COMBINATOIRE II – FEUILLE D'EXERCICES 1

GUILLAUME CHAPUY, MATTHIEU JOSUAT-VERGÈS – M2 MATHS FONDAS PARIS 7 (2019).

Exercice 1 (Évaluations de fonctions symétriques)

(i) Que valent $h_n(1,\dots,1)$ et $e_n(1,\dots,1)$ où le nombre de 1 est k ?

(ii) Que valent $h_n(1,2,\dots,k)$ et $e_n(1,2,\dots,k)$?

(iii) Si les fonctions h_n s'évaluent à $\frac{1}{n!}$, que valent e_λ, p_λ, et m_λ ?

Exercice 2

Calculer les déterminants :

$$\det(h_{i-j+1})_{1\leq i,j\leq n} \quad \text{et} \quad \det(e_{i-j+1})_{1\leq i,j\leq n}.$$

(Les coefficients sont nuls quand l'indice est strictement négatif.)

Exercice 3 (Indicatrice de cycles)

Pour un sous-groupe G de $\mathfrak{S}_n$, on définit son *indicateur de cycles* :

$$I(G) = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G} p_{z(\sigma)}$$

où $z(\sigma)$ est la partition obtenue en ordonnant les tailles des cycles de σ.

Calculer

$$I(\mathfrak{S}_n), \quad I(\mathfrak{A}_n), \quad I(\mathfrak{S}_{\lambda_1}\times\mathfrak{S}_{\lambda_2}\times\dots)$$

où $\mathfrak{A}_n$ est le groupe alterné, et le produit de groupes symétriques se plongent de manière naturelle dans $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 4 (Fonctions de Schur équerres)

Pour $i,j\geq 0$, l'*équerre* $(i|j)$ est la partition de $i+j+1$ définie par $(i+1,1,1,1,\dots)$.

(i) Donner une expression de la fonction de Schur $s_{(i|j)}$ en termes des e_λ et h_λ.

(ii) Montrer que $\omega(s_{(i|j)}) = s_{(j|i)}$.

Exercice 5 (Fonctions symétriques oubliées)

On définit une base (f_λ) de Λ par $f_\lambda = (-1)^{n-\ell(\lambda)}\omega(m_\lambda)$ pour λ partition de n, et des coefficients $a_{\lambda\mu}$ par :

$$f_\lambda = \sum_\mu a_{\lambda\mu} m_\mu.$$

Une composition $I = (i_1, i_2, \dots)$ est *plus fine* qu'une composition $J = (j_1, j_2, \dots)$ si on peut obtenir J en rassemblant des termes consécutifs dans I, par exemple $(3, 1, 1, 6, 2, 1, 5)$ est plus fine que $(4, 1, 9, 5)$, en rassemblant $3, 1$ d'une part et $6, 2, 1$ d'autre part.

i) Montrer que $a_{\lambda\mu}$ est le nombre de compositions plus fines que μ et dont le tri décroissant est λ.

Indication : L'Exercice 2 et sa solution pourraient être utiles.

Exercice 5 (Théorème de Pólya)

Soit G un groupe agissant sur un ensemble X, on note $G\backslash X$ l'ensemble des orbites. Le lemme de Burnside s'énonce :

$$|G\backslash X| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

où $X^g = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$.

Soit $\mathcal{C}$ un ensemble fini, G agit sur l'ensemble $\mathcal{C}^X$ des fonctions de X dans $\mathcal{C}$ par :

$$(g \cdot \gamma)(x) = \gamma(g^{-1} \cdot x), \quad \text{où } x \in X, g \in G, \gamma \in \mathcal{C}^X.$$

On appelle $\mathcal{C}$ l'ensemble des *couleurs*, et $\mathcal{C}^X$ l'ensemble des *coloriages* de X. Le *type* d'un coloriage γ est la famille d'entiers $\big(|\gamma^{-1}(c)|\big)_{c \in \mathcal{C}}$.

i) Vérifier que le type d'un coloriage est invariant par l'action de G, et que le nombre d'orbites de type τ ne dépend que de la partition λ obtenue par tri des éléments de τ. Vérifier aussi que pour calculer le nombre d'orbites de type τ dans $\mathcal{C}^X$, on peut se ramener au cas : $X = \mathcal{C} = \{1, \dots, n\}$, G est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.

Le théorème de Pólya dit que nombre d'orbites de type τ dans $\mathcal{C}^X$ est le coefficient de m_λ dans $I(G)$, en utilisant la définition de l'Exercice 3.

ii) Démontrer le théorème de Pólya, en utilisant le lemme de Burnside.

iii) Démontrer le lemme de Burnside.

Indication : On pourra se ramener au cas où l'action est transitive.

iv) Combien y a-t-il de façons de coller des gommettes sur les 6 faces d'un cube, si on en a 3 vertes, 2 orange et 1 mauve ? (On pourra vérifier le résultat prédit par le théorème de Pólya en utilisant un logiciel de calcul formel pour faire la conversion d'une base à une autre.)