EXERCICES DE COMBINATOIRE – FEUILLE 4

MATTHIEU JOSUAT-VERGÈS & GUILLAUME CHAPUY
–
M2 MATHS FONDAS PARIS 7 (2019).

Exercice 1 (transferts)

(i) Analyser la singularité dominante de la série des arbres de Cayley, donnée par $T(z) = z \exp T(z)$.

(ii) Montrer que la distance à la racine d'un sommet pris uniformément au hasard dans un arbre Cayley de taille n choisi uniformément au hasard, a espérance $\Theta(\sqrt{n})$. Se convaincre qu'on pourrait traiter sans peine les moments plus grands.

(iii) Soit k fixé. Montrer que la distance entre deux points choisis uniformément au hasard dans un graphe choisi uniformément au hasard parmi ceux d'excès k à n sommets, est $O(\sqrt{n})$.

Exercice 2 (composition sous-critique)

Soient deux classes combinatoires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, on consultera dans un TD précédent la définition de la classe $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$, de série génératrice $A(B(t))$. On note ρ le r.d.c. de $B(t)$, supposé fini, on suppose que $B(t)$ est analytique dans un Δ-domaine en ρ, et que $B(t)$ est finie à sa singularité, $B(\rho) = \tau$. On suppose que la composition est *sous-critique*, à savoir que τ est strictement inférieur au rayon de convergence de A. On suppose de plus que $B(t)$ a une singularité du type :

$$B(t) = \tau - c\left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^{\alpha} + o\left(\left(1 - \frac{z}{\rho}\right)^{\alpha}\right), \quad 0 < \alpha < 1,$$

dans son Δ-domaine au voisinage de ρ. On note $C_{n,k}$ le nombre d'objets de taille n dans $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ dont le $\mathcal{A}$-objet sous-jacent est de taille k, autrement dit :

$$A(uB(t)) = \sum_{n,k} C_{n,k} t^n u^k,$$

et $C_n = \sum_k C_{n,k}$.

(i) Montrer que l'on a, pour tout $k \geq 0$ fixé,

$$\frac{C_{n,k}}{C_n} \longrightarrow q_k,$$

quand n tend vers l'infini, pour une quantité q_k que l'on explicitera.

(ii) Vérifier que $\sum_k q_k = 1$.

Exercice 3 (une petite bijection : une autre preuve de la formule de Cayley)

On se propose de redémontrer la formule n^{n-2} comptant les arbres de Cayley à n sommets, à partir ce que l'on sait de l'énumération des arbres plans avec contrôle des arités. Pour cela, on va compter des arbres qui sont à la fois enracinés, plans (enfants ordonnés de gauche à droite) et étiquetés (sommets étiquetés de 1 à n). En comptant de tels arbres de deux façons, trouver une relation entre le nombre $A(a_1, a_2, \dots)$ d'arbres plans enracinés ayant a_i sommets d'arité i pour tout i, et le nombre $C(d_1, d_2, \dots)$ d'arbres de Cayley ayant d_i sommets de degré i pour tout i. En déduire une formule explicite pour $C(d_1, d_2, \dots)$, puis retrouver la formule n^{n-2} vue en cours de cette façon.

Note : pas de calculs mais un peu d'astuce pour gérer arité vs. degré, en particulier trouver la relation entre a_i et d_i qui marche.

Exercice 4 (encore une petite bijection)

(Parenthèse : on a vu en cours la bijection de Joyal pour compter les arbres de Cayley (bi-marqués). Elle utilise en particulier le fait très simple suivant : on peut écrire une permutation en cycles, ou en ligne (comme le mot $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$). Mais il y a plusieurs façons de représenter une permutation par un mot, ce qui donne lieu à des bijections intéressantes.)

Un *record inférieur* (de gauche à droite) d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est un i tel que $\sigma_i < \sigma_j$ pour tout $j < i$. Donner une bijection de $\mathfrak{S}_n$ dans lui-même qui transforme le nombre de cycles d'une permutation en son nombre de records inférieurs. En déduire une version particulièrement jolie de la bijection de Joyal.

Exercice 5 (suite à une question posée en cours)
On note Z_n la longueur du plus grand cycle d'une permutation aléatoire uniforme de taille n (c'est une variable aléatoire réelle). On note $a_{n,k}$ le nombre de permutations dont le plus grand cycle est de longueur k, et $a_{n,\le k} := \sum_{i\le k} a_{n,i}$. On a $\mathbb{E}Z_n = \frac{1}{n!}\sum_k k a_{n,k}$.

(i) Exprimer $\mathbb{E}Z_n$ linéairement en fonction des $a_{n,\le k}$.

(ii) Pour k fixé, donner une expression close pour la série génératrice $\sum_{n\ge 0} \frac{a_{n,\le k}}{n!} z^n$. En déduire une expression pour la série $\sum_{n\ge 0} \mathbb{E}Z_n z^n$. On pourra mettre cette expression sous la forme :

$$\frac{1}{1-z} \times \sum_{i\ge 1} (1 - r_i(z)).$$

où $r_i(z)$ est une quantité explicite, elle-même sous forme de somme.

(iii) En approchant chacune des sommes par une intégrale, se convaincre que l'on peut appliquer l'analyse de singularité à cette fonction et en déduire que $\mathbb{E}Z_n \sim cn$, où

$$c = \int_0^\infty \left(1 - e^{-\int_s^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt}\right) ds \approx 0,6243.....$$

Le calcul formel n'est pas très difficile, la preuve non plus mais il fau(drai)t patiemment justifier l'uniformité de toutes les approximations séries-intégrales.

Ce résultat est dû à Shepp, la preuve présentée ici est due (semble-t-il) à Flajolet et Odlyzko.

Exercice 6
La conclusion du théorème de Drmota reste-t-elle vraie si on ne demande pas la positivité des coefficients du système ? Si on ne demande pas que le système soit fortement connexe ?

Exercice 7 (encore une bijection)
On veut (encore) redémontrer la formule de Cayley. On note $f_{n,k}$ le nombre de forêts sur $\{1, 2, \ldots, n\}$ ayant k composantes connexes, dont chacune a un sommet (racine) distingué. En comptant de deux façons différentes de tels objets avec une arête marquée, trouver une relation entre $f_{n,k}$ et $f_{n,k+1}$. En déduire $f_{n,k}$, puis $f_{n,1} = n^{n-1}$.