Convergence de grandes triangulations en pile

Marie Albenque et Jean-François Marckert

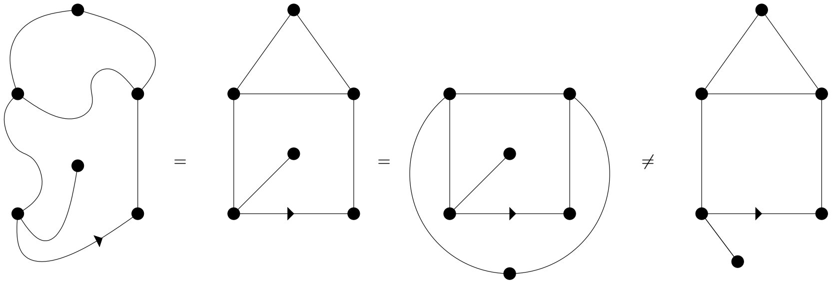
LIX – LABRI

Séminaire de probabilités de Versailles – 16 février 2010

Plan

Cartes planaires

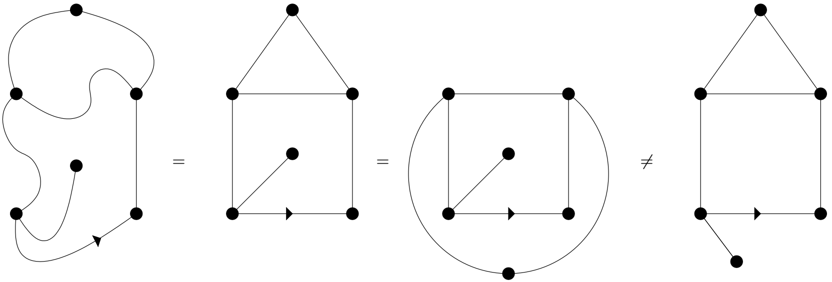
Carte planaire = graphe planaire connexe plongé proprement dans la sphère à homéomorphisme direct près



Carte enracinée : une arête orientée est distinguée.

Cartes planaires

Carte planaire = graphe planaire connexe plongé proprement dans la sphère à homéomorphisme direct près

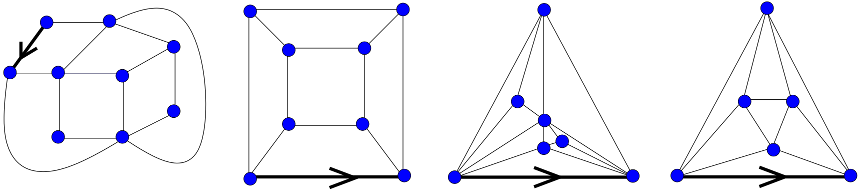


Carte enracinée : une arête orientée est distinguée.

Cartes et faces

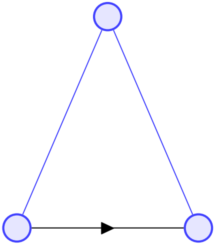
Faces = composantes connexes de la sphère privée des arêtes de la carte.

Triangulation = toutes les faces sont de degré 3.
Quadrangulation = toutes les faces sont de degré 4.



Réseaux apolloniens aléatoires – Triangulations en pile

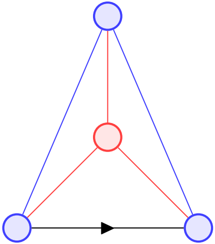
Les triangulations en pile = triangulations obtenues de manière récursive :



$\triangle_{2k}$ = ensemble des triangulations en pile à $2k$ faces.

Réseaux apolloniens aléatoires – Triangulations en pile

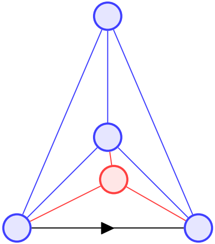
Les triangulations en pile = triangulations obtenues de manière récursive :



$\triangle_{2k}$ = ensemble des triangulations en pile à $2k$ faces.

Réseaux apolloniens aléatoires – Triangulations en pile

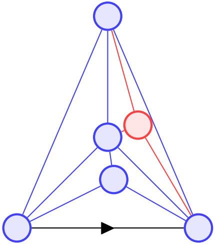
Les triangulations en pile = triangulations obtenues de manière récursive :



$\triangle_{2k}$ = ensemble des triangulations en pile à $2k$ faces.

Réseaux apolloniens aléatoires – Triangulations en pile

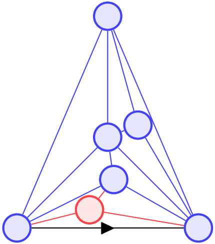
Les triangulations en pile = triangulations obtenues de manière récursive :



$\triangle_{2k}$ = ensemble des triangulations en pile à $2k$ faces.

Réseaux apolloniens aléatoires – Triangulations en pile

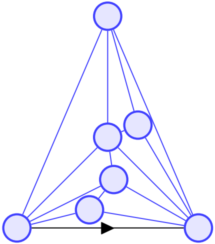
Les triangulations en pile = triangulations obtenues de manière récursive :



$\triangle_{2k}$ = ensemble des triangulations en pile à $2k$ faces.

Réseaux apolloniens aléatoires – Triangulations en pile

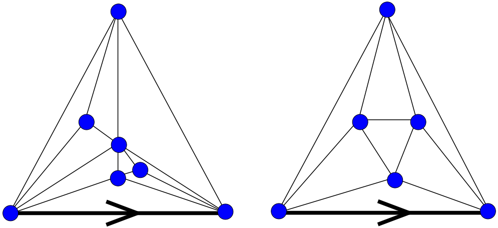
Les triangulations en pile = triangulations obtenues de manière récursive :



$\triangle_{2k}$ = ensemble des triangulations en pile à $2k$ faces.

Triangulations en pile vs Triangulations

$$\{\text{triangulations en pile}\} \subsetneq \{\text{triangulations générales}\}$$



Convergence de grandes cartes aléatoires

- Grandes ? Nombre de sommets tend vers l'infini.
- Aléatoires ? Pour quelle loi ?
- Convergence ? Pour quelle topologie ?

[Angel et Schramm, 03], [Chassaing et Schaeffer, 04], [Bouttier, Di Francesco, Guitter, 04], [Chassaing et Durhuss, 06], [Marckert et Mokkadem, 06], [Miermont, 06], [Marckert et Miermont, 07], [Le Gall, 07], [Le Gall et Paulin, 08], [Miermont et Weill, 08], [Chapuy, 08], [Bouttier et Guitter, 08], [Le Gall, 08]

Convergence de grandes cartes aléatoires

- Grandes ? Nombre de sommets tend vers l'infini.
- Aléatoires ? Pour quelle loi ?
- Convergence ? Pour quelle topologie ?

[Angel et Schramm, 03], [Chassaing et Schaeffer, 04], [Bouttier, Di Francesco, Guitter, 04], [Chassaing et Durhuss, 06], [Marckert et Mokkadem, 06], [Miermont, 06], [Marckert et Miermont, 07], [Le Gall, 07], [Le Gall et Paulin, 08], [Miermont et Weill, 08], [Chapuy, 08], [Bouttier et Guitter, 08], [Le Gall, 08]

Convergence de grandes cartes aléatoires

- Grandes ? Nombre de sommets tend vers l'infini.
- Aléatoires ? Pour quelle loi ?
- Convergence ? Pour quelle topologie ?

[Angel et Schramm, 03], [Chassaing et Schaeffer, 04], [Bouttier, Di Francesco, Guitter, 04], [Chassaing et Durhuss, 06], [Marckert et Mokkadem, 06], [Miermont, 06], [Marckert et Miermont, 07], [Le Gall, 07], [Le Gall et Paulin, 08], [Miermont et Weill, 08], [Chapuy, 08], [Bouttier et Guitter, 08], [Le Gall, 08]

Convergence de grandes cartes aléatoires

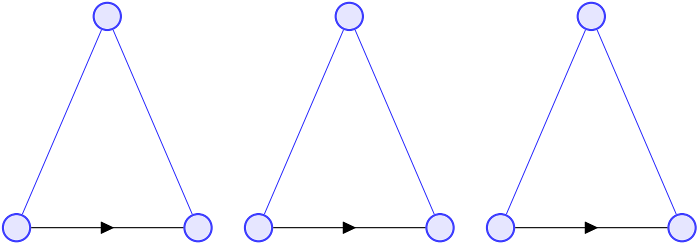
- Grandes ? Nombre de sommets tend vers l'infini.
- Aléatoires ? Pour quelle loi ?
- Convergence ? Pour quelle topologie ?

[Angel et Schramm, 03], [Chassaing et Schaeffer, 04], [Bouttier, Di Francesco, Guitter, 04], [Chassaing et Durhuss, 06], [Marckert et Mokkadem, 06], [Miermont, 06], [Marckert et Miermont, 07], [Le Gall, 07], [Le Gall et Paulin, 08], [Miermont et Weill, 08], [Chapuy, 08], [Bouttier et Guitter, 08], [Le Gall, 08]

Deux lois de probabilités

On note $\triangle_{2k}$ l'ensemble des triangulations en pile à $2k$ faces. Deux lois de probabilités sont naturelles pour étudier les triangulations de $\triangle_{2k}$:

- la loi uniforme, notée $\mathbb{U}_{2k}^{\triangle}$,

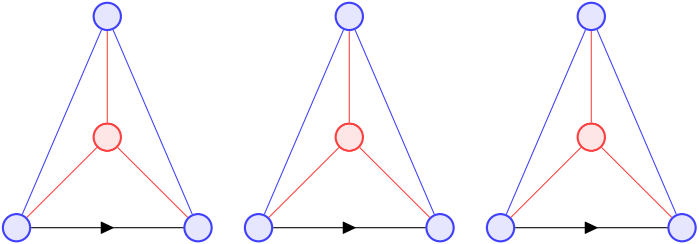


- la loi "historique", notée $\mathbb{H}_{2k}^{\triangle}$, où chaque carte a une probabilité d'apparaître proportionnelle à son nombre d'histoires.

Deux lois de probabilités

On note $\triangle_{2k}$ l'ensemble des triangulations en pile à $2k$ faces. Deux lois de probabilités sont naturelles pour étudier les triangulations de $\triangle_{2k}$:

- la loi uniforme, notée $\mathbb{U}_{2k}^{\triangle}$,

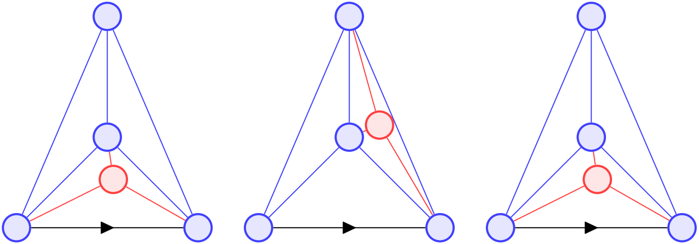


- la loi "historique", notée $\mathbb{H}_{2k}^{\triangle}$, où chaque carte a une probabilité d'apparaître proportionnelle à son nombre d'histoires.

Deux lois de probabilités

On note $\triangle_{2k}$ l'ensemble des triangulations en pile à $2k$ faces. Deux lois de probabilités sont naturelles pour étudier les triangulations de $\triangle_{2k}$:

- la loi uniforme, notée $\mathbb{U}^{\triangle}_{2k}$,

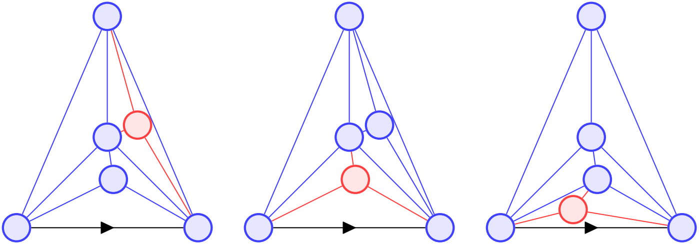


- la loi "historique", notée $\mathbb{H}^{\triangle}_{2k}$, où chaque carte a une probabilité d'apparaître proportionnelle à son nombre d'histoires.

Deux lois de probabilités

On note $\triangle_{2k}$ l'ensemble des triangulations en pile à $2k$ faces.
Deux lois de probabilités sont naturelles pour étudier les triangulations de $\triangle_{2k}$:

- la loi uniforme, notée $\mathbb{U}_{2k}^{\triangle}$,

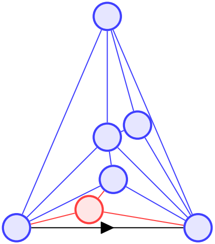
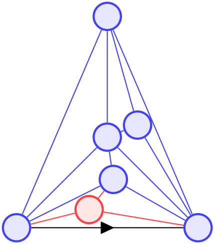
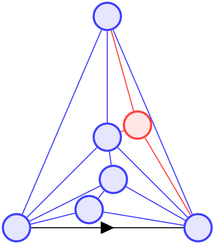


- la loi "historique", notée $\mathbb{H}_{2k}^{\triangle}$, où chaque carte a une probabilité d'apparaître proportionnelle à son nombre d'histoires.

Deux lois de probabilités

On note $\triangle_{2k}$ l'ensemble des triangulations en pile à $2k$ faces. Deux lois de probabilités sont naturelles pour étudier les triangulations de $\triangle_{2k}$:

- la loi uniforme, notée $\mathbb{U}_{2k}^{\triangle}$,

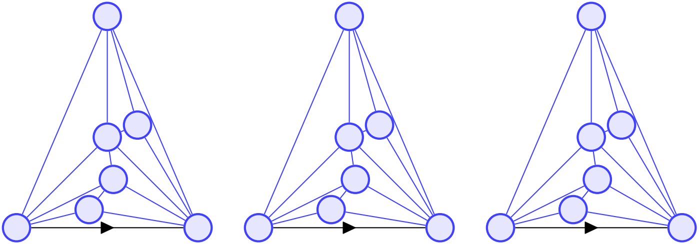
  

- la loi "historique", notée $\mathbb{H}_{2k}^{\triangle}$, où chaque carte a une probabilité d'apparaître proportionnelle à son nombre d'histoires.

Deux lois de probabilités

On note $\triangle_{2k}$ l'ensemble des triangulations en pile à $2k$ faces. Deux lois de probabilités sont naturelles pour étudier les triangulations de $\triangle_{2k}$:

- la loi uniforme, notée $\mathbb{U}_{2k}^{\triangle}$,

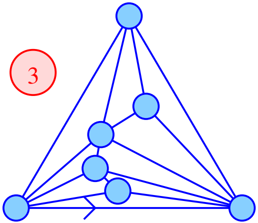


- la loi "historique", notée $\mathbb{H}_{2k}^{\triangle}$, où chaque carte a une probabilité d'apparaître proportionnelle à son nombre d'histoires.

Deux lois de probabilités

On note $\triangle_{2k}$ l'ensemble des triangulations en pile à $2k$ faces.
Deux lois de probabilités sont naturelles pour étudier les triangulations de $\triangle_{2k}$:

- la loi uniforme, notée $\mathbb{U}_{2k}^{\triangle}$,



- la loi "historique", notée $\mathbb{H}_{2k}^{\triangle}$, où chaque carte a une probabilité d'apparaître proportionnelle à son nombre d'histoires.

Résultats sur les triangulations en pile aléatoires

Sous $\mathbb{H}_{2k}^{\triangle}$,

- Étude du degré d'un sommet et de l'espérance de la distance entre deux points.
  [Zhou et al., 05], [Zhang et al., 06], [Zhang et al., 08]

Sous $\mathbb{U}_{2k}^{\triangle}$,

- Étude du degré d'un sommet [Darasse et Soria, 07]
- Distribution limite de la distance entre deux sommets [Bodini, Darasse, Soria, 08]

Résultats sur les triangulations en pile aléatoires

Sous $\mathbb{H}_{2k}^{\triangle}$,

- Étude du degré d'un sommet et de l'espérance de la distance entre deux points.
  [Zhou et al., 05], [Zhang et al., 06], [Zhang et al., 08]

Sous $\mathbb{U}_{2k}^{\triangle}$,

- Étude du degré d'un sommet [Darasse et Soria, 07]
- Distribution limite de la distance entre deux sommets
  [Bodini, Darasse, Soria, 08]

Triangulations en pile		Quadrangulations loi uniforme
loi uniforme	loi historique	

Quelle notion
de convergence ?

Deux notions de convergence : convergence locale

$B_m(r)$ = boule de rayon r centrée en la racine de m.

Definition

Soient m et m' deux cartes de $\mathcal{M}$, la distance locale entre m et m' est :

$$d_L(m, m') = \inf\{\frac{1}{1+r} \text{ où } B_m(r) \sim B_{m'}(r)\},$$

Convergence locale = Convergence des boules centrées en la racine.

	Triangulations en pile		Quadrangulations loi uniforme
	loi uniforme	loi historique	
Convergence locale	cvg en loi vers une loi portée par des trig. ∞	Pas de convergence	Angel et Schramm, 03 Chassaing et Durhuss, 06

Deux notions de convergence : convergence globale

Nombre de sommets tend vers l'infini

$\Rightarrow$ distance entre deux sommets tend vers l'infini.

Pour étudier le comportement global de la carte,
il faut la renormaliser :

Longueur d'une arête = fonction du nombre de sommets.

Deux notions de convergence : convergence globale

Nombre de sommets tend vers l'infini

$\Rightarrow$ distance entre deux sommets tend vers l'infini.

Pour étudier le comportement global de la carte,
il faut la renormaliser :

Longueur d'une arête = fonction du nombre de sommets.

	Triangulations en pile		Quadrangulations loi uniforme
	loi uniforme	loi historique	
Convergence locale	cvg en loi vers 1 loi portée par des triangulations infinies	Pas de convergence	Angel-Schramm, 03 Chassaing-Durhuss, 06
Convergence renormalisée			Chassaing-Schaeffer, 04 Marckert-Mokkadem, 06 Le Gall, 07 Le Gall-Paulin, 08

	Triangulations en pile		Quadrangulations loi uniforme
	loi uniforme	loi historique	
Convergence locale	cvg en loi vers 1 loi portée par des triangulations infinies	Pas de convergence	Angel-Schramm, 03 Chassaing-Durhuss, 06
Convergence renormalisée	?		Chassaing-Schaeffer, 04 Marckert-Mokkadem, 06 Le Gall, 07 Le Gall-Paulin, 08

Résultats principaux sur les cartes planaires “générales”

Résultats sans renormalisation = “convergence des boules”

- Angel & Schramm (2003) : convergence locale des triangulations enracinées sous la loi uniforme.
- Chassaing & Durhuus (2006) : même résultat pour les quadrangulations.

Résultats avec renormalisation en $n^{1/4}$

- Chassaing & Schaeffer (2004) : convergence du profil pour les quadrangulations enracinées.
- Marckert & Mokkadem (2006) : même renormalisation, convergence en un sens faible des quadrangulations vers la *carte brownienne*.
- Le Gall (2007) : convergence en tant qu’espace métrique au sens de Gromov-Hausdorff vers un espace métrique compact mais uniquement le long d’une sous-suite. La dimension de Hausdorff de l’espace limite est 4.
- Le Gall & Paulin (2008) : l’espace limite a la même topologie que la sphère.

Résultats principaux sur les cartes planaires "générales"

Résultats sans renormalisation = "convergence des boules"

- Angel & Schramm (2003) : convergence locale des triangulations enracinées sous la loi uniforme.
- Chassaing & Durhuus (2006) : même résultat pour les quadrangulations.

Résultats avec renormalisation en $n^{1/4}$

- Chassaing & Schaeffer (2004) : convergence du profil pour les quadrangulations enracinées.
- Marckert & Mokkadem (2006) : même renormalisation, convergence en un sens faible des quadrangulations vers la *carte brownienne*.
- Le Gall (2007) : convergence en tant qu'espace métrique au sens de Gromov-Hausdorff vers un espace métrique compact mais uniquement le long d'une sous-suite. La dimension de Hausdorff de l'espace limite est 4.
- Le Gall & Paulin (2008) : l'espace limite a la même topologie que la sphère.

Le Théorème

Théorème (A. , Marckert '08)

Sous $\mathbb{U}_{2n}^{\triangle}$,

$$\left(m_n, \frac{D_{m_n}}{(2/11)\sqrt{3n/2}}\right) \xrightarrow[n]{(d)} (\mathcal{T}_{2\mathrm{e}}, d_{2\mathrm{e}}),$$

pour la topologie de Gromov-Hausdorff sur les espaces métriques compacts,

où $(\mathcal{T}_{2\mathrm{e}}, d_{2\mathrm{e}})$ = *arbre continu d'Aldous.*

Le Théorème

Théorème (A. , Marckert '08)

Sous $\mathbb{U}_{2n}^{\triangle}$,

$$\left(m_n, \frac{D_{m_n}}{(2/11)\sqrt{3n/2}} \right) \xrightarrow[n]{(d)} (\mathcal{T}_{2\mathrm{e}}, d_{2\mathrm{e}}),$$

pour la topologie de Gromov-Hausdorff sur les espaces métriques compacts,

où $(\mathcal{T}_{2\mathrm{e}}, d_{2\mathrm{e}})$ = *arbre continu d'Aldous.*

Le Théorème

Théorème (A. , Marckert '08)

Sous $\mathbb{U}_{2n}^{\triangle}$,

$$\left(m_n, \frac{D_{m_n}}{(2/11)\sqrt{3n/2}}\right) \xrightarrow[n]{(d)} (\mathcal{T}_{2e}, d_{2e}),$$

pour la topologie de Gromov-Hausdorff sur les espaces métriques compacts,

où $(\mathcal{T}_{2e}, d_{2e})$ *= arbre continu d'Aldous.*

Le Théorème

Théorème (A. , Marckert '08)

Sous $\mathbb{U}_{2n}^{\triangle}$,

$$\left(m_n, \frac{D_{m_n}}{(2/11)\sqrt{3n/2}} \right) \xrightarrow[n]{(d)} (\mathcal{T}_{2\mathrm{e}}, d_{2\mathrm{e}}),$$

pour la topologie de Gromov-Hausdorff sur les espaces métriques compacts,

où $(\mathcal{T}_{2\mathrm{e}}, d_{2\mathrm{e}})$ = *arbre continu d'Aldous.*

Distance de Gromov-Hausdorff

Distance de Hausdorff entre X, Y compacts de (E, d) :

$$d_H(X, Y) = \max\{\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d(x, y), \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} d(x, y)\}$$

Distance de *Gromov-Hausdorff* entre E et F métriques compacts :

$$d_{GH}(E, F) = \inf_{\substack{M \text{ espace métrique} \\ \phi :\ E \to M \text{ isométrie} \\ \psi :\ F \to M \text{ isométrie}}} d_H(\phi(E), \psi(F))$$

Distance de Gromov-Hausdorff

Distance de Hausdorff entre X, Y compacts de (E, d) :

$$d_H(X, Y) = \max\{\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d(x, y), \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} d(x, y)\}$$

Distance de *Gromov-Hausdorff* entre E et F métriques compacts :

$$d_{GH}(E, F) = \inf_{\substack{M \text{ espace métrique} \\ \phi\,:\, E \to M \text{ isométrie} \\ \psi\,:\, F \to M \text{ isométrie}}} d_H(\phi(E), \psi(F))$$

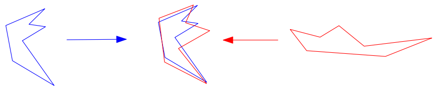
Distance de Gromov-Hausdorff

Distance de Hausdorff entre X, Y compacts de (E, d) :

$$d_H(X, Y) = \max\{\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d(x, y), \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} d(x, y)\}$$

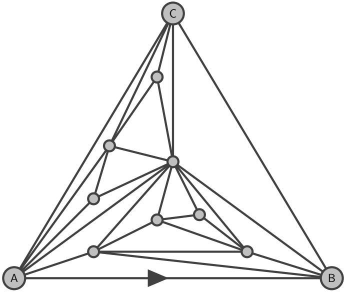
Distance de *Gromov-Hausdorff* entre E et F métriques compacts :

$$d_{GH}(E, F) = \inf_{\substack{M \text{ espace métrique} \\ \phi :\ E \to M \text{ isométrie} \\ \psi :\ F \to M \text{ isométrie}}} d_H(\phi(E), \psi(F))$$

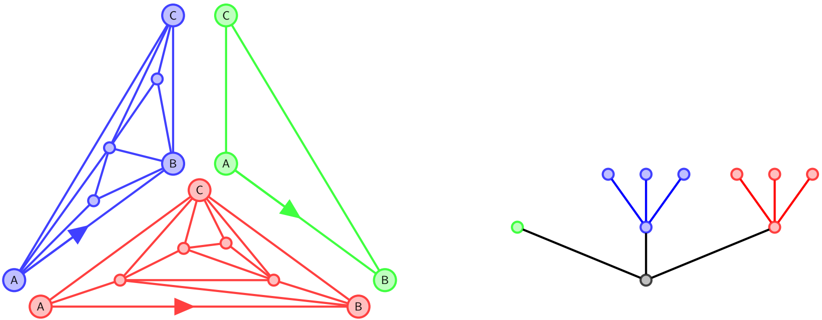


L'ensemble des classes d'isométrie d'espaces métriques compacts muni de la distance d_{GH} est un espace polonais.

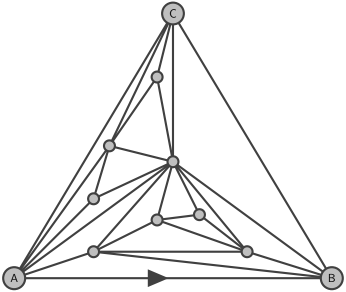
Triangulations et arbres ternaires

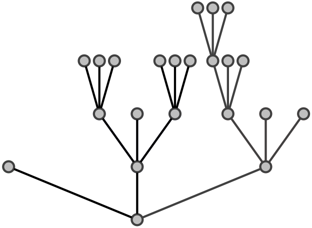


Triangulations et arbres ternaires

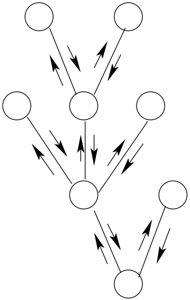


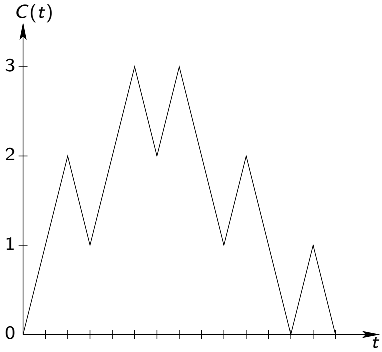
Triangulations et arbres ternaires





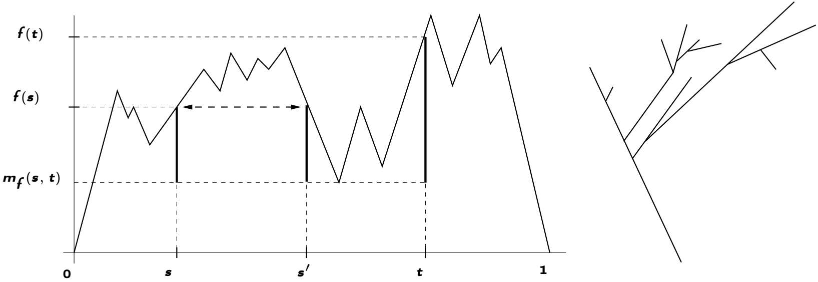
Contour d'un arbre





Arbre continu

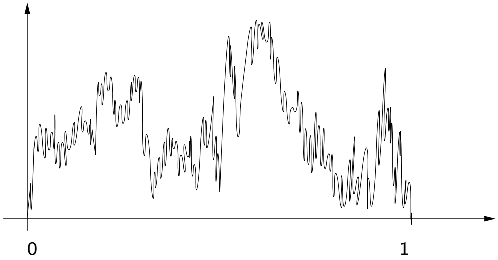
f une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.



- $s \sim s'$ si et seulement si $f(s) = f(s') = m_f(s,s')$
- arbre continu $= [0,1]/\sim$
- distance : $d_f(s,t) = f(s) + f(t) - 2m_f(s,t)$

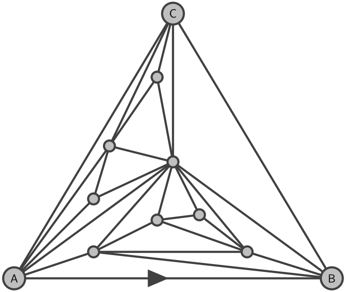
Arbre continu d'Aldous – CRT

L'excursion brownienne renormalisée $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_t)_{t\in[0,1]}$ est un mouvement brownien conditionné à vérifier $\mathcal{B}_0 = 0$, $\mathcal{B}_1 = 0$ et $\mathcal{B}(t) > 0$ pour tout $t \in]0,1[$.



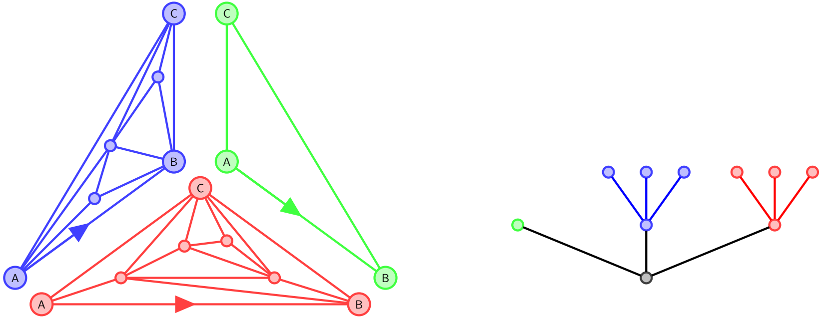
L'arbre continu d'Aldous est un arbre continu aléatoire défini à partir d'une excursion brownienne renormalisée.
On le note $(\mathcal{T}_{2\mathbf{e}}, d_{2\mathbf{e}})$.

Triangulations et arbres ternaires



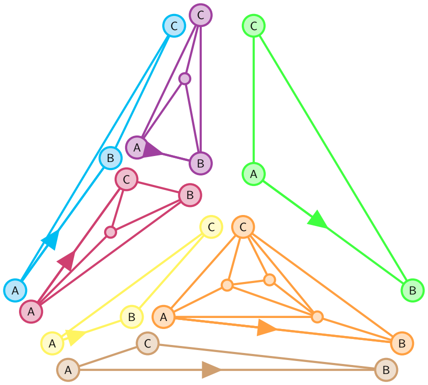
[Darasse et Soria, 07]

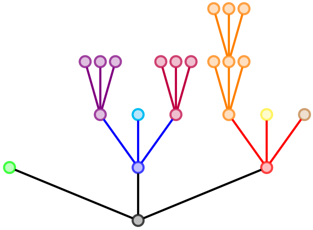
Triangulations et arbres ternaires



[Darasse et Soria, 07]

Triangulations et arbres ternaires





[Darasse et Soria, 07]

Lien arbres et Cartes

Proposition

Pour tout $K \geq 1$ *il existe une bijection*

$$\begin{array}{rccc} \Psi_K^{\triangle} : & \triangle_{2K} & \longrightarrow & \mathcal{T}_{3K-2}^{\text{ter}} \\ & m & \longmapsto & t := \Psi_K^{\triangle}(m) \end{array}$$

(i) *Pour tout noeud interne* u *de* m, $|\Gamma(u') - d_m(root, u)| \leq 1$.
(ii) *Pour tous noeuds internes* u *et* v *de* m

$$\left| d_m(u, v) - \Gamma(u', v') \right| \leq 3.$$

Qui est Γ ?

Lien arbres et Cartes

Proposition

Pour tout $K \geq 1$ il existe une bijection

$$\begin{array}{rccc} \Psi_K^{\triangle} : & \triangle_{2K} & \longrightarrow & \mathcal{T}_{3K-2}^{\text{ter}} \\ & m & \longmapsto & t := \Psi_K^{\triangle}(m) \end{array}$$

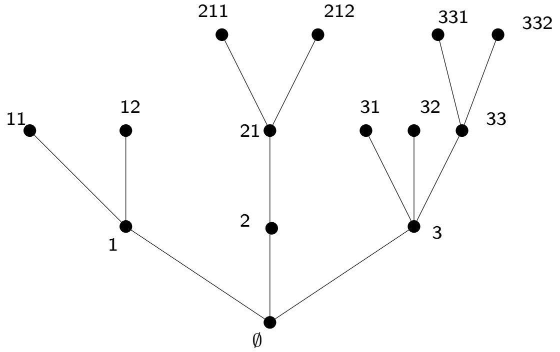
(i) *Pour tout noeud interne u de m,* $|\Gamma(u') - d_m(root, u)| \leq 1$.
(ii) *Pour tous noeuds internes u et v de m*

$$\left| d_m(u, v) - \Gamma(u', v') \right| \leq 3.$$

Qui est Γ ?

Formalisme de Neveu sur les arbres

- Un arbre ternaire **t** est vu comme un ensemble de mots sur l'alphabet $\{1, 2, 3\}$.
- On assimile un sommet avec le mot qui le représente.



Un langage pour les distances

$\mathcal{L}_{1,2,3} = \{$ mots de $\{1,2,3\}^\star$ où apparaissent au moins une fois 1, 2 et 3$\}$

Pour $u \in \{1,2,3\}^\star$,

$\Gamma(u) = \max\{k$ tel que $u = u_1 \dots u_k,\ u_i \in \mathcal{L}_{1,2,3}$ pour $i \in \{1,2,3\}\}$

$$u = 12213213221223 2 \quad \Rightarrow \quad \Gamma(u) = 3.$$

Soient $u = w \cdot u_1 \dots u_k$ et $v = w \cdot v_1 \dots v_l$ avec $u_1 \neq v_1$, on note :

$$\Gamma(u,v) = \Gamma(u_1 \dots u_k) + \Gamma(v_1 \dots v_l)$$

Un langage pour les distances

$\mathcal{L}_{1,2,3} = \{$ mots de $\{1,2,3\}^\star$ où apparaissent au moins une fois 1, 2 et 3$\}$

Pour $u \in \{1,2,3\}^\star$,

$\Gamma(u) = \max\{k$ tel que $u = u_1 \dots u_k,\ u_i \in \mathcal{L}_{1,2,3}$ pour $i \in \{1,2,3\}\}$

$$u = 122132132212232 \quad \Rightarrow \quad \Gamma(u) = 3.$$

Soient $u = w \cdot u_1 \dots u_k$ et $v = w \cdot v_1 \dots v_l$ avec $u_1 \neq v_1$, on note :

$$\Gamma(u,v) = \Gamma(u_1 \dots u_k) + \Gamma(v_1 \dots v_l)$$

Un langage pour les distances

$\mathcal{L}_{1,2,3} = \{$ mots de $\{1,2,3\}^\star$ où apparaissent au moins une fois 1, 2 et 3$\}$

Pour $u \in \{1,2,3\}^\star$,

$\Gamma(u) = \max\{k$ tel que $u = u_1 \dots u_k,\ u_i \in \mathcal{L}_{1,2,3}$ pour $i \in \{1,2,3\}\}$

$$u = 12213 \cdot 213 \cdot 2212232 \quad \Rightarrow \quad \Gamma(u) = 3.$$

Soient $u = w \cdot u_1 \dots u_k$ et $v = w \cdot v_1 \dots v_l$ avec $u_1 \neq v_1$, on note :

$$\Gamma(u,v) = \Gamma(u_1 \dots u_k) + \Gamma(v_1 \dots v_l)$$

Un langage pour les distances

$\mathcal{L}_{1,2,3} = \{$ mots de $\{1,2,3\}^\star$ où apparaissent au moins une fois 1, 2 et 3$\}$

Pour $u \in \{1,2,3\}^\star$,

$\Gamma(u) = \max\{k$ tel que $u = u_1 \dots u_k,\ u_i \in \mathcal{L}_{1,2,3}$ pour $i \in \{1,2,3\}\}$

$$u = 12213 \cdot 213 \cdot 2212232 \quad \Rightarrow \quad \Gamma(u) = 3.$$

Soient $u = w \cdot u_1 \dots u_k$ et $v = w \cdot v_1 \dots v_l$ avec $u_1 \neq v_1$, on note :

$$\Gamma(u,v) = \Gamma(u_1 \dots u_k) + \Gamma(v_1 \dots v_l)$$

Un langage pour les distances

$\mathcal{L}_{1,2,3} = \{$ mots de $\{1,2,3\}^\star$ où apparaissent au moins une fois 1, 2 et 3$\}$

Pour $u \in \{1,2,3\}^\star$,

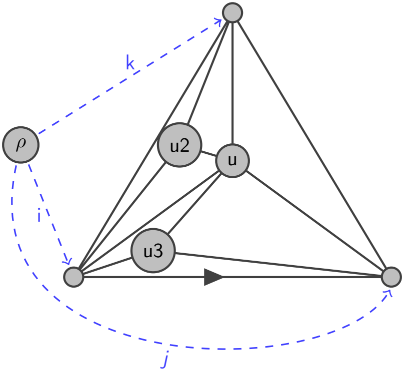
$\Gamma(u) = \max\{k$ tel que $u = u_1 \dots u_k,\ u_i \in \mathcal{L}_{1,2,3}$ pour $i \in \{1,2,3\}\}$

$$u = 12213 \cdot 213 \cdot 2212232 \quad \Rightarrow \quad \Gamma(u) = 3.$$

Soient $u = w \cdot u_1 \dots u_k$ et $v = w \cdot v_1 \dots v_l$ avec $u_1 \neq v_1$, on note :

$$\Gamma(u,v) = \Gamma(u_1 \dots u_k) + \Gamma(v_1 \dots v_l)$$

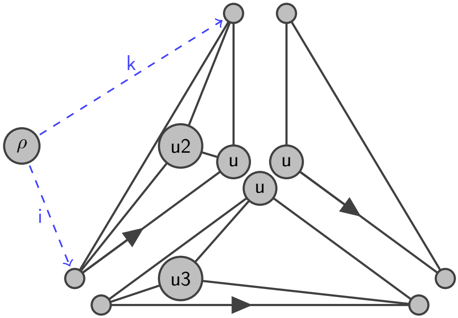
Type d'une face et d'un noeud



Si $\text{type}(u) = (i, j, k)$,

$$\begin{cases} \text{type}(u1) = (& 1 + i \wedge j \wedge k, & j, & k &), \\ \text{type}(u2) = (& i, & 1 + i \wedge j \wedge k, & k &), \\ \text{type}(u3) = (& i, & j, & 1 + i \wedge j \wedge k &) \end{cases}$$

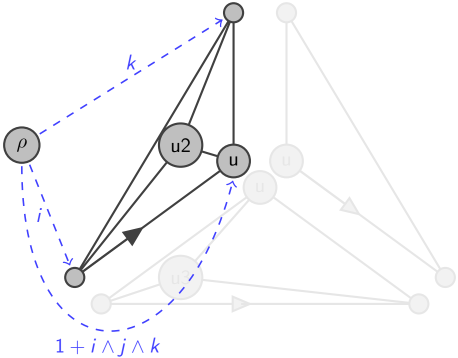
Type d'une face et d'un noeud



Si type$(u) = (i, j, k)$,

$$\begin{cases} \text{type}(u1) = (& 1 + i \wedge j \wedge k, & j, & k &), \\ \text{type}(u2) = (& i, & 1 + i \wedge j \wedge k, & k &), \\ \text{type}(u3) = (& i, & j, & 1 + i \wedge j \wedge k &) \end{cases}$$

Type d'une face et d'un noeud



Si $\text{type}(u) = (i, j, k)$,

$$\begin{cases} \text{type}(u1) = (& 1 + i \wedge j \wedge k, & j, & k &), \\ \text{type}(u2) = (& i, & 1 + i \wedge j \wedge k, & k &), \\ \text{type}(u3) = (& i, & j, & 1 + i \wedge j \wedge k &) \end{cases}$$

Convergence des triangulations en pile

Lemme

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformes sur $\{1,2,3\}$. Soit W_n le mot $X_1 \dots X_n$, on a

$$\frac{\Gamma(W_n)}{n} \xrightarrow[n]{(a.s.)} \Gamma_\triangle, \text{ où } \Gamma_\triangle = 2/11$$

Distance dans la carte et distance dans l'arbre :

$$|d_{m_n}(u,v) - \Gamma(u',v')| \leq 3$$

On montre :

$$P\left(\sup \left| d_{m_n}(u,v) - \frac{2}{11} d_{T_n}(u',v') \right| \geq n^{1/3}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Convergence des triangulations en pile

Lemme

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformes sur $\{1,2,3\}$. Soit W_n le mot $X_1 \dots X_n$, on a

$$\frac{\Gamma(W_n)}{n} \xrightarrow[n]{(a.s.)} \Gamma_\triangle, \ \text{où } \Gamma_\triangle = 2/11$$

Distance dans la carte et distance dans l'arbre :

$$|d_{m_n}(u,v) - \Gamma(u',v')| \leq 3$$

On montre :

$$P\left(\sup\left|d_{m_n}(u,v) - \frac{2}{11} d_{T_n}(u',v')\right| \geq n^{1/3}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Convergence des triangulations en pile

Lemme

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformes sur $\{1,2,3\}$. Soit W_n le mot $X_1 \dots X_n$, on a

$$\frac{\Gamma(W_n)}{n} \xrightarrow[n]{(a.s.)} \Gamma_\triangle, \ \textit{où } \Gamma_\triangle = 2/11$$

Distance dans la carte et distance dans l'arbre :

$$|d_{m_n}(u,v) - \Gamma(u',v')| \leq 3$$

On montre :

$$P\left(\sup\left|d_{m_n}(u,v) - \frac{2}{11} d_{T_n}(u',v')\right| \geq n^{1/3}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ordre lexicographique sur l'arbre $\Rightarrow$ ordre sur les noeuds internes de la carte.
On note $d_m(k,j)$ la distance entre le k-ème et le j-ème noeud de m.
On interpole ensuite d_m de manière continue.

Théorème

Sous la loi uniforme sur $\triangle_{2n}$, on a

$$\left(\frac{d_{m_n}(ns,nt)}{\Gamma_\triangle\sqrt{3n/2}}\right)_{(s,t)\in[0,1]^2} \xrightarrow[n]{(d)} (d_{2\mathrm{e}}(s,t))_{(s,t)\in[0,1]^2},$$

où la convergence a lieu dans $C[0,1]^2$, l'espace des fonctions continues de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme.

Convergence des triangulations renormalisées

Théorème (A., Marckert '08)

Sous $\mathbb{U}_{2n}^{\triangle}$,

$$\left(m_n, \frac{D_{m_n}}{\Gamma_{\triangle}\sqrt{3n/2}}\right) \xrightarrow[n]{(d)} (\mathcal{T}_{2\mathrm{e}}, d_{2\mathrm{e}}),$$

pour la topologie de Gromov-Hausdorff sur les espaces métriques compacts.

	Triangulations en pile		Quadrangulations loi uniforme
	loi uniforme	loi historique	
Convergence locale	cvg en loi vers 1 loi portée par des triangulations infinies	Pas de convergence	Angel-Schramm, 03 Chassaing-Durhuss, 06
Convergence renormalisée	cvg en loi pour la topologie de Gromov-Hausdorff vers le CRT normalisation $= \sqrt{n}$		Chassaing-Schaeffer, 04 Marckert-Mokkadem, 06 Le Gall, 07 Le Gall-Paulin, 08

Convergence des triangulations sous $\mathbb{H}^{\triangle}$

Théorème

Soit M_n une triangulation en pile sous la loi $\mathbb{H}^{\triangle}_{2n}$. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$, k noeuds de M_n choisis indépendamment et uniformément parmi les noeuds internes de M_n. On a

$$\left(\frac{D_{M_n}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)}{3\Gamma_{\triangle} \log n} \right)_{(i,j)\in\{1,\ldots,k\}^2} \xrightarrow[n]{\text{proba.}} (1_{i\neq j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,k\}^2} .$$

Etude des arbres sous la loi historique ...

Convergence des triangulations sous $\mathbb{H}^{\triangle}$

Théorème

Soit M_n une triangulation en pile sous la loi $\mathbb{H}^{\triangle}_{2n}$. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$, k noeuds de M_n choisis indépendamment et uniformément parmi les noeuds internes de M_n. On a

$$\left(\frac{D_{M_n}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)}{3\Gamma_{\triangle} \log n}\right)_{(i,j)\in\{1,\ldots,k\}^2} \xrightarrow[n]{proba.} (1_{i\neq j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,k\}^2}.$$

Etude des arbres sous la loi historique ...

Convergence des arbres sous $\mathbb{Q}^{\text{ter}}_{3n-2}$

$\mathbb{Q}^{\text{ter}}_{3n-2}$ = loi historique sur les arbres ternaires de taille $3n-2$.

Proposition

Soit $\mathbf{t}$ *un arbre aléatoire sous* $\mathbb{Q}^{\text{ter}}_{3n-2}$ *et* $\mathbf{u}$ *choisi uniformément parmi les noeuds internes de* $\mathbf{t}$*.*

$$\left(\frac{3}{2}\log n\right)^{-1/2}\left(|\mathbf{u}| - \frac{3}{2}\log n\right) \xrightarrow[n]{(d)} N$$

où N *suit une loi gaussienne centrée de variance 1*

Convergence des arbres sous $\mathbb{Q}^{\text{ter}}_{3n-2}$ – suite

Proposition

Soit $\mathbf{t}$ *un arbre aléatoire sous* $\mathbb{Q}^{\text{ter}}_{3n-2}$ *et* $\mathbf{u}$ *et* $\mathbf{v}$ *deux variables aléatoires i.i.d uniformes sur l'ensemble des noeuds internes de* $\mathbf{t}$*. Soit* $\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$*.*

1) On a $\left(\frac{3}{2}\log n\right)^{-1/2}\left(|\mathbf{u}| - \frac{3}{2}\log n, |\mathbf{v}| - \frac{3}{2}\log n\right) \xrightarrow[n]{(d)} (N_1, N_2)$ *où* N_1 *et* N_2 *sont deux variables aléatoires indépendantes de loi gaussienne centrée de variance 1.*

2) Soit $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \{1,2,3\}$*, avec* $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ *et* $\mathbf{u}^\star, \mathbf{v}^\star$ *définis par*

$$\mathbf{u} = \mathbf{wau}^\star \ \ et \ \mathbf{v} = \mathbf{wbv}^\star.$$

Conditionnellement à leur longueur, $\mathbf{u}^\star$ *et* $\mathbf{v}^\star$ *sont des mots aléatoires indépendants qui comptent* $|\mathbf{u}^\star|$ *et* $|\mathbf{v}^\star|$ *lettres indépendantes et uniformément distribuées dans* $\{1,2,3\}$*.*

Convergence locale des triangulations en pile

- Sous $\mathbb{U}_{2n}^{\triangle}$:

Théorème (A., Marckert '08)

La suite $(\mathbb{U}_{2n}^{\triangle})$ converge faiblement vers $P_{\infty}^{\triangle}$ pour la topologie de la convergence locale, lorsque n tend vers l'infini,
où $P_{\infty}^{\triangle}$ est une loi portée par les triangulations infinies.

Ingrédients :
Convergence locale d'arbres de Galton-Watson,
Définition d'une carte infinie à la « Angel-Schramm »

- Sous $\mathbb{H}_{2n}^{\triangle}$:

Le degré de la racine tend vers l'infini,

$\Rightarrow$ Pas de convergence locale.

Convergence locale des triangulations en pile

- Sous $\mathbb{U}_{2n}^{\triangle}$:

Théorème (A., Marckert '08)

La suite $(\mathbb{U}_{2n}^{\triangle})$ converge faiblement vers $P_{\infty}^{\triangle}$ pour la topologie de la convergence locale, lorsque n tend vers l'infini,
où $P_{\infty}^{\triangle}$ est une loi portée par les triangulations infinies.

Ingrédients :
Convergence locale d'arbres de Galton-Watson,
Définition d'une carte infinie à la « Angel-Schramm »

- Sous $\mathbb{H}_{2n}^{\triangle}$:

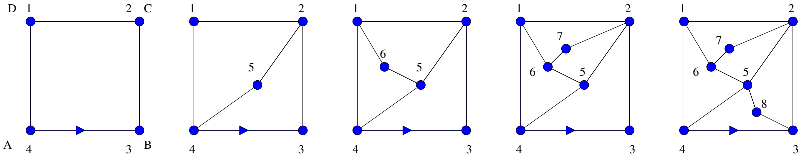
Le degré de la racine tend vers l'infini,

$\Rightarrow$ Pas de convergence locale.

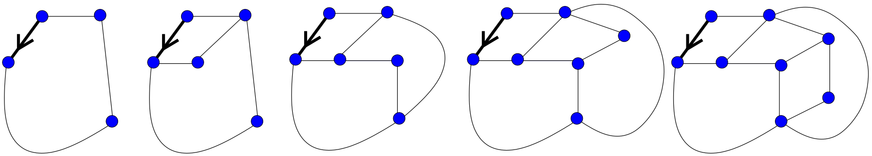
	Triangulations en pile		Quadrangulations loi uniforme
	loi uniforme	loi historique	
Convergence locale	cvg en loi vers 1 loi portée par des triangulations infinies	Pas de convergence	Angel-Schramm. 03 Chassaing-Durhuss, 06
Convergence renormalisée	cvg en loi pour la topologie de Gromov-Hausdorff vers le CRT normalisation = $\sqrt{n}$	cvg des lois fini-dimensionnelles normalisation = $\log n$	Chassaing-Schaeffer, 04 Marckert-Mokkadem, 06 Le Gall, 07 Le Gall-Paulin, 08

Modèle de quadrangulations en pile

On arrive à traiter le cas où seul un choix d'arêtes est permis.



Le cas général résiste...



Autres modèles de cartes construits récursivement à étudier : angle d'attaque pour le cas des quadrangulations générales.

Merci !