EXERCICES DE COMBINATOIRE – FEUILLE 2

MATTHIEU JOSUAT-VERGÈS & GUILLAUME CHAPUY
–
M2 MATHS FONDAS PARIS 7 (2019).

Exercice 1

Pour $k \geq 1$, on a compté en cours les empilements dont les pièces sont les segments unités de l'intervalle $\{0, 1, \ldots, k\}$, où deux segments distincts commutent s'ils n'ont pas de sommet commun, et avec $\{0, 1\}$ comme unique pièce minimale. On a vu grâce au théorème de Viennot que ces empilements avaient la même énumération (qu'ils avaient la même série génératrice F_{k-1}/F_k) que les chemins de Dyck de hauteur au plus k. Donner une bijection.

Exercice 2

Soit $G = (V, E)$ un graphe dirigé où l'arête e est munie du poids x_e. On a vu en cours l'expression de la série $W_{u,v}(t)$ des marches de u à v dans G comme un ratio d'indicatrices de cycles (cf Bousquet-Mélou, article à l'ICM). On avait vu que le fait que $W(t) = (1-tA)^{-1}$ où A est la matrice d'adjacence pondérée du graphe, et la règle de Crámer, permettent directement d'exprimer $W_{u,v}(t)$ comme un ratio de déterminants $N_{u,v}(t)/D(t)$, et on avait traité le cas du dénominateur $D(t)$, qui après développement s'écrit bien comme une indicatrice signée de configurations de cycles disjoints.

Traiter le cas du numérateur (on prendra garde, dans le cas où $u = v$ et où G contient une boucle en u, à bien se demander si cette boucle est autorisée ou non comme chemin de u à v).

Exercice 3 (chemins de Motzkin)

Un *chemin de Motzkin* de longueur n est un chemin de $(0, 0)$ à $(n, 0)$ dans $\mathbb{N}^2$ avec des pas $(1, i)$ pour $i \in \{1, 0, -1\}$. On pourra noter $\mathcal{M}$ la classe combinatoire des chemins de Motzkin, et $\mathcal{M}_k$ celle des chemins de Motzkin de hauteur bornée par k.

(i) Trouver et résoudre une équation pour la série génératrice de $\mathcal{M}$.

(ii) Sans calcul, donner un argument montrant que la série génératrice de $\mathcal{M}_k$ est rationelle. Ensuite montrer qu'elle s'écrit $\frac{P_{k-1}}{P_k}$ pour une suite de polynômes $(P_k)_{k\geq 0}$.

Exercice 4

On a vu en cours ce qu'est un polyomino colonne convexe (PCC), et que la série génératrice admet une expression rationnelle. On a dit également, sans le démontrer, qu'il existait une bijection très astucieuse avec un langage rationnel (voir Bousquet-Mélou, ICM, pour une description explicite de l'automate sous-jacent). Dans cet exercice, on va plutôt chercher à savoir comment une telle formule a pu être trouvée en premier lieu.

On note $A(t, u) = \sum_{n,k} a_{n,k} t^n u^k$ la série génératrice des PCC où t marque la taille (nombre de cellules) et k la hauteur de la colonne de droite (donc, $a_{n,k}$ est le nombre de PCC avec n cellules et bord droit de hauteur k.)

• Dans quel anneau de séries vit $A(t, u)$?

• Pour $\ell, k \geq 1$, de combien de façons peut-on accoler une colonne de hauteur ℓ à un PCC dont la colonne de droite à hauteur k ? Appelons $M(k, \ell)$ ce nombre.

• Décrire l'opérateur $u^k \longmapsto \sum_\ell M(k, \ell)(tu)^\ell$.

• En déduire un équation fonctionnelle pour $A(t, u)$.

Exercice 5

Comme en cours, on définit l'aire d'un chemin de Dyck comme le nombre de points entiers de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ qui sont faiblement sous le chemin. Par exemple, le chemin $(+1, -1)$ a aire 4. On note b_n la somme sur tous les chemins de Dyck de longueur $2n$, de leur aire.

• se convaincre que, de manière équivalente, b_n est le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$ munis d'un point marqué sous le chemin.

• Écrire la décomposition récursive habituelle des chemins de Dyck, et se demander ce qu'elle devient pour les chemins munis d'un point marqué.

• On définit l'opérateur de pointage sur les classes combinatoires, $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}^\bullet$, où $\mathcal{C}^\bullet$ et l'ensemble des (γ, i) avec $\gamma \in \mathcal{C}$ et $i \in \{1, 2, \ldots, |\gamma|\}$. Autrement dit, un élément de $\mathcal{C}^\bullet$ est un élément de $\mathcal{C}$ qui a été «pointé», où chaque objet peut être pointé un nombre de fois égal à sa taille. L'élement (γ, i) est de taille $|\gamma|$. Cette construction est-elle admissible ? Quel est l'opérateur correspondant $C(z) \mapsto C^\bullet(z)$ sur les séries génératrices ?

• Écrire une équation fonctionnelle reliant $B(z)$ et la série $D(z)$ des chemins de Dyck, et se convaincre (mieux : le faire) que l'on pourrait trouver $D(z)$ comme ça.

• Donner une (ou plusieurs) preuve(s) bijective(s) du fait que $b_n = 4^n$.

Exercice 6

Essayer de définir un monoïde à la Cartier-Foata où les générateurs seraient les cycles d'un graphe dirigé et où les cycles sommets-disjoints commuteraient. Faire un lien entre les éléments de ce monoïde et les marches sur le graphe, puis voir si l'on peut retrouver le théorème de l'exercice 2 directement à partir du théorème de Viennot sur les empilements triviaux.

Exercice 7 (Un langage algébrique intrinsèquement ambigu)

Pour comprendre le titre de cet exercice, on attendra le cours sur les langages algébriques...

On considère le langage suivant défini sur l'alphabet $\{a, b\}$:

$$\mathcal{L} = \{a^n b w_1 a^n w_2, \quad n \geq 0, w_1 \in \{a, b\}^*, w_2 \in \{a, b\}^*.\}$$

Autrement dit, $\mathcal{L}$ est l'ensemble des mots w contenant au moins un b et satisfaisant la propriété suivante : *Soit n le nombre de a précédent la première lettre b de w. Alors, w contient au moins une autre séquence de n lettres a consécutives.*

Notons que la décomposition $w = a^n b w_1 a^n w_2$ donnée dans la définition de $\mathcal{L}$ est ambiguë (pour un mot donné il y a une seule valeur de n possible, mais a priori plusieurs choix possibles pour les mots w_1, w_2).

(a) On considère le langage $\mathcal{R}_n$ formé des mots sur $\{a, b\}$ n'ayant aucune séquence de n lettres a consécutives (c.à.d. ne contenant pas le facteur a^n) et terminant par un b. Montrer que tout mot $w \in \mathcal{L}$ se décompose de manière *unique* sous la forme :

$$w = a^n b u_n a^n w_2$$

où $n \geq 0$, où $u_n \in \mathcal{R}_n$ et où $w_2 \in \{a, b\}^*$.

(b) Calculer explicitement la série génératrice $R_n(x) = \sum_{w \in \mathcal{R}_n} x^{|w|}$. On pourra pour cela écrire une expression régulière pour $\mathcal{R}_n$.

(c) En déduire que la série génératrice des mots de $\mathcal{L}$ est donnée par :

$$L(x) = \frac{x(1-x)}{1-2x} \sum_{n \geq 1} \frac{x^{2n}}{1 - 2x + x^{n+1}}.$$