \circ & \text{si } (2\ell - 1, k) \text{ est couvert par un dimère,} \\ \bullet & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.26)$$

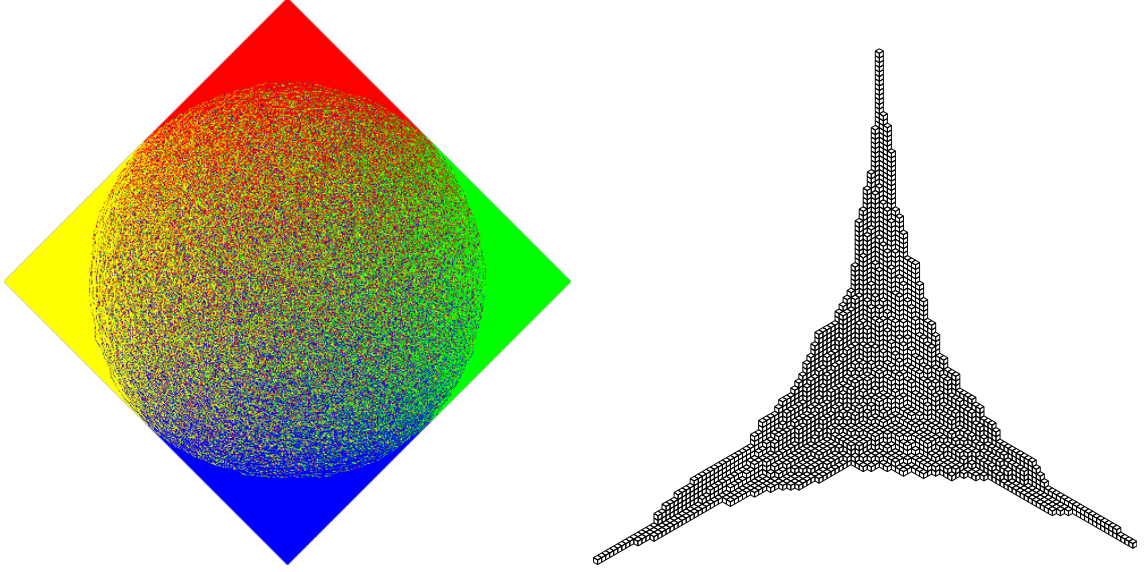


FIGURE 4.11 – À gauche, un pavage aléatoire uniforme du diamant aztèque de taille  $n$  quand  $n \rightarrow \infty$  exhibe un phénomène de « cercle arctique » : avec probabilité tendant vers 1, la configuration est gelée hors du cercle inscrit, et reste « non déterministe » à l'intérieur. Ce résultat de [Elk+92b], maintenant bien connu, se retrouve aisément à partir d'expressions comme celle du théorème 15. La démonstration utilise des outils similaires à celle d'Okounkov et Reshetikhin pour la forme limite des partitions planes [OR03], illustrée sur la figure gauche. Crédit image de droite : Antoine Doeraene ; les couleurs correspondent aux quatre types de parité/orientation des dominos.

De manière similaire, l'état de bord droit  $\mathbf{r}(C)$  est défini par

$$\mathbf{r}(C)_k = \begin{cases} \bullet & \text{si } (2r+1, k) \text{ est couvert par un dimère,} \\ \circ & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.27)$$

pour tout  $k \in \mathbb{Z}+1/2$ . Voir la figure 4.12(a). On notera que par définition des configurations admissibles,  $\mathbf{l}(C)$  et  $\mathbf{r}(C)$  sont des diagrammes mayas.

Une configuration pure  $\mathbf{a}$ , par définition, ses deux bords égaux au diagramme de la partition vide  $\emptyset = \bullet^\infty \circ^\infty$ .

La proposition suivante utilise les notations de la section 3 du chapitre 2.

**Proposition 24** (Décomposition en matrices de transfert). *Étant donné un Rail Yard Graph  $G = \text{RYG}(\ell, r, \underline{a}, \underline{b})$  et deux diagrammes maya  $\mathbf{l}$  et  $\mathbf{r}$ , la somme des poids (4.15) de toutes les configurations de dimères admissibles de  $G$  d'état de bord gauche  $\mathbf{l}$  et d'état de bord droit  $\mathbf{r}$  est donné par l'élément de matrice*

$$Z(G, \mathbf{l}, \mathbf{r}; \underline{x}) = \langle \mathbf{l} | \Gamma_{a_\ell b_\ell}(x_\ell) \Gamma_{a_{\ell+1} b_{\ell+1}}(x_{\ell+1}) \cdots \Gamma_{a_r b_r}(x_r) | \mathbf{r} \rangle, \quad (4.28)$$

où les quatre opérateurs de vertex  $\Gamma_{L/R+/-}$  définis en section 3 du chapitre 2. En particulier la fonction de partition s'écrit

$$Z(g; \underline{x}) = \langle \emptyset | \Gamma_{a_\ell b_\ell}(x_\ell) \Gamma_{a_{\ell+1} b_{\ell+1}}(x_{\ell+1}) \cdots \Gamma_{a_r b_r}(x_r) | \emptyset \rangle. \quad (4.29)$$

*Idée de démonstration.* On montre en fait que, si l'on décompose notre RYG en RYG élémentaires, l'ensemble des états de bords que l'on lit forme une suite de partitions (=diagrammes mayas) entrelacées selon les quatre relations d'entrelacement  $\prec, \succ, \prec', \succ'$ . Plus précisément, l'ensemble des configurations de dimères sur  $\text{RYG}(\ell, r, \underline{a}, \underline{b})$  dont les

états de bords sont  $\mathbf{l}$  et  $\mathbf{r}$  est en bijection avec les suites de diagrammes maya de charge zéro (i.e., de partitions)

$$\mathbf{l} = \mathbf{m}_{\ell-\frac{1}{2}}, \mathbf{m}_{\ell+\frac{1}{2}}, \dots, \mathbf{m}_{r+\frac{1}{2}} = \mathbf{r}$$

où chaque  $\mathbf{m}_{i-\frac{1}{2}}$  est entrelacée avec  $\mathbf{m}_{i+\frac{1}{2}}$  selon la relation  $\prec, \succ, \prec', \succ'$  selon que  $a_i b_i$  égale  $L-, L+, R-, R+$ , respectivement.

Clairement, par concaténation, il suffit d'examiner le cas des RYG élémentaires. Examinons par exemple le cas d'un RYG élémentaire de type  $L+$ . Il s'agit alors de montrer que les configurations de dimères sur ce RYG élémentaire sont en bijection avec les paires d'états de bord  $\mathbf{l}$  et  $\mathbf{r}$  tels que  $\mathbf{l} \prec \mathbf{r}$ , et que le nombre d'arêtes diagonales correspond à l'incrément de taille des partitions. Pour cela, on fait d'abord l'observation suivante : la relation  $\lambda \prec \mu$  sur deux partitions d'entiers est équivalente au fait que le diagramme maya de  $\mu$  s'obtient à partir de celui de  $\lambda$  en faisant sauter un certain nombre de particules blanches d'une case vers le bas. Nos Rail Yard Graphs sont précisément construits pour permettre ce type de dynamique, voir la figure 4.12(b,c,d), dont les explications en légende devraient suffire à convaincre nos lecteurs et lectrices (voir [Bou+17] pour plus de détails).

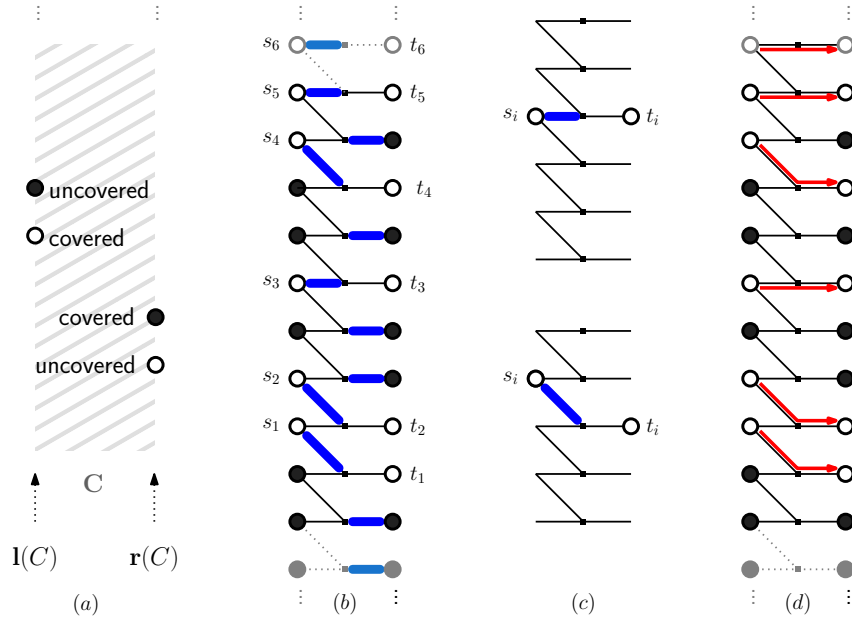


FIGURE 4.12 – (a) Les règles (4.26)-(4.27) qui définissent les deux diagrammes maya  $\mathbf{l}(c)$  et  $\mathbf{r}(c)$ . (b) une configuration admissible sur le Rail Yard Graph élémentaire  $L+$ . Les ordonnées des particules blanches sont notées de bas en haut,  $s_1, \dots$  à gauche et  $t_1, \dots$  à droite. (c) Si le sommet du bord gauche à l'ordonnée  $s_i$  est couvert par un dimère horizontal (resp. diagonal), alors le sommet droit à l'ordonnée  $s_i$  (resp.  $s_i - 1$ ) est nécessairement découvert. Il y a donc une particule blanche sur le bord droit à cette ordonnée, et c'est bien la  $i$ -ème, par induction. On voit donc que  $s_i - t_i \in \{0, 1\}$  et que  $\sum_i (s_i - t_i)$  est le nombre de dimères diagonaux. De plus, puisque les dimères incidents au bord gauche peuvent être retrouvés à partir des suites  $(s_i)$  et  $(t_i)$ , il est clair qu'il existe au plus une configuration de dimères d'états de bord donnés  $\mathbf{l}$  et  $\mathbf{r}$ , et qu'il en existe une ssi  $s_i - t_i \in \{0, 1\}$  pour tout  $i$ . (d) La condition  $s_i - t_i \in \{0, 1\}$  s'interprète comme le fait que les particules blanches peuvent « sauter vers le bas » de 0 ou 1. Cela correspond exactement (on le vérifie aisément) à la relation d'entrelacement  $\prec$  sur les partitions. Les cas des Rail Yard Graph élémentaires  $L-, R+,$  et  $R-$  ont une interprétation similaire, respectivement avec les particules blanches sautant vers le haut, les noires sautant vers le haut, et les noires sautant vers le bas, à chaque fois de 0 ou 1. La encore, on vérifie aisément que la relation correspondante sur les partitions est  $\succ, \succ',$  et  $\prec',$  respectivement.

□

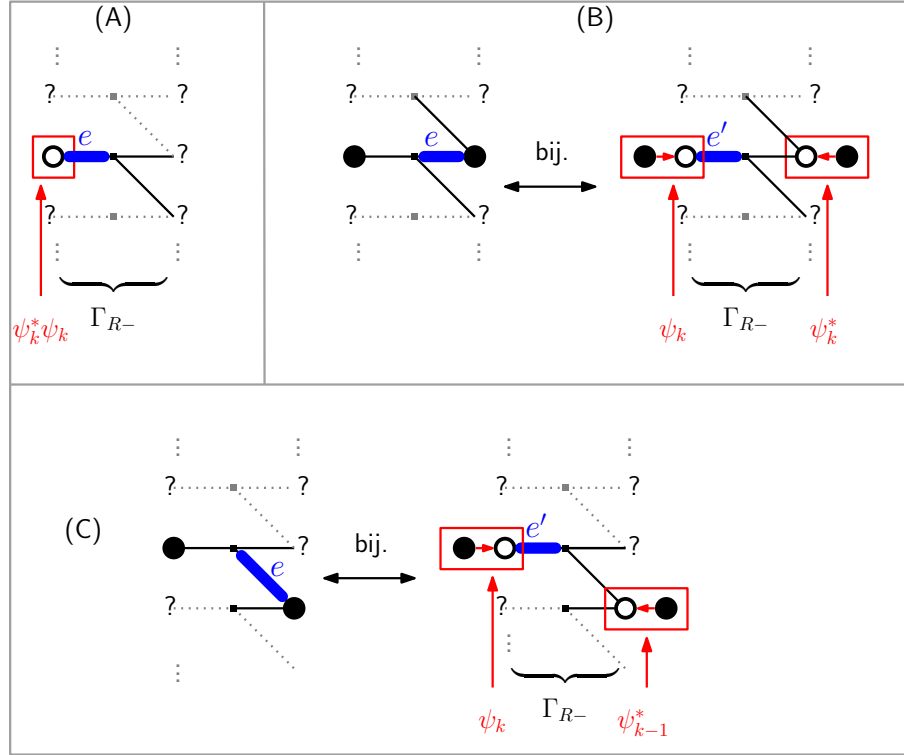


FIGURE 4.13 – Localisation des dimères dans le cas de RYG élémentaires de type  $R-$  (le cas  $R+$  est similaire). Les particules (resp. arêtes) dont l'état n'est pas fixé par la discussion apparaissent comme des points d'interrogation (resp. lignes pointillées). (A) Il y a un dimère horizontal dans la colonne gauche ssi le somme gauche impair porte une particule blanche. On peut la localiser par l'opérateur  $\psi_k^* \psi_k$ . (B) Les configurations avec un dimère horizontal dans la colonne de droite sont en bijection avec des configurations ayant un dimère dans la colonne gauche, telles que les deux particules à ce niveau sont blanches. L'insertion d'un opérateur  $\psi_k^*$  (resp.  $\psi_k$ ) à droite (resp. gauche) localise ces configurations. (C) Cas d'un dimère diagonal.

La théorie générale des processus de Schur (ou plus simplement, les relations de commutation entre les quatre opérateurs de vertex) permet de calculer la fonction de partition à partir de la proposition précédente. Le théorème 13 (fonction de partition) est donc une conséquence directe de la proposition précédente.

## 2.6. — Localisation des dimères

Nous ne donnerons pas ici tous les éléments de la démonstration du théorème 15 qui nous entraîneraient trop loin, dans la technique et dans les notations. Nous nous contenterons de donner une idée de la raison pour laquelle la localisation des dimères dans le modèle est naturelle du point de vue de l'espace de Fock. Plus précisément, il est possible de modifier le produit d'opérateurs dans (4.29) pour obtenir une *fonction de partition contrainte*, dans laquelle l'état de certains dimères (présents ou non présents) a été fixé.

Traisons ici, pour illustration, le cas des dimères apparaissant dans des colonnes de type  $R-$ . Commençons par rappeler que l'opérateur

$$\psi_k^* \psi_k$$

agit sur un diagramme maya comme l'identité si une particule est présente à la position  $k$ , et comme zéro sinon. Or la présence d'une particule sur le bord gauche d'un RYG de

type  $R-$  est *équivalent* à la présence d'un dimère horizontal gauche, voir la figure 4.13(a). En insérant un opérateur  $\psi_k^* \psi_k$  juste avant le  $\Gamma'_+$  correspondant dans le le produit (4.29), on force donc la présence d'un dimère horizontal gauche. Jusque là, il n'y a rien de très surprenant.

Une contribution de l'article [Bou+17] a été de réaliser que les deux autres types de dimères peuvent être traités également par insertion d'opérateurs fermioniques. Considérons par exemple le cas d'un dimère horizontal « droit », figure 4.13(b). Les configurations correspondantes possèdent une particule à la hauteur correspondante à droite et à gauche, mais ces conditions ne caractérisent pas la présence du dimère. Néanmoins, les configurations contenant ce dimère sont en bijection avec les configurations où les deux particules sont blanches voir encore figure 4.13(b). On peut donc forcer la présence du dimère en remplaçant l'opérateur  $\Gamma_{R-}(z_i)$  par l'opérateur *décoré*

$$\psi_k \Gamma_{R-}(z_i) \psi_k^*.$$

De la même façon, il est possible de construire un opérateur décoré pour les dimères diagonaux (figure 4.13(c)).

On peut traiter de manière similaire le cas des quatre RYG élémentaires. Il reste ensuite à traiter quelques subtilités, notamment lorsque l'on souhaite localiser plusieurs dimères à la même abscisse (on doit alors décorer « plusieurs fois » le même opérateur). On arrive ainsi à une expression de la fonction de partition contrainte par un sous-ensemble arbitraire d'arêtes, sous une forme similaire à (4.29), mais où des décoration fermioniques ont été insérées. Voir le théorème 12 dans [Bou+17] pour une expression complète de cette fonction de partition.

La machinerie classique des processus de Schur d'une part (opérateurs et leur relations de commutations), et du théorème de Wick d'autre part (expression des corrélations sous forme déterminantales à partir des corrélations à deux points) conduit ensuite naturellement à notre théorème 15.

## 2.7. — Pavages Pentus [BCC17]

Lorsque la suite  $\underline{a}$  a longueur paire et alterne entre  $L$  et  $R$ , à savoir  $\underline{a} = (LR)^k$  pour  $k \geq 1$ , les Rail Yard Graphs n'ont que des faces de degrés 4 ou 8 (quelle que soit la séquence  $\underline{b} \in \{-, +\}^{2k}$ ). De plus, les faces de degrés 8 sont toutes incidentes à des sommets de degré 2, qui peuvent classiquement être « contractés » sans changer la fonction de partition du modèle de dimères. On obtient ainsi une classe de graphes dont toutes les faces ont degré 4, et qui, à une déformation affine près, peuvent être transformés en sous-graphes du réseau carré, vivant dans une bande diagonale de la forme  $\{|X - Y| \leq 2k\}$ . Enfin en considérant le modèle dual, les dimères deviennent des « dominos », et l'on obtient ainsi une classe de régions du plan sur lesquelles le modèle de pavage par dominos est exactement soluble : ce sont les *Pavages Pentus*, indexés par une suite  $\underline{b} \in \{-, +\}^{2k}$ , que nous avons introduits dans notre article [BCC17].

Les cas les plus connus sont celui [Elk+92a ; Elk+92b] du diamant aztèque ( $\underline{b} = (+-)^k$ ,  $1 \leq k < \infty$ ; ce cas est particulier dans le sens où la région effectivement pavable reste de taille finie, les fonctions de partitions sont donc polynomiales), et celui des partitions pyramides ( $\underline{b} = +^k -^k$ ,  $1 \leq k \leq \infty$ ) étudiées par Kenyon et Young [Ken05 ; You09]. C'est d'ailleurs la similarité entre les formules de comptage dans ces deux cas qui a été à l'origine de tout notre travail sur ces questions.

Sur les figures 4.14, 4.15 nous illustrons ces idées sur le cas du diamant aztèque. La figure 4.16 illustre une partition pyramide dans une bande finie, vue comme pavage pentu.

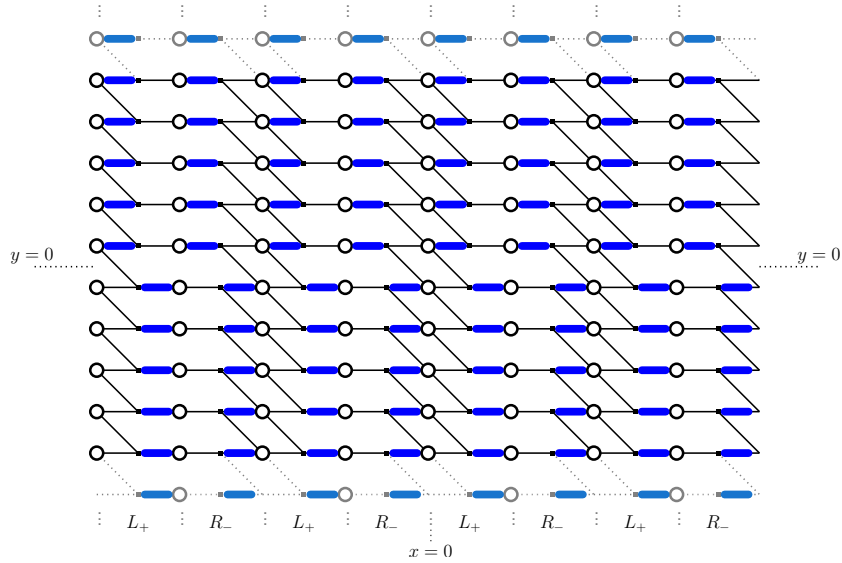


FIGURE 4.14 – Le RYG de suite LR  $\underline{a} = (LR)^k$  et de suite de signes  $\underline{b} = (+-)^k$  pour  $k = 4$ , muni sa configuration fondamentale. Voyez-vous où se cache le diamant aztèque ?

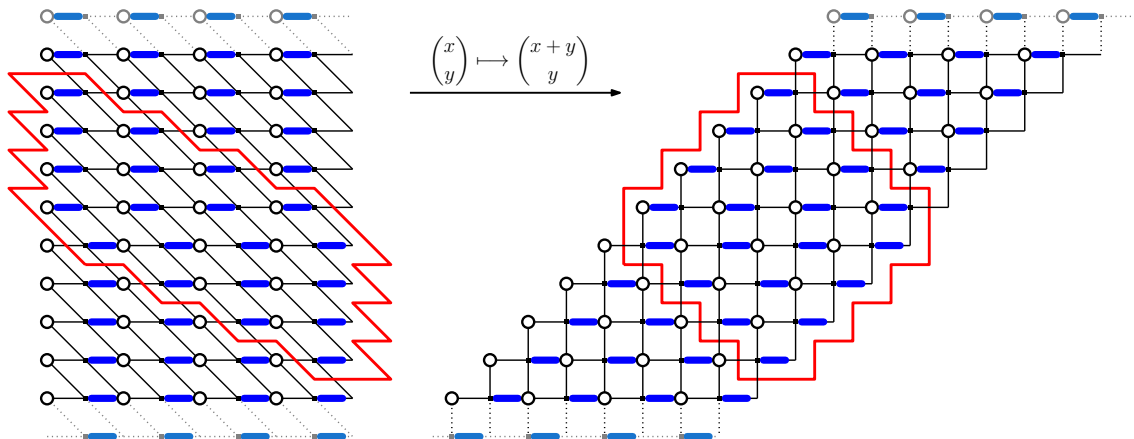


FIGURE 4.15 – Gauche : Le graphe obtenu en contractant tous les sommets de degré 2 du RYG de la figure 4.14. Droite : le même graphe, après transformation linéaire  $(x, y) \mapsto (x + y, y)$ . C'est une portion du réseau carré de maille 1. Des deux côtés, la région du graphe sur laquelle la configuration de dimères peut différer de la fondamentale est entourée en rouge. On reconnaît ici le diamant aztèque !

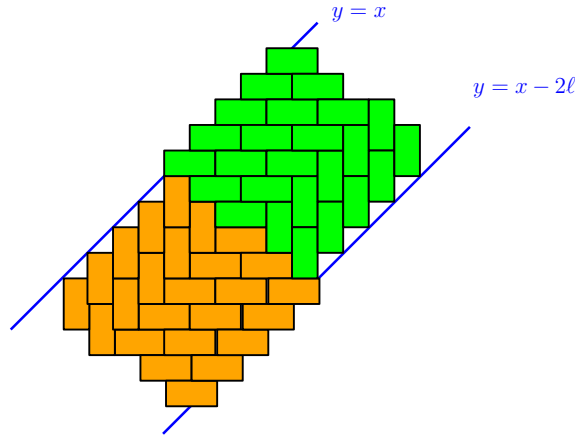


FIGURE 4.16 – Une « partition pyramide de largeur finie  $2\ell = 10$  », représentée comme pavage pentu. On voit ici la configuration minimale, toutes les autres s’obtiennent par des flips de dominos à partir de celle-ci. Ce modèle correspond, aux transformations illustrées dans les deux figures précédentes près, au RYG de paramètres  $\underline{a} = (LR)^5$  et  $\underline{b} = +^5 -^5$ . On se réfèrera à [BCC17] pour la signification des couleurs !

## 2.8. — Applications : algorithmes de génération aléatoire, formes limites [Bet+14]

Nous concluons ce chapitre par une section plus légère et plus imagée. Le point de vue que nous avons développé avec mes collaborateurs et collaboratrice sur les modèles de dimères a le mérite d’être très concret, à tous les étages :

- la correspondance dimères  $\leftrightarrow$  processus de Schur est bijective ;
- le calcul des fonctions de partitions à partir des relations de commutations entre les opérateurs de vertex est constructif ;
- dans l’article [Bet+14] nous avons donné des démonstrations bijectives de chacune des relations de commutation entre les opérateurs de vertex.

Plutôt que *concret*, nous pourrions dire *algorithmique*, et de fait ces travaux fournissent des algorithmes de génération aléatoire efficaces (entropie-optimaux) pour les processus de Schur et/ou les dimères sur les Rail Yard Graphs, sous mesure de Boltzmann (par exemple mesure  $q^{\text{flips}}$ ) ou uniforme dans le cas (fini) du diamant aztèque.

Ces algorithmes et les bijections sous-jacentes sont présentés dans [Bet+14]. Ils permettent, au moins empiriquement, d’observer des phénomènes de formes limites pour ces modèles, lorsque les séquences  $\underline{a}$  et  $\underline{b}$  sous-jacentes sont périodiques. De plus, le point de vue des processus de Schur donne un cadre naturel pour essayer de démontrer l’existence et calculer l’équation de ces courbes limites. Dans [Bou+17] nous avons ainsi donné une démonstration du phénomène du cercle arctique pour le diamant aztèque à la Okounkov-Reshetikhin, et mes coauteurs ont continué notamment l’étude du cas des partitions pyramides, qui donne lieu à des phénomènes qualitatifs nouveaux comme l’apparition de points cuspidaux.



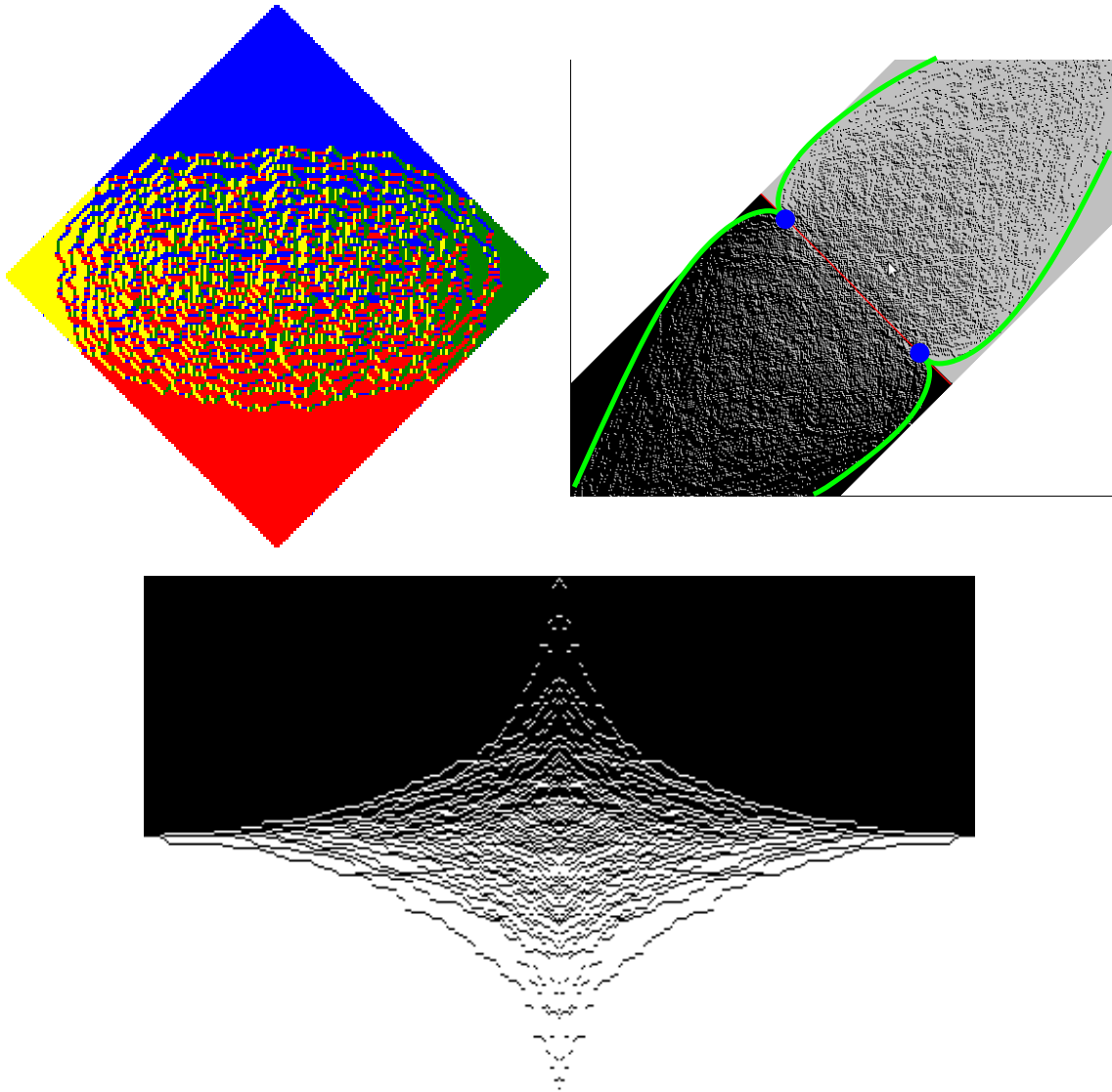


FIGURE 4.17 – Gauche : un pavage du diamant aztèque avec des poids de Boltzmann inhomogènes, où l'on voit que le cercle arctique devient une ellipse ; Droite : une Partition pyramide aléatoire dans une bande, où le paramètre  $q$  est ajusté à la largeur de bande, et où la forme limite aléatoire empirique (en vert) fait apparaître des points singuliers (en bleu) ; Bas : partition pyramide non bornée aléatoire conditionnée à être symétrique, cas également accessible aux algorithmes de [Bet+14]. Dans chacune des images les couleurs correspondent à des conventions locales de représentation de la configuration de dimères sous-jacents destinées à mieux mettre en valeur la géométrie de la forme limite. Voir [Bet+14] pour plus de détails.



# Cartes aléatoires [Cha10 ; BC12 ; Cha17 ; Add+18]

*Souvent la main qui veut repousser un homme le rend en réalité à lui-même.*

*Stefan Zweig, Magellan.*

Dans ce chapitre, nous présentons quelques aspects de nos travaux liés aux cartes aléatoires. Il s'agit dans la plupart des cas de tentatives infructueuses de démontrer combinatoirement la récurrence des nombres  $t_g$  vue au chapitre précédent, qui se sont transformées en des observations probabilistes intéressantes par ailleurs.

- En section 1, nous rappelons une conséquence de mes travaux de thèse, qui démontrent la convergence du profil des quadrangulations de genre  $g$ . Surtout, ce travail fait une connexion surprenante entre la carte Brownienne (de genre 0), ou plus précisément la mesure ISE, et la récurrence des  $t_g$ . Nous présenterons aussi des résultats communs avec Mireille Bousquet-Mélou où nous donnons une sorte de loi explicite pour l'analogue discret de la mesure ISE.
- En section 2, je présenterai ce que je sais faire de mieux dans la direction d'une démonstration combinatoire de la récurrence des  $t_g$ . Cette approche fait naturellement le lien avec les diagrammes de Voronoï dans les cartes Browniennes, et je présenterai une conjecture à ce sujet.
- En section 3, nous nous intéresserons aux cartes aléatoires d'excès fini, et à leurs diagrammes de Voronoï. Nous montrerons qu'étonnamment, elles semblent se comporter comme les cartes Browniennes et que l'équivalent de la conjecture précédente a une réponse positive dans ce contexte.

## 1. — PROFIL DES CARTES DE GENRE $g$ , PROFIL VERTICAL DES ARBRES, ET LES NOMBRES $t_g$ [Cha10 ; BC12]

### 1.1. — Profil de cartes de genre $g$ , ISE, fonctionnelle $W_\infty$ et nombres $t_g$

Nous considérerons ici des cartes étiquetées au sens de la section 4 de l'introduction. Pour  $n \geq 1$ , notons  $T_n$  un arbre plan enraciné étiqueté aléatoire, uniforme parmi ceux ayant  $n$  arêtes. Rappelons qu'un tel arbre est muni d'un étiquetage de ses sommets

$$\ell : V(T_n) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

sujet à la contrainte  $|\ell(u) - \ell(v)| \in \{0, 1, -1\}$  pour tous sommets adjacents  $u, v$ . Il y a donc  $3^n \text{Cat}(n)$  tels arbres. Pour  $k \in \mathbb{Z}$ , on note  $X_{T_n}(k)$  le nombre de sommets de  $T_n$  d'étiquette

$k$ , et on considère la mesure de probabilités

$$\mu_n = \frac{1}{|V(T_n)|} \sum_{v \in V(T_n)} \delta_{\gamma \ell(v)n^{-1/4}} = \frac{1}{n+1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_{T_n}(k) \delta_{\gamma kn^{-1/4}},$$

où  $\delta_x$  est la masse de Dirac en  $x$ , et où  $\gamma = 2^{-1/4} 3^{1/2}$  est un facteur de normalisation requis pour être en accord avec la littérature. Si l'on note  $\ell_{\min}(T_n)$  l'étiquette minimale dans  $T_n$ , la bijection des arbres étiquetés nous dit que la mesure aléatoire :

$$\hat{\mu}_n(x) := \mu_n(x - \gamma n^{-1/4}(\ell_{\min}(T_n) + 1))$$

est la loi (aléatoire) de la distance renormalisée d'un sommet non-racine uniforme à la racine dans une quadrangulation aléatoire plane enracinée à  $n$  faces aléatoire. Chassaing et Schaeffer [CS04] appellent cette mesure le *profil* de la quadrangulation.

Notons la normalisation en  $n^{1/4}$  qui est est l'ordre de grandeur des étiquettes typiques dans un arbre étiqueté uniforme de taille  $n$ . De fait, la suite de mesures aléatoires  $(\mu_n)_{n \geq 1}$  converge en loi, pour la topologie de la convergence en loi des mesures, vers une mesure de probabilités

$$\mu_n \longrightarrow \mu_{ISE}.$$

La mesure aléatoire  $\mu_{ISE}$  communément appelée « ISE » pour *Integrated Superbrownian excursion*, a été introduite par Aldous dans [Ald93]. Bousquet-Mélou et Janson ont montré dans [BJ06a] que la mesure ISE a presque sûrement une densité  $f_{ISE}$  par rapport à la mesure de Lebesgue, continue et à support compact.

Mes travaux de thèse amenaient naturellement à se pencher sur la mesure ISE pour l'énumération des cartes de genre supérieur. En effet, pour  $g > 0$  nous avons vu au chapitre 3 qu'une proportion  $1 - o(1)$  des cartes à une face de genre fixé sont *dominantes*, c'est-à-dire ont un squelette cubique. Or la bijection des trisections (Chapitre 3) montre qu'une carte dominante de genre  $g$  s'obtient en recollant  $g$  triplets de sommets dans un arbre uniforme. Cette bijection s'applique sans problème à des cartes à une face étiquetées (au sens de la bijection des arbres étiquetées), si ce n'est que la construction n'a de sens que si l'on recolle des triplets de sommets qui ont trois-à-trois la même étiquette.

Remarquons que le nombre de façons de choisir trois sommets de même étiquette (distincts ou non) dans l'arbre étiqueté  $T_n$  est égal à

$$W(T_n) := \sum_{k \in \mathbb{N}} X_{T_n}(k)^3.$$

Heuristiquement, cette somme porte typiquement sur  $O(n^{1/4})$  valeurs de  $k$ , qui sont chacune d'ordre  $O(n^{3/4})$ , la variable  $W(T_n)$  est donc d'ordre  $n^{\frac{1}{4} + 3 \times \frac{3}{4}} = n^{5/2}$ . C'est le 5/2 de la formule (4.10)! De plus, à la limite la somme devient naturellement une intégrale, et l'on montre [Cha10] la convergence en loi/des moments :

$$\frac{W(T_n)}{\gamma^2 n^{5/2}} \longrightarrow W_\infty := \int_{-\infty}^{\infty} f_{ISE}(x)^3 dx,$$

qui est « le nombre de manière de choisir trois points de même étiquette dans un arbre étiqueté aléatoire continu Brownien ».

Asymptotiquement, le nombre de manière de choisir  $g$  triplets de sommets de même étiquette dans l'arbre  $T_n$  est proportionnel à  $W(T_n)^g$ . Puisque l'énumération de ces configurations est, à un facteur  $\frac{1}{2^g g!}$  près, équivalente à l'énumération des cartes de genre  $g$  (version « étiquetée » du Théorème 3 page 48) on en déduit après petit calcul et démonstration des convergences requises, une nouvelle expression de la constante  $t_g$  de Bender et Canfield reliée à la mesure ISE :

**Théorème 16** ( $t_g$  comme moment de la fonctionnelle  $W_\infty$  d'ISE [Cha10]).  
 La constante  $t_g$  introduite par Bender et Canfield dans [BC86], qui est telle que le nombre  $Q_g^n$  de cartes enracinées de genre  $g$  fixé à  $n$  arêtes satisfait

$$Q_g^n \sim t_g n^{\frac{5(g-1)}{2}} 12^n, \quad n \rightarrow \infty$$

admet l'expression suivante :

$$t_g = \frac{2}{2^{5g/2} g! \sqrt{\pi}} \mathbb{E} [(W_\infty)^g]. \quad (5.1)$$

Il est naturel de tenter de démontrer combinatoirement/probabilistiquement la récurrence des  $t_g$  à partir de cette identité, mais je n'ai jamais réussi à le faire ! Néanmoins, une coïncidence troublante apparaît ici.

**Remarque 13** (Zhicheng Gao, suite à une remarque de Philippe Flajolet). Dans [Jan03], Janson introduit la fonctionnelle  $W'(T_n)$  qui compte le nombre de triplets de points  $(x, y, z)$  dans un arbre plan aléatoire uniforme  $T_n$  tels que  $z$  soit un ancêtre commun de  $x$  et  $y$ . Puisqu'il y a  $O(n^2)$  façons de choisir  $x$  et  $y$  et que leur plus grand ancêtre commun est typiquement à hauteur  $\sqrt{n}$ , l'ordre de grandeur de  $W'(T_n)$  est  $n^{2+\frac{1}{2}} = n^{\frac{5}{2}}$  ! Beaucoup plus, Janson obtient, par des décompositions élémentaires des arbres aléatoires à la racine, des récurrences quadratiques pour les moments de la variable  $W'_\infty = \lim_n W'(T_n)/n^{5/2} \dots$  qui coïncident avec ce que donne ici la récurrence des  $t_g$  ! Autrement dit, on a l'identité en loi

$$W'_\infty = cW_\infty,$$

où  $c$  est une constante explicite ! Donner une démonstration directe de cette identité en loi donnerait une preuve combinatoire de la récurrence des  $t_g$ .

Rappelons encore ici brièvement un résultat de ma thèse, à laquelle nous renvoyons pour les énoncés complets. La discussion précédente, qui dit que les cartes à une face étiquetées de genre  $g$  peuvent être vues comme des arbres étiquetés « pondérés par la fonctionnelle  $W(T_n)^g$  », ne se limite pas à l'énumération, et permet notamment de démontrer la convergence du profil. Si  $\mathfrak{q}$  est une quadrangulation enracinée et pointée de genre  $g$  à  $n$  arêtes, et  $k \in \mathbb{N}$  est un entier, on note  $Y_{\mathfrak{q}}(k)$  le nombre de sommets de  $\mathfrak{q}$  à distance  $k$  du sommet pointé. Le profil normalisé de  $\mathfrak{q}$  est défini comme la mesure de probabilités :

$$\mathfrak{p}_{\mathfrak{q}} = \frac{1}{n+2-2g} \sum_{k=0}^{\infty} Y_{\mathfrak{q}}(k) \delta_{\gamma n^{-1/4} k}.$$

La mesure ISE décalée est la mesure de probabilité  $\bar{\mu}_{\text{ISE}}$  obtenue en translatant la mesure ISE pour que le minimum de son support soit zéro. On note  $\bar{\mathcal{L}}_{\text{ISE}}$  la loi de  $\bar{\mu}_{\text{ISE}}$  sur l'ensemble  $\mathcal{M}_1$  des mesures de probas à support compact sur  $\mathbb{R}$ . Si une mesure  $\mu \in \mathcal{M}_1$  a une densité continue  $f_\mu$  à support compact par rapport à la mesure de Lebesgue, on pose :  $W(\mu) = \int_{\mathbb{R}} f_\mu(x)^3 dx$ . On définit la mesure de probabilités  $\mathcal{L}^g$  sur  $\mathcal{M}_1$  par la relation :

$$d\mathcal{L}^g(\mu) = \frac{1}{Z_g} W(\mu)^g d\bar{\mathcal{L}}_{\text{ISE}}(\mu)$$

où  $Z_g = \mathbb{E} [W(\mu_{\text{ISE}})^g]$ . Autrement dit, on pondère la mesure ISE par le  $g$ -ième moment de sa fonctionnelle  $W$ .

La discussion précédente, ainsi qu'un peu de travail sur la convergence des mesures, permet de montrer :

**Théorème 17 (Profil des quadrangulations aléatoires de genre  $g$  [Cha10]).** Soit  $q_n$  une quadrangulation enracinée et pointée à  $n$  faces de genre  $g$  choisie uniformément. Alors quand  $n$  tend vers l'infini, la loi  $\mathcal{L}_n^g$  de  $\mathfrak{p}_{q_n}$  converge vers  $\mathcal{L}^g$ , dans le sens de la convergence faible par rapport à la topologie de la convergence faible sur  $\mathcal{M}_1$ .

### 1.2. — Profil vertical des arbres [BC12] et version discrète de la loi de $f_{ISE}$

Il est naturel de se demander si les résultats précédents, faisant le lien entre ISE et énumération de cartes, peuvent être utilisés, soit pour démontrer la récurrence des  $t_g$  combinatoirement, soit pour obtenir par exemple des informations explicites sur les distances (comme la fonction à deux points) dans les cartes aléatoires de genre  $g$ . Je n'ai jamais réussi à le faire, mais en y réfléchissant, j'ai été amené, conjointement avec Mireille Bousquet-Mélou à découvrir des formules explicites pour une analogue discrète d'ISE.

Nous avons déjà vu que le « profil vertical » des arbres étiquetés plans aléatoires converge vers ISE. C'est le cas de beaucoup d'autres modèles « d'arbres aléatoires spatiaux », voir [Ald93 ; DS98 ; JM05 ; Le 99 ; MM03 ; Mie08a]. Par exemple, on peut considérer :

- les arbres de Cayley enracinés à  $n$  sommets, où les sommets reçoivent en plus de leur "label" des étiquettes dans  $\mathbb{Z}$ , qui suivent des incréments  $\pm 1$  partant de la racine, étiquetée 0 ;
- les arbres binaires uniformes, où le nœud racine reçoit l'étiquette zéro, et où l'enfant droit/gauche d'un sommet d'étiquette  $i$  reçoit l'étiquette  $i + 1$  ou  $i - 1$ , respectivement. On parle d'arbres binaires *canoniquement plongés*.

Dans chacun de ces modèles (arbres plans étiquetés, arbres de Cayley étiquetés, arbres binaires canoniquement étiquetés), on appellera *profil vertical* le vecteur

$$(\dots, k_{-2}, k_{-1}; k_0, k_1, \dots)$$

où  $k_i$  est le nombre de sommets d'étiquettes  $i$ . Pour chacun de ces modèles, la mesure

$$\frac{1}{\sum_i k_i} \sum_i k_i \delta_{in-1/4}, \quad n = \sum_i k_i,$$

converge en loi vers la mesure ISE, à une constante de normalisation modèle-dépendante près. Dans l'idée d'étudier le comportement asymptotique du profil des cartes de genre fixé, chacun de ces modèles est donc aussi bon à étudier que les autres, même si seul le premier est en bijection directe avec les cartes.

Les résultats suivants sont des cas particuliers d'expressions closes plus générales pour le profil vertical de différents modèles d'arbres plongés [BC12].

**Théorème 18 (Profil vertical des arbres binaires plongés [BC12]).** Soit  $\ell \leq 0 \leq r$ , et soit  $(n_i)_{\ell \leq i \leq r}$  une suite d'entiers strictement positifs. Le nombre d'arbres binaires, canoniquement plongés, ayant profil vertical  $(n_\ell, \dots, n_{-1}; n_0, n_1, \dots, n_r)$  est donné explicitement par

$$\frac{n_0}{n_\ell n_r} \binom{n_{-1} + n_1}{n_0 - 1} \prod_{\substack{\ell \leq i \leq r \\ i \neq 0}} \binom{n_{i-1} + n_{i+1} - 1}{n_i - 1},$$

avec  $n_{\ell-1} = n_{r+1} = 0$ .

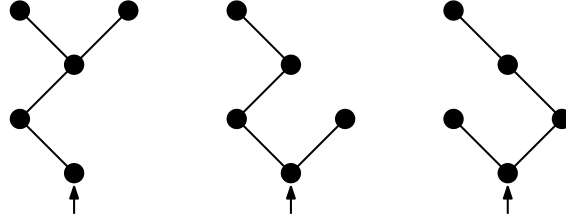


FIGURE 5.1 – Les trois arbres binaires de profil vertical  $(2; 2, 1)$ .

Par exemple, le nombre d'arbres binaires de profil vertical  $(2; 2, 1)$  est

$$\frac{2}{2 \times 1} \binom{3}{1} \binom{1}{1} \binom{1}{0} = 3,$$

et ces arbres sont donnés sur la figure 5.1.

**Théorème 19 (Profil vertical des arbres de Cayley plongés [BC12]).** Soit  $\ell \leq 0 \leq r$ , et soit  $(n_i)_{\ell \leq i \leq r}$  une suite d'entiers strictement positifs. Le nombre d'arbres de Cayley enracinés, puis étiquetés avec des incréments  $\pm 1$ , de profil vertical  $(n_\ell, \dots, n_{-1}; n_0, n_1, \dots, n_r)$  est donné par

$$\frac{n_0}{n_\ell n_r} \frac{n!}{\prod_{i=\ell}^r (n_i - 1)!} \prod_{i=\ell}^r (n_{i-1} + n_{i+1})^{n_i - 1},$$

où  $n = \sum_i n_i$  est le nombre de sommets et  $n_{\ell-1} = n_{r+1} = 0$ .

En fait, nous avons trouvé le second théorème en premier : il est une conséquence immédiate du matrix-tree-theorem ! Nous avons démontré le premier, ainsi que des généralisations, au moyen d'une preuve bijective généralisant la bijection de Joyal [BLL98]. Plus tard, Bernardi et Morales ont encore généralisé ces formules [BM14], avec des bijections beaucoup simples !

Notons qu'en écrivant :

$$\binom{n_{i+1} + n_{i-1}}{n_i} = \binom{n_{i+1} + n_{i-1}}{\frac{n_{i+1} + n_{i-1}}{2} + \frac{1}{2} \Delta_i}, \quad \Delta_i := (n_{i+1} - n_i) - (n_i - n_{i-1}),$$

et en se rappelant l'approximation Gaussienne « à la de Moivre » des coefficients binomiaux, le théorème 18 suggère que la densité aléatoire  $f_{ISE}(x)$  de la mesure ISE satisfait une équation différentielle stochastique du deuxième ordre de la forme<sup>1</sup> :

$$df'_{ISE}(x) = \sqrt{2f_{ISE}(x)} dB_x + O(dx), \quad (5.2)$$

où  $f'_{ISE}$  serait la dérivée de  $f_{ISE}$  et où  $B$  est un mouvement Brownien standard. Malheureusement, je ne sais pas calculer explicitement le terme en  $O(dx)$ . Il serait intéressant

1. On pourra comparer ici avec l'EDS du premier ordre satisfaite par le temps local  $g$  de l'excursion Brownienne normalisée [Pit99] :  $dg(x) = 2\sqrt{g(x)}dB_x + \left(4 - g(x)^2 \left(1 - \int_0^x g(s)ds\right)^{-1}\right) dx$ . Le premier terme du membre de droite se comprend également depuis le discret par une approximation à la de Moivre, en se rappelant que le nombre d'arbres binaires de profil *horizontal*  $(h_0, h_1, \dots, h_k)$ , c'est-à-dire ayant  $h_i$  noeuds à la hauteur  $i$ , est donné par la formule  $\prod_{i=0}^{k-1} \binom{2h_i}{h_{i+1}}$ .

également de travailler de manière abstraite sur cette équation, par exemple d'étudier l'équation plus simple

$$df'(x) = \sqrt{2f(x)}dB_x,$$

puis de tenter de construire  $f_{ISE}$  en la conditionnant de manière appropriée, ou en donnant un sens à ses « excursions ».

En tout cas, l'équation heuristique (5.2) semble indiquer que  $f_{ISE}$  a presque sûrement une dérivée continue, de la même régularité qu'un mouvement Brownien, et en particulier, que  $f_{ISE}$  n'est pas deux fois dérivable, ce qui est compatible avec une conjecture de [BJ06a]. Il est probablement possible de démontrer au moins une version finie-dimensionnelle de la convergence vers le Brownien dans (5.2), question que nous laissons ici ouverte.

## 2. — INTERPRÉTATIONS PROBABILISTES DE LA RÉCURRENCE DES $t_g$ [Cha17] ET UNE CONJECTURE SUR LES DIAGRAMMES DE VORONOÏ

### 2.1. — Résultats et la « big conjecture »

Dans cette section je ferai le lien entre énumération asymptotique des cartes de genre  $g$  et propriétés des diagrammes de Voronoï des cartes Browniennes. Les résultats principaux sont une « interprétation probabiliste » de la récurrence des  $t_g$  (Théorèmes 20 et 21). Ils amènent naturellement à une conjecture sur les diagrammes de Voronoï (Conjecture 1), que j'engage toutes mes lectrices et lecteurs à essayer de démontrer ! Cela permettrait notamment de transformer l'interprétation probabiliste en une démonstration probabiliste.

Nous avons déjà vu plusieurs fois que le nombre de cartes enracinées de genre  $g$  fixé à  $n$  arêtes se comporte quand  $n$  tend vers l'infini comme

$$m_g(n) \sim t_g n^{\frac{5(g-1)}{2}} 12^n, \text{ pour } t_g > 0. \quad (5.3)$$

Cette formule, conséquence des formules de Tutte [Tut63] pour le genre 0, a été démontrée en genre supérieur par Bender and Canfield dans un article resté célèbre [BC86], via un analogue dû à Walsh et Lehman [WL72a ; WL72b ; WL75] des équations de Tutte pour le genre supérieur, et à une méthode « récursive » (sorte de récurrence topologique préhistorique) pour résoudre ces équations. Nous avons déjà vu l'interprétation combinatoire de cette formule par la bijection des arbres étiquetés ([CV81 ; Sch99 ; CS04] en genre 0, puis [MS01 ; CMS09] en genre supérieur), encore développée dans [Cha10] avec l'approche par trisections.

Ces méthodes bijectives sont incapables à ce jour de déterminer la suite de constantes  $(t_g)_{g \geq 0}$ . Or nous avons vu (page 65) comme conséquence de la structure de fonction tau des séries génératrices de cartes, que cette suite peut se calculer par une équation de récurrence très simple que nous répétons ici :

$$\tau_{g+1} = \frac{(5g+1)(5g-1)}{3} \tau_g + \frac{1}{2} \sum_{g_1=1}^g \tau_{g_1} \tau_{g+1-g_1}, \quad g \geq 0, \quad \tau_g = 2^{5g-2} \Gamma\left(\frac{5g-1}{2}\right) t_g \quad (5.4)$$

avec  $\tau_0 = -1$ .

Faisons maintenant le lien avec les cartes aléatoires. Pour  $n, g \geq 0$ , soit  $\mathcal{Q}_n^{(g)}$  l'ensemble des quadrangulations biparties enracinées de genre  $g$  à  $n$  arêtes, et soit  $\mathbf{q}_n^{(g)} \in_u \mathcal{Q}_n^{(g)}$  un élément aléatoire uniforme de cet ensemble. Comme en section 4, on équipe  $\mathbf{q}_n^{(g)}$  de sa métrique de graphe  $\mathbf{d}_n$  et de la mesure uniforme  $\mu_n$  sur ses sommets, ce qui permet de voir

$$\mathbf{q}_n^{(g)} \equiv (\mathbf{q}_n^{(g)}, \mathbf{d}_n, \mu_n)$$



comme un espace métrique mesuré compact (aléatoire). Une *carte Brownienne de genre  $g$*  est un espace métrique compact aléatoire  $(\mathbf{q}_\infty, d_\infty, \mu_\infty)$  tel que l'on ait la convergence en loi le long d'une sous-suite, pour la topologie GHP (voir page 35) :

$$(\mathbf{q}_n^{(g)}, \frac{1}{n^{1/4}} \mathbf{d}_n, \mu_n) \longrightarrow (\mathbf{q}_\infty^{(g)}, d_\infty, \mu_\infty).$$

L'existence de cartes Browniennes de genre  $g$  est démontrée dans [Mie09], et leur unicité pour chaque  $g \geq 1$  a été annoncée par Bettinelli et Miermont [BM] (en genre 0 l'unicité est un résultat important dû indépendamment à Miermont [Mie13] et Le Gall [Le 13]). Néanmoins, l'unicité n'est pas vraiment nécessaire pour énoncer ni démontrer les résultats que nous présenterons ici (pour toutes les observables que nous considérerons la convergence s'établit directement.). Notons qu'il est d'usage d'introduire un facteur multiplicatif  $(8/9)^{1/4}$  à la distance, ce qui n'impacte pas nos résultats et que nous ne ferons pas ici.

**Théorème 20 (Une récurrence des  $t_g$  probabiliste [Cha17]).** *Pour  $g \geq 0$ , soit  $(\mathbf{q}_\infty^{(g)}, d_\infty, \mu_\infty)$  une carte Brownienne de genre  $g$ . Soient  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{q}_\infty^{(g)}$  deux points aléatoires indépendants distribués selon la mesure  $\mu_\infty$ , et soient  $\mathbf{X}_g, 1 - \mathbf{X}_g$  les masses des deux cellules de Voronoï dans le diagramme de Voronoï sur  $\mathbf{q}_\infty^{(g)}$  induit par  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$ , c'est-à-dire :*

$$\mathbf{X}_g := \mu_\infty\left(\{x \in \mathbf{q}_\infty^{(g)}, d_\infty(x, \mathbf{v}_1) < d_\infty(x, \mathbf{v}_2)\}\right).$$

Alors la suite de nombres  $\tau_g = 2^{5g-2} \Gamma\left(\frac{5g-1}{2}\right) t_g$  satisfait la récurrence :

$$\tau_{g+1} = 2(5g+1)(5g-1)\tau_g \cdot \mathbf{E}[\mathbf{X}_g(1-\mathbf{X}_g)] + \frac{1}{2} \sum_{g_1=1}^g \tau_{g_1} \tau_{g+1-g_1}, \quad g \geq 0.$$

En comparant avec la récurrence des  $t_g$  (5.4) on déduit immédiatement :

**Théorème 21 (En comparant le Théorème 20 avec la récurrence des  $t_g$  (5.4)).** *Pour tout  $g \geq 0$ , la variable aléatoire  $\mathbf{X}_g$  satisfait*

$$\mathbf{E}[\mathbf{X}_g(1-\mathbf{X}_g)] = \frac{1}{6}, \quad \text{ou de manière équivalente, } \mathbf{E}\mathbf{X}_g^2 = \frac{1}{3}. \quad (5.5)$$

On sera en droit d'être surpris par le fait que  $\mathbf{E}\mathbf{X}_g^2$  ne dépend pas de  $g \geq 0$  : en effet, s'il est naturel de s'attendre à ce que les statistiques *locales* des cartes Browniennes ne dépendent pas du genre, le diagramme de Voronoï dépend *globalement* de l'espace métrique  $\mathbf{q}_\infty^{(g)}$  qui est genre-dépendant. Cela suggère qu'il existe une interprétation probabiliste ou combinatoire *simple* de cette propriété, reposant sur une symétrie de la carte Brownienne. Si c'est le cas, je n'ai pas été capable de la trouver (évidemment, une symétrie évidente implique que  $\mathbf{E}\mathbf{X}_g = \frac{1}{2}$ ). Insistons encore sur le fait que, par le Théorème 20, toute démonstration combinatoire ou probabiliste de (5.5) donnerait une démonstration nouvelle de la récurrence des  $t_g$ , indépendante des modèles de matrices, polynômes orthogonaux ou hiérarchies intégrables.

Le plus intéressant dans ce résultat est peut-être qu'il invite à s'intéresser à d'autres moments des variables  $\mathbf{X}_g$  et plus généralement à la loi de la taille des cellules de Voronoï induites par plus de points. Soient  $k \geq 2$  et  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  des points de  $\mathbf{q}_\infty^{(g)}$  choisis indépendamment selon la mesure de Lebesgue  $\mu_\infty$ . Soient  $(\mathbf{Y}_g^{(i;k)})_{1 \leq i \leq k}$  les masses des  $k$

cellules de Voronoï induites par les  $\mathbf{v}_i$  : pour  $i \in [1..k]$  soit

$$\mathbf{Y}_g^{(i:k)} := \mu_\infty \left( \{x \in \mathbf{q}_\infty^{(g)}, \forall j \in [1..k] \setminus \{i\}, d_\infty(x, \mathbf{v}_i) < d_\infty(x, \mathbf{v}_j)\} \right).$$

Notons que  $\mathbf{X}_g = \mathbf{Y}_g^{(1:2)}$ , mais on préfère la notation plus légère  $\mathbf{X}_g$  dans le cas  $k = 2$ . À part le Théorème 21, le seul autre moment de ces variables que je sache calculer est le suivant :

**Théorème 22 (Une formule similaire pour trois points [Cha17]).** *Pour  $g \geq 0$ , les masses  $\mathbf{Y}_g^{(1:3)}, \mathbf{Y}_g^{(2:3)}, \mathbf{Y}_g^{(3:3)}$  des cellules de Voronoï induites par trois points i.i.d. selon la mesure de Lebesgue dans la carte Brownienne de genre  $g$  satisfont, pour  $g \geq 0$  :*

$$\mathbf{E}[\mathbf{Y}_g^{(1:3)} \mathbf{Y}_g^{(2:3)} \mathbf{Y}_g^{(3:3)}] = \frac{1}{60}.$$

Comme on le verra, le fait que ce moment soit calculable repose non seulement sur la bijection des arbres étiquetés, mais sur la bijection des trisections. Le fait qu'il soit indépendant du genre est tout aussi mystérieux que pour le théorème précédent (et même plus, les calculs intermédiaires étant franchement lourds).

La valeur de ces premiers moments, le fait qu'ils ne dépendent pas du genre, et des simulations numériques, m'ont conduit à formuler la conjecture suivante.

**Conjecture 1 ([Cha17]).** *Pour  $k \geq 2, g \geq 0$ , soit  $\mathbf{q}_\infty^{(g)} \equiv (\mathbf{q}_\infty^{(g)}, d_\infty, \mu_\infty)$  une carte Brownienne de genre  $g$  et soient  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  choisis indépendamment selon  $\mu_\infty^{\otimes k}$ . Alors le vecteur aléatoire  $(\mathbf{Y}_g^{(1:k)}, \mathbf{Y}_g^{(2:k)}, \dots, \mathbf{Y}_g^{(k:k)})$  a la même loi qu'une subdivision de l'intervalle unité induite par  $k - 1$  variables uniformes indépendantes<sup>a</sup>. En particulier, pour tous  $g \geq 0$ ,  $\mathbf{X}_g = \mathbf{Y}_g^{(1:2)}$  est uniforme sur  $[0, 1]$ .*

<sup>a</sup>. Autrement dit, c'est une variable aléatoire uniforme sur le simplexe, ou encore, une *Dirichlet*(1, 1, ..., 1).

La bijection de Miermont (voir section 4) permet de reformuler naturellement cette conjecture comme un problème d'énumération de cartes de genre  $g$  étiquetées à  $k$  faces sujettes à des contraintes d'étiquetages malheureusement difficiles à contourner<sup>2</sup>. Dans le cas  $(g, k) = (0, 2)$ , Emmanuel Guitter a réussi à énumérer ces objets au prix d'un redoutable calcul, ce qui donne un élément de plus en faveur de la conjecture générale :

**Proposition 25 ([Gui17]).** *La conjecture 1 est vraie pour  $(g, k) = (0, 2)$ .*

Remarquons enfin que dans une direction opposée, plutôt qu'essayer de redémontrer la récurrence des  $t_g$  en démontrant d'abord la conjecture, on pourrait plutôt tenter d'utiliser la structure de fonction tau (la hiérarchie KP) pour démontrer la conjecture. Malheureusement, je ne sais pas faire apparaître d'autres moments des diagrammes de Voronoï que ceux considérés ici dans des problèmes d'énumération exacte ou asymptotique de cartes pour l'instant.

## 2.2. — Idée de démonstration

L'idée de la démonstration du théorème 20, qui est aussi celle de sa découverte puisqu'il aurait été difficile de le deviner autrement, est très simple : effectuer une décomposition

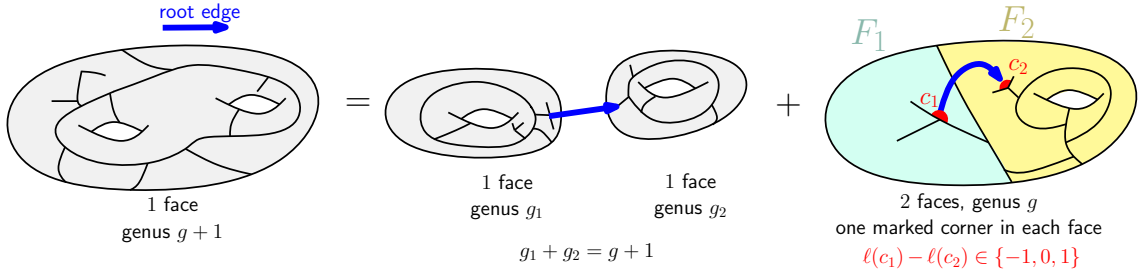


FIGURE 5.2 – La décomposition menant à (5.6), puis au théorème 20

de type « suppression de l’arête racine » directement sur les cartes étiquetées à une face.

Soit  $g \geq 0$ , et soit une carte étiquetée à une face  $M$  de genre  $g + 1$  (rappelons, voir section 4, que ces objets sont en bijection avec les quadrangulations biparties de genre  $g + 1$ ). Si l’on supprime l’arête racine de  $M$ , deux cas peuvent se produire (figure 5.2) :

- (i) on déconnecte la carte en deux cartes à une face étiquetées  $M_1$  et  $M_2$  dont les genres somment à  $g + 1$  ;
- (ii) on ne déconnecte pas la carte ; dans ce cas, il reste une carte  $M'$  de genre  $g$  à deux faces. Chaque face de  $M'$  porte un coin distingué, et les étiquettes de ces coins diffèrent de  $-1$ ,  $0$ , ou  $1$ .

En terme de séries génératrices, on obtient

$$L_{g+1}(z) = 3z \sum_{\substack{g_1+g_2=g+1 \\ g_1, g_2 \geq 0}} L_{g_1}(z)L_{g_2}(z) + zA_g(z) \quad (5.6)$$

- où :
- $L_g(z)$  est la série génératrice des cartes à une face étiquetées de genre  $g$ , par le nombre d’arêtes ; notons le facteur  $3z$  qui prend en compte le choix de l’incrément d’étiquette le long de l’arête racine dans  $\{-1, 0, 1\}$ , dans le cas d’une arête coupante ;
  - $A_g(z)$  est la fonction génératrice par le nombre d’arêtes des cartes à deux faces de genre  $g$ , dont les faces sont numérotées  $F_1, F_2$ , telles que  $F_i$  contient un coin marqué  $c_i$  pour  $i = 1..2$ , avec  $|\ell(c_1) - \ell(c_2)| \leq 1$ .

Cette équation se met sous une forme « à noyau »

$$(1 - 6zL_0(z))L_{g+1}(z) = 3z \sum_{\substack{g_1+g_2=g+1, \\ g_1, g_2 > 0}} L_{g_1}(z)L_{g_2}(z) + zA_g(z), \quad (5.7)$$

qui est récursive sur le genre, à condition de savoir calculer ou estimer  $A_g(z)$ . Or la bijection de Miermont relie directement les objets comptés par  $A_g(z)$  à des quadrangulations de genre  $g$  portant des sommets/arêtes marqués. En appliquant la construction de Miermont [Mie09] à cet objet, on construit une quadrangulation bipartie  $Q$  de genre  $g$  en ajoutant un nouveau sommet  $s_1, s_2$  dans chaque face  $F_1, F_2$ , et en appliquant une certaine opération de clôture. À la fin de la construction, on obtient une quadrangulation  $Q$  avec deux sommets  $s_1, s_2$  marqués, et les deux coins  $c_1, c_2$  de la carte à une face de départ sont naturellement associés à deux arêtes  $e_1$  et  $e_2$  de  $Q$ . Les inégalités sous-jacentes à la bijection de Miermont (voir section 4) nous assurent de plus que si  $m_i$  est l’extrémité de  $e_i$  la plus proche de  $s_i$  dans  $Q$ , on a

$$d(s_1, m_1) \leq d(s_1, m_2) - \epsilon \quad , \quad d(s_2, m_2) \leq d(s_2, m_1) + \epsilon, \quad (5.8)$$

2. Soit une carte étiquetée de genre  $g$  à  $k$  faces, sujette à la contrainte que l’étiquette minimale est la même dans chacune des faces. La conjecture dit que la loi renormalisée de la longueur des faces est uniforme sur le simplexe. La contrainte globale sur les minima rend le problème difficile même pour  $(g, k) = (0, 2)$ .

où  $\epsilon = \ell(c_2) - \ell(c_1) \in \{-1, 0, 1\}$  est l'incrément de l'arête racine. Ces contraintes ne caractérisent pas exactement les configurations obtenues, mais elles les caractérisent, en un sens, asymptotiquement. Nous ne rentrerons pas dans les détails ici (voir le papier original [Cha17]), mais nous pouvons remarquer que ces inégalités nous disent que *au terme d'erreur  $\epsilon$  près,  $s_i$  est plus proche de  $m_i$  que de  $m_{3-i}$  dans  $Q$ , pour  $i = 1..2$* . Autrement dit,  $s_i$  est dans la cellule de Voronoï centrée en  $m_i$ , pour  $i = 1..2$ .

Au subtilités asymptotiques près (notamment : gérer les cas d'égalités dans les inégalités), on fait ainsi apparaître naturellement le moment croisé de la variable  $\mathbf{X}_g$  :

**Lemme 26.** *Le coefficient  $[z^n]A_g(z)$  est tel que quand  $n$  tend vers l'infini, avec les notations du théorème 20 :*

$$\frac{[z^n]A_g(z)}{3/2 \cdot n^3 m_g(n)} \longrightarrow \mathbf{E}[\mathbf{X}_g(1 - \mathbf{X}_g)] \quad (5.9)$$

Le théorème 20 se déduit maintenant directement de l'équation (5.7). On notera que dans cette équation, chacun des termes contribue au même ordre de grandeur en la singularité dominante<sup>3</sup>.

À propos de la démonstration du cas à trois points (Théorème 22), nous renvoyons à l'article original. Disons simplement que l'on utilise maintenant une décomposition des cartes étiquetées à une face le long des nœuds de leur schéma, et on utilise pour cela le lemme de trisections (page 46). On utilise ensuite comme précédemment la bijection de Miermont pour ramasser les morceaux, ce qui fait apparaître le moment  $\mathbf{E}[\mathbf{Y}_g^{(1:3)}\mathbf{Y}_g^{(2:3)}\mathbf{Y}_g^{(3:3)}]$  dans les calculs. Ces calculs, compliqués, se simplifient grâce à un usage délicat de la récurrence des  $t_g$ .

### 3. — DIAGRAMMES DE VORONOÏ DANS LES ARBRES ET CARTES D'EXCÈS FINI [Add+18]

Cette section est basée sur l'article [Add+18] à paraître dans les actes de SODA'18. Ce travail a ses racines dans la conjecture de la section précédente, et surtout dans le fait qu'on ne sait trop comment l'aborder. En effet même les résultats partiels dont nous disposons (calculs des moments que j'ai obtenus, calculs d'Emmanuel Guitter pour le cas (0, 2)) résultent de lourds calculs ou de propriétés algébriques profondes, et l'on ne « comprend » pas du tout pourquoi ni même comment la loi uniforme intervient.

La question de déterminer la loi de la masse des cellules de Voronoï centrées en  $k$  points pris au hasard peut être posée dans tout graphe (aléatoire ou non), et la question de la loi limite dans tout modèle où le nombre de sommets tend vers l'infini. Les exemples de la figure 5.3 montrent que l'on peut obtenir des comportements très différents avec des modèles de graphes différents.

L'un des modèles les plus naturels à considérer est le graphe complet  $K_n$  à  $n$  sommets, muni de la métrique de graphe où les longueurs d'arêtes sont des variables exponentielles indépendantes de même paramètre. Dans ce cas, quand  $n$  tend vers l'infini, l'équivalent de la conjecture 1 est vraie, à savoir que la loi limite est uniforme sur le simplexe. Ici l'apparition de la loi uniforme est assez intuitive, du fait de l'existence d'un modèle d'urnes simple encodant le problème (voir l'introduction de [Add+18]). Cette coïncidence motive la question suivante :

*Quels modèles de graphes aléatoires donnent lieu à des distributions de masses de Voronoï uniformes, et pourquoi ?*

3. Un calcul explicite montre que le noyau  $1 - 6zL_0(z)$ , qui est indépendant du genre, s'annule avec une singularité en racine carrée à la singularité  $z = \frac{1}{12}$ .

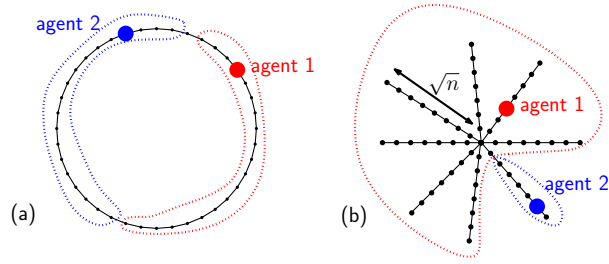


FIGURE 5.3 – Exemples de diagrammes de Voronoï centrés en  $k = 2$  points aléatoires (uniformes) dans deux graphes déterministes. (a) Sur un  $n$ -cycle, chaque agent emporte asymptotiquement la moitié du graphe, et la loi limite de la répartition de masse est  $\delta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ . (b) Sur une étoile faite de  $\sqrt{n}$  épines, le sommet le plus proche du centre emporte presque toute la masse, et la loi limite est  $\frac{1}{2}(\delta_{0,1} + \delta_{1,0})$ .

Nous ne donnerons pas de réponse générale à cette question, mais nous exhibons une classe très générale de graphes aléatoires où cette propriété, ou une variante, est vraie : les cartes d'excès fini (voir chapitre 2 section 4).

Les résultats seront énoncés ci-dessous dans le continu. On rappelle que si  $M_n^{(g,\ell)}$  est une carte enracinée aléatoire uniforme de genre  $g \geq 0$  à  $\ell \geq 1$  faces, vue comme espace métrique mesuré, alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}} M_n^{(g,\ell)}$$

converge en loi pour topologie GHP quand  $n$  tend vers l'infini (quand  $(g, \ell) = (0, 1)$ , l'objet limite est le CRT). Nous considérerons ici une version de ce modèle où nous conditionnerons les faces à contenir un certain nombre des  $k$  sources de la tessellation de Voronoï, en particulier nos cartes sont biaisées par la taille relative de leurs faces. Pour  $g \geq 0$ ,  $\ell \geq 1$  et  $k_1, k_2, \dots, k_\ell \geq 1$ , nous considérerons la « Continuum Random Map of finite excess »

$$CRM(g; k_1, k_2, \dots, k_\ell)$$

qui est la limite en loi des cartes enracinées de genre  $g$  à  $\ell$  faces numérotées de 1 à  $\ell$ , portant  $k_i$  sommets marqués dans la face numéro  $i$ , et ayant  $n$  arêtes au total, lorsque  $n$  tend vers l'infini et que les longueurs d'arêtes sont normalisées par  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ . Cette limite est entendue en loi au sens de la topologie GHP et au sens des objets marqués (l'objet limite reste muni des points marqués). Par exemple, le  $CRM(0; k_1)$  n'est autre que le CRT avec  $k_1$  points marqués i.i.d. selon la mesure de Lebesgue. Le  $CRM(g; k_1, k_2, \dots, k_\ell)$  peut être construit explicitement en partant de la mesure uniforme sur les squelettes de genre  $g$  à  $\ell$  faces portant le bon nombre de points marqués, et en recollant des branches de CRT le long de chaque arête (voir [Add+18] pour les détails). En particulier, le squelette marqué de cet objet reste muni d'une structure de carte, et l'on peut demander que les  $k_i$  points autour de la  $i$ ème face soient numérotés  $X_1^{(i)}, \dots, X_{k_i}^{(i)}$  dans le sens horaire.

Insistons sur le fait que, quoique formulés dans le continu, les théorèmes suivants capturent la loi limite des masses des cellules de Voronoï dans les graphes aléatoires de taille  $n$  correspondants, quand  $n$  tend vers l'infini.

**Théorème 23 (Diagramme de Voronoï dans les arbres aléatoires [Add+18]).**

Soit  $(T, d, \mu)$  le CRT, muni de sa distance  $d$  et de la mesure de masse  $\mu$ . Soient  $X_1, \dots, X_k \in T$   $k$  points de  $T$  i.i.d. selon  $\mu$ . Partitionnons l'arbre  $T$  en  $k$  cellules de Voronoï  $C_1, \dots, C_k$ , où  $C_i$  est la partie de  $T$  plus proche de  $X_i$  que des autres  $X_j$ .

Alors le vecteur

$$\text{Vor}(T) := (\mu(C_i))_{i \leq k}$$

est une partition uniforme de l'unité (uniforme sur le simplexe  $(k-1)$ -dimensionnel).

En fait, ce théorème est un cas particulier du théorème suivant, qui montre que la même propriété est vraie dans les cartes à une face de genre  $g$ . Dans le cas des cartes à une face, le fait de choisir  $k$  points dans la face n'introduit pas de biais dans la mesure. Plutôt que parler de  $CRM(g, k_1)$ , on préférera donc parler de la « Continuum Random Unicellular Map (CRUM) of genus  $g$  ».

**Théorème 24 (Diagrammes de Voronoï dans les cartes à une face [Add+18]).**

Pour  $g \geq 0$ , soit  $(M, d, \mu)$  la CRUM de genre  $g$ . Soient  $X_1, \dots, X_k \in M$   $k$  points i.i.d. de  $M$  tirés selon  $\mu$ . Alors le vecteur de Voronoï

$$\text{Vor}(M) := (\mu(C_i))_{i \leq k}$$

est une partition uniforme de l'unité.

Autant le théorème 23 a une démonstration assez simple, autant la démonstration du théorème 24 repose sur une induction qui demande de considérer toutes les  $CRM(g; k_1, \dots, k_\ell)$  simultanément (on ne peut se restreindre au cas à une face). Le théorème 24 est en fait une conséquence du théorème suivant, qui est celui dont la démonstration peut être effectuée par induction.

Énoncer le théorème demande de définir le *vecteur d'intervalles*. Considérons  $M$  la  $CRM(g; k_1, \dots, k_\ell)$ , munie de ses points marqués  $(X_j^{(i)})_{1 \leq i \leq \ell; 1 \leq j \leq k_i}$ , où l'on rappelle que pour chaque  $i$  les points  $X_1^{(i)}, \dots, X_{k_i}^{(i)}$  apparaissent en ordre horaire autour de la  $i$ ème face. On peut considérer comme précédemment le *vecteur de Voronoï*

$$VOR(M) := (\mu(C_j^{(i)}))_{1 \leq i \leq \ell; 1 \leq j \leq k_i}$$

où  $\mu$  est la mesure de masse et où  $C_j^{(i)}$  est la cellule de Voronoï centrée en  $X_j^{(i)}$ . Nous considérerons également le *vecteur d'intervalles*

$$INT(M) := \left( \frac{1}{2} |I_j^{(i)}| \right)_{1 \leq i \leq \ell; 1 \leq j \leq k_i}$$

où  $|I_j^{(i)}|$  mesure la « longueur totale de contour » autour de la face  $i$ , entre le point  $X_j^{(i)}$  et le point  $X_{j+1 \bmod k_i}^{(i)}$ . On se reporte à [Add+18] pour la définition de ces longueurs. Dans le discret elles mesurent simplement le nombre total de côtés d'arêtes empruntés par le bord de la face entre les deux sommets marqués. Puisque chaque arête a deux côtés, la longueur totale de contour dans une carte à  $n$  arêtes est  $2n$ . On choisit ici de normaliser ces longueurs par un facteur  $\frac{1}{n}$ , ce qui explique l'ajout du facteur  $\frac{1}{2}$  dans la définition de  $INT(M)$ . Ainsi,  $VOR(M)$  et  $INT(M)$  sont deux vecteurs aléatoires qui vivent tous deux dans le simplexe  $(k-1)$ -dimensionnel, où  $k = \sum k_i$  est le nombre de points marqués.

Le résultat principal de [Add+18] est le suivant :

**Théorème 25 (Diagrammes de Voronoï dans les cartes d'excès fini [Add+18]).**

Soit  $M$  la  $CRM(g; k_1, \dots, k_\ell)$  avec  $g \geq 0$ ,  $\ell \geq 1$ , et  $k_1, \dots, k_\ell \geq 1$ . Alors les vecteurs

de Voronoï et d'intervalles ont la même loi :

$$VOR(M) \stackrel{(loi)}{=} INT(M).$$

Il est clair que, si l'on note  $L_i$  la longueur totale de la  $i$ ème face, les longueurs normalisées  $(\frac{1}{L_i} |I_j^{(i)}|)_{1 \leq j \leq k_i}$  forment une variable uniforme sur le  $(k_i - 1)$ -simplexe. Ce théorème implique donc directement les énoncés précédents.

L'idée d'introduire le vecteur d'intervalles, et de montrer son équidistribution avec  $VOR$ , est très astucieuse. Une fois cette idée obtenue, la démonstration est néanmoins relativement élémentaire et se fait « à mains nues », par induction sur la quantité  $g + \ell$ . Elle fonctionne simplement par une décomposition à la Tutte : étant donnée  $M$  munie de ses points marqués, on considère le point marqué  $X$  qui est le plus proche d'un des points de branchement du squelette, appelons  $Y$  ce point de branchement. Si la distance de  $X$  à  $Y$  dans le squelette est  $\delta$ , on efface simultanément, partant de tous les points marqués, un branche de longueur  $\delta$ . Presque sûrement, le seul point du squelette atteint par cette opération est le point  $Y$  qui devient de degré 2, et on choisit alors de couper la carte en  $Y$ , ce qui le scinde en deux nouveaux sommets. On se retrouve ainsi avec une ou plusieurs CRM plus petites (l'opération peut être déconnectante). Il est facile de lister tous les cas possibles pouvant se produire lors de cette opération (déconnectant ou non, perte de genre ou non), et d'écrire ainsi la récurrence en loi satisfaite par le vecteur  $VOR$  et par le vecteur  $INT$ . On remarque alors que ces deux récurrences sont les mêmes, et l'on conclut par induction.

Nous renvoyons à l'article original pour les démonstrations. Nous annonçons également (la démonstration n'est pas encore écrite) que les mêmes résultats sont vrais dans le cas non-orientable, à condition d'indexer cycliquement les vecteurs  $VOR$  et  $INT$  dans un sens choisi uniformément parmi les deux possibles, indépendamment autour de chaque face.

**Remarque 14.** *Outre les arbres aléatoires uniformes, les modèles de graphes aléatoires suivants ont des tessellations de Voronoï uniformes, pour tout nombre  $k$  de points marqués, dans la limite où le nombre d'arêtes tend vers l'infini :*

- Les unicycles ;
- Les graphes "theta" (dont le squelette est un graphe d'excès 2 sans pont) ;
- Les graphes "haltères" (dont le squelette est formé d'une arête reliant deux boucles).

*Ces énoncés découlent du théorème 24 et de son analogue non orientable, respectivement dans le cas des cartes à une face sur le plan projectif (unicycles), sur le tore (graphes theta), et sur la bouteille de Klein (mélanges de graphes theta et haltères). Nous ne connaissons pas le plus petit squelette cubique  $S$  ayant la propriété que les graphes uniformes de squelette  $S$  n'ont pas la propriété que leur vecteur de Voronoï est uniforme à la limite. Il est néanmoins possible de montrer que de tels squelettes existent à l'aide de « gadgets » asymptotiques qui miment l'exemple de la figure 5.3 (droite).*





## Conclusion

*Ce qui se passe dans les romans est sans importance, on l'oublie une fois qu'ils sont finis. Ce sont les possibilités et les idées qu'ils nous inoculent et nous apportent à travers leurs cas imaginaires qui sont intéressantes.*

*Javier Marías, Comme les amours.*

L'intérêt de faire du jogging tous les matins, ce n'est pas seulement de courir de plus en plus vite : c'est aussi de pouvoir monter plus facilement les escaliers pour rentrer chez soi – ou chez les autres. Il y a un peu de cela dans l'exercice de la combinatoire des cartes.

En conclusion à ce document, je présenterai deux résultats qui relèvent de combinaisons un peu différentes de celles évoquées dans ce mémoire, et qui ne sont pas cartographiques par nature : la démonstration des conjectures de Bergeron et Préville-Ratelle sur les intervalles de Tamari [BCP13], et la démonstration de la conjecture de McDiarmid, Steger, et Welsh sur les graphes ajoutables aléatoires [CP15]. Elles ont, a priori, peu de choses à voir avec le reste, mais en fait, au cœur de chacun de ces travaux, il y a une astuce, une idée, une technique, ou une analogie venant de la combinatoire des cartes et qui est au cœur de la solution. Les deux papiers présentés ici [BCP13 ; CP15] sont d'écriture très technique, difficiles à lire, et la contribution cartographique qu'ils contiennent malheureusement difficile à détacher. Mais les résultats sont eux facilement énonçables et nous les énoncerons ici, comme une illustration des interactions de la combinatoire des cartes.

### 1. — INTERVALLES DE TAMARI ET CONJECTURES DE BERGERON ET PRÉVILLE-RATELLE [BCP13]

Pour  $m, n \geq 1$ , on considère ici des *chemins de  $m$ -Dyck de taille  $n$* , qui sont des chemins sur le réseau carré avec des pas Nord et Est, qui vont de  $(0, 0)$  à  $(mn, n)$  et restent faiblement au dessus de la droite  $\{x = my\}$ . Voir la figure 6.2. Ces chemins sont en bijection avec les arbres  $m$ -aires de taille  $n$ . Pour  $m = 1$  ils ne sont autres que les chemins de Dyck, à rotation de 45 degrés près.

François Bergeron a introduit sur l'ensemble  $\mathcal{T}_n^{(m)}$  de ces chemins une relation d'ordre, décrite à partir de la relation de couverture suivante (Figure 6.1). Si  $P$  et  $Q$  sont deux tels chemins, alors  $Q$  couvre  $P$  s'il existe dans  $P$  un pas Est  $a$ , suivi d'un pas Nord  $b$ , tel que  $Q$  s'obtient à partir de  $P$  en échangeant  $a$  et  $S$ , où  $S$  est le plus petit facteur de  $P$  qui commence par  $b$  et est un chemin de  $m$ -Dyck (translaté).

Cet ordre munit  $\mathcal{T}_n^{(m)}$  d'une structure de treillis distributif [BFP11], appelé le *treillis de  $m$ -Tamari de taille  $n$* . Pour  $m = 1$ , il coïncide avec le treillis de Tamari bien connu [BB09 ;

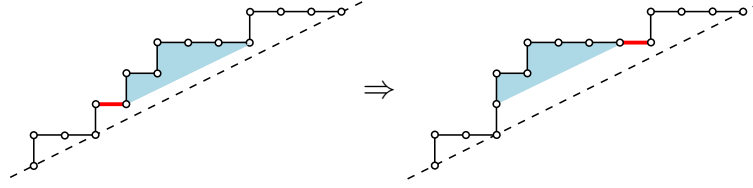


FIGURE 6.1 – La relation de couverture définissant l'ordre de  $m$ -Tamari. Le chemin de gauche est inférieur à celui de droite.

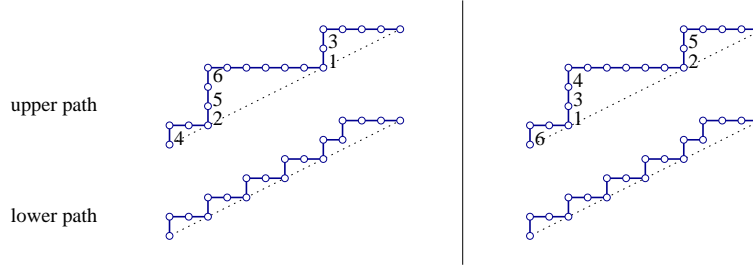


FIGURE 6.2 – Un intervalle de 2-Tamari étiqueté et son image par la permutation  $\sigma = 235614$ .

[FT67 ; HT72 ; Knu06]. L'intérêt pour ces treillis a sa source dans leur lien (conjectural) avec les espaces coinvariant diagonaux trivariés [BP12 ; BFP11]. En particulier, il est conjecturé que la représentation naturelle du groupe symétrique sur ces espaces est reliée à une représentation sur les intervalles dans le treillis de  $m$ -Tamari. C'est cette dernière représentation que nous avons étudiée.

Une *montée* dans un chemin est une suite maximale de pas Nord consécutifs. Un chemin de  $m$ -Dyck de taille  $n$  est étiqueté si ses pas Nord sont étiquetés de 1 à  $n$ , de manière croissante dans chaque montée (voir le chemin du haut sur la figure 6.2). Ces chemins sont en bijection avec certains arbres étiquetés ou fonctions de parking généralisées [SP02 ; Yan01], et sont comptés par les nombres :

$$(mn + 1)^{n-1}. \quad (6.1)$$

Un *intervalle de  $m$ -Tamari* est simplement une paire  $[P, Q]$  où  $P$  est plus petit que  $Q$  pour cet ordre. Il est *étiqueté* si le chemin du haut  $Q$  est étiqueté. Le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  agit sur les intervalles en permutant les étiquettes, puis en les réordonnant de manière croissante à l'intérieur de chaque montée (Figure 6.2). On appelle *représentation de  $m$ -Tamari* cette représentation de  $\mathfrak{S}_n$ . Le résultat suivant était conjecturé dans [BP12].

**Théorème 26 (Représentation de  $m$ -Tamari [BCP13]).** Soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$  une partition de  $n$  et  $\sigma$  une permutation de  $\mathfrak{S}_n$  de type cyclique  $\lambda$ . Alors le caractère de la représentation  $m$ -Tamari de  $\mathfrak{S}_n$  sur  $\sigma$  est donné par

$$\chi_m(\sigma) = (mn + 1)^{\ell-2} \prod_{1 \leq i \leq \ell} \binom{(m+1)\lambda_i}{m\lambda_i}. \quad (6.2)$$

De manière équivalente, ce nombre compte le nombre d'intervalles étiquetés laissés fixes par l'action de  $\sigma$ . En particulier, la dimension de la représentation, qui est le

nombre d'intervalles étiquetés de taille  $n$ , est

$$\chi_m(id) = (m+1)^n (mn+1)^{n-2}. \quad (6.3)$$

Notons que, puisque le nombre de manière d'étiqueter un intervalle  $[P, Q]$  donné de sorte qu'il soit stable par une permutation  $\sigma$  donnée ne dépend que de la longueur des montées de  $Q$ , on pourrait énoncer le résultat précédent sans parler de représentations de  $\mathfrak{S}_n$ . La formule (6.2) donne simplement l'énumération des intervalles  $[P, Q]$  avec un poids qui permet de contrôler implicitement la longueur de toutes les montées de  $Q$ .

Cette formule très simple a une démonstration très technique, déjà pour  $m = 1$ . On la démontre en introduisant une série génératrice multivariée pour laquelle nous arrivons à écrire une équation fonctionnelle reflétant une décomposition récursive des objets. L'équation fait apparaître une variable catalytique, ce qui est classique dans les méthodes à bases de série génératrices pour énumérer... les cartes! (voir [Bou06]). Néanmoins, cette équation est d'une classe nouvelle et sa résolution n'entre pas dans le cas des méthodes connues. Même en connaissant la solution, la vérification nous a demandé d'introduire une nouvelle méthode que j'appelle la méthode *différentielle catalytique*, malheureusement très technique.

Pour un ou une cartographe, la formule (6.2) est frappante. Elle rappelle fortement la formule donnant le nombre de  $m$ -constellations planaires enracinées de taille  $n$ , dont le type cyclique des faces est donné par la partition  $\lambda$ , qui est égal à

$$\frac{m(m-1)^{\ell(\lambda)} [(m-1)n]!}{[(m-1)n - \ell(\lambda) + 2]!} \prod_{k \geq 1} \frac{1}{d_k!} \binom{mk-1}{k-1}^{d_k}, \quad (6.4)$$

où  $d_k$  est le nombre de parts égales à  $k$  dans  $\lambda$ . Cette formule a été démontrée dans [BS00] puis [BDG04] au moyen de magnifiques bijections! La similarité avec (6.2) suggère un lien fort avec des objets cartographiques, voire une structure de fonction tau, mais nous n'en savons rien pour l'instant. La situation est de plus étonnante, puisque l'équation (6.2) n'a qu'une démonstration par séries génératrices très technique, alors que (6.4) qui lui ressemble n'avait jusqu'à récemment que des démonstrations bijectives limpides. Dans sa thèse [Fan16], Wenjie Fang a montré que la méthode différentielle catalytique de [BCP13] permet de redémontrer par le calcul l'équation (6.4). Les deux preuves, quoique très techniques et calculatoires, sont étonnamment similaires à chacune des étapes, ce qui plaide là encore pour un lien très fort entre ces modèles. Pour plus sur les liens entre cartes et intervalles dans le treillis de Tamari, y compris des avancées bijectives récentes, on pourra consulter comme point d'entrée la thèse [Fan16].

## 2. — GRAPHERS AJOUTABLES ET CONJECTURE DE MCDIARMID, STEGER ET WELSH [CP15]

Parmi les nombreux modèles de graphes aléatoires existant dans la littérature, beaucoup consistent à choisir un graphe uniformément au hasard parmi une certaine classe de graphes de taille  $n$  : graphes planaires, forêts, graphes de genre fixé, graphes dans une classe close par mineurs, etc.

On considèrera ici des graphes finis simples, d'ensemble de sommets  $\{1, \dots, n\}$  pour  $n \geq 1$ . Suivant [MSW06], on dit qu'une classe  $\mathcal{G}$  de graphes est *ajoutable*<sup>1</sup> si la propriété suivante est vraie :

1. "bridge-addable" dans la terminologie originale.

Si  $G$  est un graphe de  $\mathcal{G}$ , et si  $e$  est une arête de  $G$  dont les extrémités appartiennent à deux composantes connexes différentes de  $G$ , alors le graphe  $G \cup \{e\}$  obtenu en ajoutant  $e$  à  $G$  est aussi dans la classe  $\mathcal{G}$ .

Cette notion a été au départ introduite pour étudier les graphes planaires aléatoires (puisque la classe des graphes planaires est clairement ajoutable). D'autres exemples sont les forêts, les graphes sans triangles, les graphes admettant un couplage parfait, ou encore toute classe close par mineurs dont les mineurs exclus sont 2-connexes. Voir [MSW06; AMR12] pour d'autres d'exemples.

Dans [MSW05; MSW06], les auteurs étudient les propriétés d'un graphe pris uniformément au hasard dans une classe ajoutable. Ils montrent en particulier :

**Proposition 27** ([MSW05]). *Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  et pour toute classe ajoutable de graphes  $\mathcal{G}_n$  à  $n$  sommets, on ait*

$$\Pr(G_n \text{ est connexe}) \geq (1 - \epsilon)e^{-1}, \quad (6.5)$$

où  $G_n$  est choisi uniformément dans  $\mathcal{G}_n$ .

Les auteurs de [MSW06] conjecturent que la constante  $e^{-1}$  dans (6.5) peut être améliorée en  $e^{-1/2}$ . Notons que l'on ne peut pas espérer mieux, puisque l'on sait (voir [Rén59]) que si  $F_n$  est une forêt uniforme sur  $n$  sommets, alors on a quand  $n$  tend vers l'infini :

$$\Pr(F_n \text{ est connexe}) \longrightarrow e^{-1/2}. \quad (6.6)$$

La conjecture dit donc que les forêts sont, asymptotiquement, les classes ajoutables ayant le moins de graphes connexes. Le premier résultat partiel dans cette direction est dû à Balister, Bollobás, and Gerke [BBG08] qui ont amélioré la constante dans (6.5) de  $e^{-1}$  à  $e^{-0.7983}$ . Norin, dans un manuscrit incomplet [Nor], donne des idées pour l'améliorer à  $e^{-2/3}$ .

Sous l'hypothèse beaucoup plus forte que les classes sont aussi *altérables*<sup>2</sup> (c'est-à-dire également stables par *suppression* des arêtes-ponts) Addario-Berry, McDiarmid et Reed [AMR12], et indépendamment Kang et Panagiotou [KP13] ont obtenu la valeur voulue  $e^{-1/2}$ . Ces démonstrations reposent sur le fait que dans le cas altérable, les modèles se ramènent à des modèles explicites de forêts aléatoires pondérées. Malheureusement, ce n'est plus vrai dans le cas général. Notons également que de nombreuses classes sont ajoutables sans être altérables, comme les graphes ayant un couplage parfait, les graphes ayant une composante de grande taille, ou les graphes dans une classe ajoutable quelconque qui contiennent un sous-graphe donné (par exemple, les graphes planaires ayant un chemin de longueur donnée).

Dans [CP15], nous avons démontré la conjecture générale :

**Théorème 27 (Connexité dans les graphes ajoutables [CP15] – conjecture de McDiarmid Steger-Welsh).** *La conjecture de McDiarmid-Steger-Welsh est vraie : Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  et pour toute classe ajoutable  $\mathcal{G}_n$  de graphes à  $n$  sommets, on ait*

$$\Pr(G_n \text{ est connexe}) \geq (1 - \epsilon)e^{-1/2},$$

où  $G_n$  est choisi uniformément dans  $\mathcal{G}_n$ .

2. “bridge-alterable”

La démonstration du théorème [CP15] repose sur une sophistication d'un argument de double comptage très élégant dû aux auteurs de [MSW06]. Si  $\mathcal{G}_n^{(i)}$  désigne l'ensemble des graphes à  $i$  composantes dans  $\mathcal{G}_n$ , l'hypothèse d'ajoutabilité nous dit immédiatement :

$$i \left| \mathcal{G}_n^{(i+1)} \right| \leq \left| \mathcal{G}_n^{(i)} \right| \quad (6.7)$$

puisque l'on peut ajouter au moins  $i(n-i)$  arêtes entre deux composantes connexes dans un graphe à  $i+1$  composantes, mais qu'il y a au plus  $(n-i)$  arêtes coupantes que l'on peut supprimer dans le graphe obtenu. Donc s'il y a beaucoup de graphes à  $i+1$  composantes, il y en a également beaucoup à  $i$  composantes, et il devrait y avoir beaucoup de graphes connexes. De fait, la constante  $e^{-1}$  s'obtient directement à partir de la borne (6.7)

Notre démonstration consiste à raffiner excessivement cet argument de double comptage. D'abord, [BBG08] montre qu'il suffit de démontrer le théorème lorsque tous les graphes de  $\mathcal{G}_n$  sont des forêts (joli argument à base d'arbres couvrants). Nous nous sommes ensuite rendu compte que pour améliorer la borne (6.7), il était nécessaire de connaître très précisément les statistiques locales des graphes considérés. Plus précisément, inspirés par la notion de convergence locale issue de l'étude des cartes (voir chapitre 3 section 4), nous introduisons pour chaque graphe  $G$  dans  $\mathcal{G}_n$  des statistiques  $(\alpha_G(T))_{T \in \mathcal{T}}$ , où  $T$  parcourt l'ensemble de tous les arbres enracinés et où  $\alpha_G(T)$  est la proportion de sommets de  $G$  dont « pend » une copie de  $T$ . On peut alors se rendre compte qu'en appliquant localement l'argument précédent à des graphes dont la statistique  $(\alpha_G)$  est voisine d'un vecteur  $\alpha$  donné, le facteur  $i$  dans la borne (6.7) peut être amélioré en un facteur  $f(\alpha)i$ , où  $f(\alpha)$  dépend de la statistique  $\alpha$  des graphes en jeu.

Plus précisément, la fonctionnelle  $f(\alpha)$  est reliée aux statistiques locales  $\alpha$  par un ensemble infini d'inégalités indexées par les arbres enracinés, et tout notre travail a ensuite été d'optimiser ce système d'inégalités, pour montrer que l'on peut approcher  $f(\alpha) = 2 + o(1)$  pour tout vecteur  $\alpha$ . En fait, ce problème d'optimisation revient à estimer la singularité d'une certaine série génératrice multivariée de forêts pondérées par des poids supermultiplicatifs. La culture de combinatoriste intervient ici de manière cruciale. Parmi les nombreuses démonstrations existantes de (6.6), la plupart se comportent mal vis-à-vis de nos systèmes d'inégalités. Il se trouve qu'une des approches, celle à base du théorème de dissymétrie cher aux plus purs combinatoristes [BLL98], est bien adaptée à ce cadre. C'est ainsi que fonctionne notre démonstration.

Nous renvoyons à la version SODA de notre article [CP15] pour une description heuristique poussée de la méthode de « double comptage local » que nous avons introduite, et à la version longue sur arxiv pour les détails (un peu techniques!) de la démonstration et de la résolution du problème d'optimisation.

Nous remercions les lecteurs et lectrices qui nous ont accompagné jusqu'ici, et terminons par ces considérations ce mémoire !



---

# Bibliographie

- [AMR12] L. ADDARIO-BERRY, C. MCDIARMID et B. REED. “Connectivity for bridge-addable monotone graph classes”. In : *Combin. Probab. Comput.* 21.6 (2012), p. 803–815.
- [Add+18] L. ADDARIO-BERRY, O. ANGEL, G. CHAPUY, É. FUSY et C. GOLDSCHMIDT. “Voronoi tessellations in the CRT and continuum random maps of finite excess”. In : *proceedings of SODA 2018, New Orleans* (2018).
- [Adr97] N. M. ADRIANOV. “An analogue of the Harer-Zagier formula for unicellular two-color maps”. In : *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 31.3 (1997), p. 1–9, 95.
- [AP15] M. ALBENQUE et D. POULALHON. “A generic method for bijections between blossoming trees and planar maps”. In : *Electron. J. Combin.* 22.2 (2015), Paper 2.38, 44.
- [Ald93] D. ALDOUS. “Tree-based models for random distribution of mass”. In : *J. Statist. Phys.* 73.3-4 (1993), p. 625–641.
- [Ald98] D. ALDOUS. “Tree-valued Markov chains and Poisson-Galton-Watson distributions”. In : *Microsurveys in discrete probability (Princeton, NJ, 1997)*. T. 41. DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, p. 1–20.
- [AZ13] A. ALEXANDROV et A. ZABRODIN. “Free fermions and tau-functions”. In : *Journal of Geometry and Physics* 67 (2013), p. 37–80.
- [Ang+13] O. ANGEL, G. CHAPUY, N. CURIEN et G. RAY. “The local limit of unicellular maps in high genus”. In : *Electron. Commun. Probab.* 18 (2013), no. 86, 1–8.
- [AR15] O. ANGEL et G. RAY. “Classification of half-planar maps”. In : *Ann. Probab.* 43.3 (2015), p. 1315–1349.
- [AS03] O. ANGEL et O. SCHRAMM. “Uniform infinite planar triangulations”. In : *Comm. Math. Phys.* 241.2-3 (2003), p. 191–213.
- [AG99] D. ARQUÈS et A. GIORGETTI. “Énumération des cartes pointées sur une surface orientable de genre quelconque en fonction des nombres de sommets et de faces”. In : *J. Combin. Theory Ser. B* 77.1 (1999), p. 1–24.
- [BBG08] P. BALISTER, B. BOLLOBÁS et S. GERKE. “Connectivity of addable graph classes”. In : *J. Combin. Theory Ser. B* 98.3 (2008), p. 577–584.
- [BC86] E. A. BENDER et E. R. CANFIELD. “The asymptotic number of rooted maps on a surface”. In : *J. Combin. Theory Ser. A* 43.2 (1986), p. 244–257.

- [BC91] E. A. BENDER et E. R. CANFIELD. “The number of rooted maps on an orientable surface”. In : *J. Combin. Theory Ser. B* 53.2 (1991), p. 293–299.
- [BC94] E. A. BENDER et E. R. CANFIELD. “The number of degree-restricted rooted maps on the sphere”. In : *SIAM J. Discrete Math.* 7.1 (1994), p. 9–15.
- [BCR93] E. A. BENDER, E. R. CANFIELD et L. B. RICHMOND. “The asymptotic number of rooted maps on a surface. II. Enumeration by vertices and faces”. In : *J. Combin. Theory Ser. A* 63.2 (1993), p. 318–329.
- [BGR08] E. A. BENDER, Z. GAO et L. B. RICHMOND. “The map asymptotics constant  $t_g$ ”. In : *Electron. J. Combin.* 15.1 (2008), Research paper 51, 8.
- [BK72] E. A. BENDER et D. E. KNUTH. “Enumeration of plane partitions”. In : *J. Combinatorial Theory Ser. A* 13 (1972), p. 40–54.
- [BS01] I. BENJAMINI et O. SCHRAMM. “Recurrence of distributional limits of finite planar graphs”. In : *Electron. J. Probab.* 6 (2001), no. 23, 13 pp.
- [Ben10] I. BENJAMINI. “Random Planar Metrics”. In : *Proceedings of the ICM 2010* (2010).
- [BP12] B. BERGERON et L.-F. PRÉVILLE-RATELLE. “Higher trivariate diagonal harmonics via generalized Tamari posets”. In : *J. Combinatorics* 3.3 (2012), p. 317–341.
- [BLL98] F. BERGERON, G. LABELLE et P. LEROUX. *Combinatorial species and tree-like structures*. T. 67. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, Cambridge, 1998, p. xx+457.
- [BB09] O. BERNARDI et N. BONICHON. “Intervals in Catalan lattices and realizers of triangulations”. In : *J. Combin. Theory Ser. A* 116.1 (2009), p. 55–75.
- [Ber12] O. BERNARDI. “An analogue of the Harer-Zagier formula for unicellular maps on general surfaces”. In : *Adv. in Appl. Math.* 48.1 (2012), p. 164–180.
- [BB11] O. BERNARDI et M. BOUSQUET-MÉLOU. “Counting colored planar maps : algebraicity results”. In : *J. Combin. Theory Ser. B* 101.5 (2011), p. 315–377.
- [BC11a] O. BERNARDI et G. CHAPUY. “A bijection for covered maps, or a shortcut between Harer-Zagier’s and Jackson’s formulas”. In : *J. Combin. Theory Ser. A* 118.6 (2011), p. 1718–1748.
- [BC11b] O. BERNARDI et G. CHAPUY. “Counting unicellular maps on non-orientable surfaces”. In : *Adv. in Appl. Math.* 47.2 (2011), p. 259–275.
- [BF12a] O. BERNARDI et É. FUSY. “A bijection for triangulations, quadrangulations, pentagulations, etc”. In : *J. Combin. Theory Ser. A* 119.1 (2012), p. 218–244.
- [BF12b] O. BERNARDI et É. FUSY. “Unified bijections for maps with prescribed degrees and girth”. In : *J. Combin. Theory Ser. A* 119.6 (2012), p. 1351–1387.
- [BM14] O. BERNARDI et A. H. MORALES. “Counting trees using symmetries”. In : *J. Combin. Theory Ser. A* 123 (2014), p. 104–122.
- [Bet+14] D. BETEA, C. BOUTILLIER, J. BOUTTIER, G. CHAPUY, S. CORTEEL et M. VULETIĆ. “Perfect sampling algorithm for Schur processes”. In : *arXiv1407.3764* (2014).



- [Bet10] J. BETTINELLI. “Scaling limits for random quadrangulations of positive genus”. In : *Electron. J. Probab.* 15 (2010), no. 52, 1594–1644.
- [Bet12] J. BETTINELLI. “The topology of scaling limits of positive genus random quadrangulations”. In : *Ann. Probab.* 40.5 (2012), p. 1897–1944.
- [BM] J. BETTINELLI et G. MIERMONT. *Brownian surfaces II. The general case. In preparation.*
- [Bia05] P. BIANE. “Nombre de factorisations d’un grand cycle”. In : *Sém. Lothar. Combin.* 51 (2004/05), Art. B51a, 4.
- [Bor07] A. BORODIN. “Periodic Schur process and cylindric partitions”. In : *Duke Math. J.* 140.3 (2007), p. 391–468. eprint : [arXiv:math/0601019](https://arxiv.org/abs/math/0601019)[math.CO].
- [Bor11] A. BORODIN. “Schur dynamics of the Schur processes”. In : *Adv. Math.* 228.4 (2011), p. 2268–2291.
- [BF14] A. BORODIN et P. L. FERRARI. “Anisotropic growth of random surfaces in  $2 + 1$  dimensions”. In : *Comm. Math. Phys.* 325.2 (2014), p. 603–684. eprint : [arXiv:0804.3035](https://arxiv.org/abs/0804.3035)[math-ph].
- [BF15] A. BORODIN et P. L. FERRARI. *Random tilings and Markov chains for interlacing particles.* 2015. eprint : [arXiv:1506.03910](https://arxiv.org/abs/1506.03910)[math-ph].
- [Bor15] G. BOROT. *A walk through the woods of integrability.* 2015. eprint : <http://people.mpim-bonn.mpg.de/gborot/Teach.html>.
- [BFP11] M. BOUSQUET-MÉLOU, É. FUSY et L.-F. PRÉVILLE-RATELLE. “The number of intervals in the  $m$ -Tamari lattices”. In : *Electron. J. Combin.* 18.2 (2011), Research Paper 31, 26 pp. (electronic).
- [Bou06] M. BOUSQUET-MÉLOU. “Rational and algebraic series in combinatorial enumeration”. In : *International Congress of Mathematicians. Vol. III.* Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, p. 789–826.
- [BC12] M. BOUSQUET-MÉLOU et G. CHAPUY. “The vertical profile of embedded trees”. In : *Electron. J. Combin.* 19.3 (2012), Paper 46, 61.
- [BCP13] M. BOUSQUET-MÉLOU, G. CHAPUY et L.-F. PRÉVILLE-RATELLE. “The representation of the symmetric group on  $m$ -Tamari intervals”. In : *Adv. Math.* 247 (2013), p. 309–342.
- [BJ06a] M. BOUSQUET-MÉLOU et S. JANSON. “The density of the ISE and local limit laws for embedded trees”. In : *Ann. Appl. Probab.* 16.3 (2006), p. 1597–1632.
- [BJ06b] M. BOUSQUET-MÉLOU et A. JEHANNE. “Polynomial equations with one catalytic variable, algebraic series and map enumeration”. In : *J. Combin. Theory Ser. B* 96.5 (2006), p. 623–672.
- [BS00] M. BOUSQUET-MÉLOU et G. SCHAEFFER. “Enumeration of planar constellations”. In : *Adv. in Appl. Math.* 24.4 (2000), p. 337–368.
- [Bou+17] C. BOUTILLIER, J. BOUTTIER, G. CHAPUY, S. CORTEEL et S. RAMASSAMY. “Dimers on Rail Yard Graphs”. In : *Ann. Inst. Henri Poincaré Comb. Phys. Interact.* 4.4 (2017), p. 479–539.
- [Bou+12] C. BOUTILLIER, S. MKRTCHYAN, N. RESHETIKHIN et P. TINGLEY. “Random skew plane partitions with a piecewise periodic back wall”. In : *Ann. Henri Poincaré* 13.2 (2012), p. 271–296.

- [BDG03] J. BOUTTIER, P. DI FRANCESCO et E. GUITTER. “Geodesic distance in planar graphs”. In : *Nuclear Phys. B* 663.3 (2003), p. 535–567.
- [BDG04] J. BOUTTIER, P. DI FRANCESCO et E. GUITTER. “Planar maps as labeled mobiles”. In : *Electron. J. Combin.* 11.1 (2004), Research Paper 69, 27.
- [BCC17] J. BOUTTIER, G. CHAPUY et S. CORTEEL. “From Aztec diamonds to pyramids : steep tilings”. In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 369.8 (2017), p. 5921–5959.
- [BZ10] Y. BURMAN et D. ZVONKINE. “Cycle factorizations and 1-faced graph embeddings”. In : *European J. Combin.* 31.1 (2010), p. 129–144.
- [CC15] S. R. CARRELL et G. CHAPUY. “Simple recurrence formulas to count maps on orientable surfaces”. In : *J. Combin. Theory Ser. A* 133 (2015), p. 58–75.
- [Cha09a] G. CHAPUY. “Asymptotic enumeration of constellations and related families of maps on orientable surfaces”. In : *Combin. Probab. Comput.* 18.4 (2009), p. 477–516.
- [Cha09b] G. CHAPUY. “Combinatoire bijective des cartes de genre supérieur”. Thèse de Doctorat. Ecole Polytechnique, juin 2009.
- [Cha10] G. CHAPUY. “The structure of unicellular maps, and a connection between maps of positive genus and planar labelled trees”. In : *Probab. Theory Related Fields* 147.3-4 (2010), p. 415–447.
- [Cha11] G. CHAPUY. “A new combinatorial identity for unicellular maps, via a direct bijective approach”. In : *Adv. in Appl. Math.* 47.4 (2011), p. 874–893.
- [Cha17] G. CHAPUY. “On tessellations of random maps and the  $t_g$ -recurrence”. In : *Sém. Lothar. Combin.* 78B (2017). Proceedings of FPSAC ’17. Long version submitted for publication, see arxiv :1603.07714., Art. 79, 12.
- [CD17] G. CHAPUY et M. DOLEGA. “A bijection for rooted maps on general surfaces”. In : *J. Combin. Theory Ser. A* 145 (2017), p. 252–307.
- [CF16] G. CHAPUY et W. FANG. “Generating functions of bipartite maps on orientable surfaces”. In : *Electron. J. Combin.* 23.3 (2016), Paper 3.31, 37.
- [CFF13] G. CHAPUY, V. FÉRAY et É. FUSY. “A simple model of trees for unicellular maps”. In : *J. Combin. Theory Ser. A* 120.8 (2013), p. 2064–2092.
- [CMS09] G. CHAPUY, M. MARCUS et G. SCHAEFFER. “A bijection for rooted maps on orientable surfaces”. In : *SIAM J. Discrete Math.* 23.3 (2009), p. 1587–1611.
- [CP15] G. CHAPUY et G. PERARNAU. “Connectivity in bridge-addable graph classes : the McDiarmid-Steger-Welsh conjecture”. In : *Proceedings of SODA 2016. Long version submitted for publication, available at ArXiv :1504.06344* (2015). arXiv : 1504.06344 [math.CO].
- [CS04] P. CHASSAING et G. SCHAEFFER. “Random planar lattices and integrated superBrownian excursion”. In : *Probab. Theory Related Fields* 128.2 (2004), p. 161–212.
- [CY14] S. CHHITA et B. YOUNG. “Coupling functions for domino tilings of Aztec diamonds”. In : *Adv. Math.* 259 (2014), p. 173–251.
- [CM92] R. CORI et A. MACHI. “Maps, hypermaps and their automorphisms : a survey. I, II, III”. In : *Exposition. Math.* 10.5 (1992), p. 403–427, 429–447, 449–467.

- [CV81] R. CORI et B. VAUQUELIN. “Planar maps are well labeled trees”. In : *Canad. J. Math.* 33.5 (1981), p. 1023–1042.
- [Cur16] N. CURIEN. “Planar stochastic hyperbolic triangulations”. In : *Probab. Theory Related Fields* 165.3-4 (2016), p. 509–540.
- [DS98] E. DERBEZ et G. SLADE. “The scaling limit of lattice trees in high dimensions”. In : *Comm. Math. Phys.* 193.1 (1998), p. 69–104.
- [Eke+01] T. EKEDAHL, S. LANDO, M. SHAPIRO et A. VAINSHTEIN. “Hurwitz numbers and intersections on moduli spaces of curves”. In : *Invent. Math.* 146.2 (2001), p. 297–327.
- [Elk+92a] N. ELKIES, G. KUPERBERG, M. LARSEN et J. PROPP. “Alternating-sign matrices and domino tilings. I”. In : *J. Algebraic Combin.* 1.2 (1992), p. 111–132.
- [Elk+92b] N. ELKIES, G. KUPERBERG, M. LARSEN et J. PROPP. “Alternating-sign matrices and domino tilings. II”. In : *J. Algebraic Combin.* 1.3 (1992), p. 219–234.
- [EO09] B. EYNARD et N. ORANTIN. “Topological recursion in enumerative geometry and random matrices”. In : *J. Phys. A* 42.29 (2009), p. 293001, 117.
- [Eyn16] B. EYNARD. *Counting surfaces*. T. 70. Progress in Mathematical Physics. CRM Aisenstadt chair lectures. Birkhäuser/Springer, [Cham], 2016, p. xvii+414.
- [Fan14] W. FANG. “A generalization of the quadrangulation relation to constellations and hypermaps”. In : *J. Combin. Theory Ser. A* 127 (2014), p. 1–21.
- [Fan16] W. FANG. *Aspects Énumératifs et bijectifs des cartes combinatoires : généralisation, unification et application*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot. 2016.
- [Fér10] V. FÉRAY. “Stanley’s formula for characters of the symmetric group”. In : *Ann. Comb.* 13.4 (2010), p. 453–461.
- [FT67] H. FRIEDMAN et D. TAMARI. “Problèmes d’associativité : Une structure de treillis finis induite par une loi demi-associative”. In : *J. Combinatorial Theory* 2 (1967), p. 215–242.
- [FH91] W. FULTON et J. HARRIS. *Representation theory*. T. 129. Graduate Texts in Mathematics. A first course, Readings in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1991, p. xvi+551.
- [Fus15] É. FUSY. *Combinatoire des cartes planaires par méta-bijection*. Habilitation à diriger des recherches, Orsay. 2015.
- [Gao93] Z. GAO. “The number of degree restricted maps on general surfaces”. In : *Discrete Math.* 123.1-3 (1993), p. 47–63.
- [GR94] Z. GAO et L. B. RICHMOND. “Root vertex valency distributions of rooted maps and rooted triangulations”. In : *European J. Combin.* 15.5 (1994), p. 483–490.
- [GW00] Z. GAO et N. C. WORMALD. “The distribution of the maximum vertex degree in random planar maps”. In : *J. Combin. Theory Ser. A* 89.2 (2000), p. 201–230.
- [Ges93] I. M. GESSEL. “Counting paths in Young’s lattice”. In : *J. Statist. Plann. Inference* 34.1 (1993), p. 125–134.

- [GGN13] I. P. GOULDEN, M. GUAY-PAQUET et J. NOVAK. “Polynomiality of monotone Hurwitz numbers in higher genera”. In : *Adv. Math.* 238 (2013), p. 1–23.
- [GJ96] I. P. GOULDEN et D. M. JACKSON. “Connection coefficients, matchings, maps and combinatorial conjectures for Jack symmetric functions”. In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 348.3 (1996), p. 873–892.
- [GJ99] I. P. GOULDEN et D. M. JACKSON. “The number of ramified coverings of the sphere by the double torus, and a general form for higher genera”. In : *J. Combin. Theory Ser. A* 88.2 (1999), p. 259–275.
- [GJ08] I. P. GOULDEN et D. M. JACKSON. “The KP hierarchy, branched covers, and triangulations”. In : *Adv. Math.* 219.3 (2008), p. 932–951.
- [GJV01] I. P. GOULDEN, D. M. JACKSON et R. VAKIL. “The Gromov-Witten potential of a point, Hurwitz numbers, and Hodge integrals”. In : *Proc. London Math. Soc. (3)* 83.3 (2001), p. 563–581.
- [GN05] I. P. GOULDEN et A. NICA. “A direct bijection for the Harer-Zagier formula”. In : *J. Combin. Theory Ser. A* 111.2 (2005), p. 224–238.
- [GJ97] I. GOULDEN et D. JACKSON. “Maps in Locally Orientable Surfaces and Integrals Over Real Symmetric Matrices”. In : *Canad. J. Math* 48 (1997).
- [GS98] A. GOUPIL et G. SCHAEFFER. “Factoring  $n$ -cycles and counting maps of given genus”. In : *European J. Combin.* 19.7 (1998), p. 819–834.
- [GH15] M. GUAY-PAQUET et J. HARNAD. “2D Toda  $\tau$ -functions as combinatorial generating functions”. In : *Lett. Math. Phys.* 105.6 (2015), p. 827–852.
- [GH17] M. GUAY-PAQUET et J. HARNAD. “Generating functions for weighted Hurwitz numbers”. In : *J. Math. Phys.* 58.8 (2017), p. 083503, 28.
- [Gui17] E. GUITTER. “On a conjecture by Chapuy about Voronoi cells in large maps”. In : *ArXiv e-prints* (mar. 2017). arXiv : 1703.02781 [math.CO].
- [HZ86] J. HARER et D. ZAGIER. “The Euler characteristic of the moduli space of curves”. In : *Invent. Math.* 85 (1986), p. 457–486.
- [HO15] J. HARNAD et A. Y. ORLOV. “Hypergeometric  $\tau$ -functions, Hurwitz numbers and enumeration of paths”. In : *Comm. Math. Phys.* 338.1 (2015), p. 267–284.
- [HT72] S. HUANG et D. TAMARI. “Problems of Associativity : A Simple Proof for the Lattice Property of Systems Ordered by a Semi-associative Law”. In : *J. Combin. Theory Ser. A* 13.1 (1972), p. 7–13.
- [Hur91] A. HURWITZ. “Ueber Riemann’sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten”. In : *Math. Ann.* 39.1 (1891), p. 1–60.
- [Jac88] D. M. JACKSON. “Some combinatorial problems associated with products of conjugacy classes of the symmetric group”. In : *J. Combin. Theory Ser. A* 49.2 (1988), p. 363–369.
- [JV90a] D. M. JACKSON et T. I. VISENTIN. “A character-theoretic approach to embeddings of rooted maps in an orientable surface of given genus”. In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 322.1 (1990), p. 343–363.
- [JV90b] D. M. JACKSON et T. I. VISENTIN. “Character theory and rooted maps in an orientable surface of given genus : face-colored maps”. In : *Trans. Amer. Math. Soc.* 322.1 (1990), p. 365–376.

- [JM05] S. JANSON et J.-F. MARCKERT. “Convergence of discrete snakes”. In : *J. Theoret. Probab.* 18.3 (2005), p. 615–647.
- [Jan03] S. JANSON. “The Wiener index of simply generated random trees”. In : *Random Structures Algorithms* 22.4 (2003), p. 337–358.
- [Joh02] K. JOHANSSON. “Non-intersecting paths, random tilings and random matrices”. In : *Probab. Theory Related Fields* 123.2 (2002), p. 225–280.
- [Juc66] A. JUCYS. “On the Young operators of the symmetric groups”. In : *Lithuanian Journal of Physics* VI.2 (1966), p. 180–189.
- [Juc74] A. JUCYS. “Symmetric polynomials and the center of the symmetric group ring”. In : *Reports Math. Phys.* 5 (1974), p. 107–112.
- [Kac90] V. G. KAC. *Infinite-dimensional Lie algebras*. Third. Cambridge : Cambridge University Press, 1990, p. xxii+400.
- [KP13] M. KANG et K. PANAGIOTOU. “On the connectivity of random graphs from addable classes”. In : *J. Combin. Theory Ser. B* 103.2 (2013), p. 306–312.
- [KKN99] V. A. KAZAKOV, I. K. KOSTOV et N. NEKRASOV. “D-particles, matrix integrals and KP hierarchy”. In : *Nuclear Phys. B* 557.3 (1999), p. 413–442.
- [KZ15] M. KAZARIAN et P. ZOGRAF. “Virasoro constraints and topological recursion for Grothendieck’s dessin counting”. In : *Lett. Math. Phys.* 105.8 (2015), p. 1057–1084.
- [Ken05] R. KENYON. *Talk given at the workshop on Random partitions and Calabi-Yau crystals, Amsterdam*. Slides available at <http://www.math.brown.edu/~rkenyon/talks/pyramids.pdf>. 2005.
- [Knu06] D. E. KNUTH. *The art of computer programming. Vol. 4, Fasc. 4*. Generating all trees—history of combinatorial generation. Upper Saddle River, NJ : Addison-Wesley, 2006, p. vi+120.
- [Kra06] C. KRATTENTHALER. “Growth diagrams, and increasing and decreasing chains in fillings of Ferrers shapes”. In : *Adv. in Appl. Math.* 37.3 (2006), p. 404–431.
- [LZ04] S. K. LANDO et A. K. ZVONKIN. *Graphs on surfaces and their applications*. T. 141. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. With an appendix by Don B. Zagier, Low-Dimensional Topology, II. Berlin : Springer-Verlag, 2004, p. xvi+455.
- [Las01] B. LASS. “Démonstration combinatoire de la formule de Harer-Zagier”. In : *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 333.3 (2001), p. 155–160.
- [Le 05] J.-F. LE GALL. “Random trees and applications”. In : *Probab. Surv.* 2 (2005), p. 245–311.
- [Le 07] J.-F. LE GALL. “The topological structure of scaling limits of large planar maps”. In : *Invent. Math.* 169.3 (2007), p. 621–670.
- [Le 13] J.-F. LE GALL. “Uniqueness and universality of the Brownian map”. In : *Ann. Probab.* 41.4 (2013), p. 2880–2960.
- [LP08] J.-F. LE GALL et F. PAULIN. “Scaling limits of bipartite planar maps are homeomorphic to the 2-sphere”. In : *Geom. Funct. Anal.* 18.3 (2008), p. 893–918.
- [Le 99] J.-F. LE GALL. *Spatial branching processes, random snakes and partial differential equations*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Basel : Birkhäuser Verlag, 1999, p. x+163.

- [Led09] M. LEDOUX. “A recursion formula for the moments of the Gaussian orthogonal ensemble”. In : *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* 45.3 (2009), p. 754–769.
- [Lis04] V. A. LISKOVETS. “Enumerative formulae for unrooted planar maps : a pattern”. In : *Electron. J. Combin.* 11.1 (2004), Research Paper 88, 14.
- [LW06] V. A. LISKOVETS et T. R. WALSH. “Counting unrooted maps on the plane”. In : *Adv. in Appl. Math.* 36.4 (2006), p. 364–387.
- [Mac95] I. G. MACDONALD. *Symmetric functions and Hall polynomials*. Second. Oxford Mathematical Monographs. With contributions by A. Zelevinsky, Oxford Science Publications. New York : The Clarendon Press Oxford University Press, 1995, p. x+475.
- [Mac04] P. A. MACMAHON. *Combinatory analysis. Vol. I, II (bound in one volume)*. Dover Phoenix Editions. Reprint of it An introduction to combinatory analysis (1920) and it Combinatory analysis. Vol. I, II (1915, 1916). Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2004, p. ii+761.
- [MM03] J.-F. MARCKERT et A. MOKKADEM. “States spaces of the snake and its tour—convergence of the discrete snake”. In : *J. Theoret. Probab.* 16.4 (2003), p. 1015–1046.
- [MS01] M. MARCUS et G. SCHAEFFER. “Une bijection simple pour les cartes orientables”. In : *manuscript* (2001).
- [Mas67] W. S. MASSEY. *Algebraic topology : An introduction*. Harcourt, Brace & World, Inc., New York, 1967, p. xix+261.
- [MSW05] C. MCDIARMID, A. STEGER et D. A. WELSH. “Random planar graphs”. In : *J. Combin. Theory Ser. B* 93.2 (2005), p. 187–205.
- [MSW06] C. MCDIARMID, A. STEGER et D. A. WELSH. “Random graphs from planar and other addable classes”. In : *Topics in discrete mathematics*. T. 26. Algorithms Combin. Springer, Berlin, 2006, p. 231–246.
- [MN16] A. MEDNYKH et R. NEDELA. “Recent progress in enumeration of hypermaps”. In : *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)* 446.Kombinatorika i Teoriya Grafov. V (2016), p. 139–164.
- [Mie08a] G. MIERMONT. “Invariance principles for spatial multitype Galton-Watson trees”. In : *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* 44.6 (2008), p. 1128–1161.
- [Mie08b] G. MIERMONT. “On the sphericity of scaling limits of random planar quadrangulations”. In : *Electron. Commun. Probab.* 13 (2008), p. 248–257.
- [Mie09] G. MIERMONT. “Tessellations of random maps of arbitrary genus”. In : *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* 42.5 (2009), p. 725–781.
- [Mie13] G. MIERMONT. “The Brownian map is the scaling limit of uniform random plane quadrangulations”. In : *Acta Math.* 210.2 (2013), p. 319–401.
- [MS15] J. MILLER et S. SHEFFIELD. “An axiomatic characterization of the Brownian map”. In : *ArXiv e-prints* (juin 2015). arXiv : 1506.03806 [math.PR].
- [MJD00] T. MIWA, M. JIMBO et E. DATE. *Solitons*. T. 135. Cambridge Tracts in Mathematics. Differential equations, symmetries and infinite-dimensional algebras, Translated from the 1993 Japanese original by Miles Reid. Cambridge : Cambridge University Press, 2000, p. x+108.

- [MT01] B. MOHAR et C. THOMASSEN. *Graphs on surfaces*. Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 2001, p. xii+291.
- [MV09] A. MORALES et E. VASSILIEVA. “Bijective enumeration of bicolored maps of given vertex degree distribution”. In : *DMTCS Proceedings AK (2009)*, p. 661–672.
- [Mur81] G. MURPHY. “A new construction of Young’s seminormal representation of the symmetric group”. In : *J. Algebra* 69 (1981), p. 287–291.
- [Nor] S. NORIN. “Connectivity of addable classes of forests”. In : (). available at the author’s webpage.
- [OV96] A. OKOUNKOV et A. VERSHIK. “A new approach to representation theory of symmetric groups”. In : *Selecta Math.* 2.4 (1996), p. 1–15.
- [Oko00] A. OKOUNKOV. “Toda equations for Hurwitz numbers”. In : *Math. Res. Lett.* 7.4 (2000), p. 447–453.
- [Oko01] A. OKOUNKOV. “Infinite wedge and random partitions”. In : *Selecta Math. (N.S.)* 7.1 (2001), p. 57–81.
- [Oko02] A. OKOUNKOV. “Symmetric functions and random partitions”. In : *Symmetric functions 2001 : surveys of developments and perspectives*. T. 74. NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002, p. 223–252.
- [OR07] A. OKOUNKOV et N. RESHETIKHIN. “Random skew plane partitions and the Pearcey process”. In : *Comm. Math. Phys.* 269.3 (2007), p. 571–609.
- [OR03] A. OKOUNKOV et N. RESHETIKHIN. “Correlation function of Schur process with application to local geometry of a random 3-dimensional Young diagram”. In : *J. Amer. Math. Soc.* 16.3 (2003), 581–603 (electronic).
- [OS01] A. Y. ORLOV et D. M. SCHERBIN. “Multivariate hypergeometric functions as  $\tau$ -functions of Toda lattice and Kadomtsev-Petviashvili equation”. In : *Phys. D* 152/153 (2001). Advances in nonlinear mathematics and science, p. 51–65.
- [PP96] I. PAK et A. POSTNIKOV. “Oscillating Tableaux,  $(S_p \times S_p)$ -modules, and Robinson-Schensted-Knuth correspondence”. In : *Proceedings of FPSAC ’96, Minneapolis, MN*. 1996.
- [Pit99] J. PITMAN. “The SDE solved by local times of a Brownian excursion or bridge derived from the height profile of a random tree or forest”. In : *Ann. Probab.* 27.1 (1999), p. 261–283.
- [PS02] D. POULALHON et G. SCHAEFFER. “Factorizations of large cycles in the symmetric group”. In : *Discrete Math.* 254.1-3 (2002), p. 433–458.
- [Pro02] J. PROPP. *Lattice structure for orientations of graphs*. 2002. eprint : arXiv:math/0209005[math.CO].
- [Ray15] G. RAY. “Large unicellular maps in high genus”. In : *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* 51.4 (2015), p. 1432–1456.
- [Rém85] J.-L. RÉMY. “Un procédé itératif de dénombrement d’arbres binaires et son application à leur génération aléatoire”. In : *RAIRO Inform. Théor.* 19.2 (1985), p. 179–195.
- [Rén59] A. RÉNYI. “Some remarks on the theory of trees”. In : *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* 4 (1959), p. 73–85.

- [Sag01] B. E. SAGAN. *The symmetric group*. Second. T. 203. Graduate Texts in Mathematics. Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions. Springer-Verlag, New York, 2001, p. xvi+238.
- [Sch15] G. SCHAEFFER. “Chapter on map enumeration, Handbook of Enumerative Combinatorics”. In : *CRC Press, Miklós Bóna, editor* (2015).
- [SV08] G. SCHAEFFER et E. A. VASSILIEVA. “A bijective proof of Jackson’s formula for the number of factorizations of a cycle”. In : *J. Comb. Theory, Ser. A* 115.6 (2008), p. 903–924.
- [Sch97] G. SCHAEFFER. “Bijective census and random generation of Eulerian planar maps with prescribed vertex degrees”. In : *Electron. J. Combin.* 4.1 (1997), Research Paper 20, 14 pp. (electronic).
- [Sch99] G. SCHAEFFER. “Conjugaison d’arbres et cartes combinatoires aléatoires”. Thèse de doctorat. Université Bordeaux I, 1999.
- [SW85] G. SEGAL et G. WILSON. “Loop groups and equations of KdV type”. In : *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 61 (1985), p. 5–65.
- [Ser78] J.-P. SERRE. *Représentations linéaires des groupes finis*. revised. Hermann, Paris, 1978, p. 182.
- [SP02] R. P. STANLEY et J. PITMAN. “A polytope related to empirical distributions, plane trees, parking functions, and the associahedron”. In : *Discrete Comput. Geom.* 27.4 (2002), p. 603–634.
- [Sta99] R. P. STANLEY. *Enumerative combinatorics. Vol. 2*. T. 62. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. With a foreword by Gian-Carlo Rota and appendix 1 by Sergey Fomin. Cambridge : Cambridge University Press, 1999, p. xii+581.
- [Str96] V. STREHL. “Minimal transitive products of transpositions—the reconstruction of a proof of A. Hurwitz”. In : *Sém. Lothar. Combin.* 37 (1996), Art. S37c, 12.
- [Tut62a] W. T. TUTTE. “A census of planar triangulations”. In : *Canad. J. Math.* 14 (1962), p. 21–38.
- [Tut62b] W. T. TUTTE. “A census of slicings”. In : *Canad. J. Math.* 14 (1962), p. 708–722.
- [Tut63] W. T. TUTTE. “A census of planar maps”. In : *Canad. J. Math.* 15 (1963), p. 249–271.
- [WL72a] T. R. S. WALSH et A. B. LEHMAN. “Counting rooted maps by genus. I”. In : *J. Combinatorial Theory Ser. B* 13 (1972), p. 192–218.
- [WL75] T. R. S. WALSH et A. B. LEHMAN. “Counting rooted maps by genus. III : Nonseparable maps”. In : *J. Combinatorial Theory Ser. B* 18 (1975), p. 222–259.
- [WL72b] T. WALSH et A. B. LEHMAN. “Counting rooted maps by genus. II”. In : *J. Combinatorial Theory Ser. B* 13 (1972), p. 122–141.
- [Yan01] C. H. YAN. “Generalized parking functions, tree inversions, and multicolored graphs”. In : *Adv. in Appl. Math.* 27.2-3 (2001), p. 641–670.
- [You09] B. YOUNG. “Computing a pyramid partition generating function with dimer shuffling”. In : *J. Combin. Theory Ser. A* 116.2 (2009), p. 334–350.



- [You10] B. YOUNG. “Generating functions for colored 3D Young diagrams and the Donaldson-Thomas invariants of orbifolds”. In : *Duke Math. J.* 152.1 (2010). With an appendix by Jim Bryan, p. 115–153.
- [Zag95] D. ZAGIER. “On the distribution of the number of cycles of elements in symmetric groups”. In : *Nieuw Arch. Wisk. (4)* 13.3 (1995), p. 489–495.