EXERCICES DE COMBINATOIRE – FEUILLE 6

MATTHIEU JOSUAT-VERGÈS & GUILLAUME CHAPUY
–
M2 MATHS FONDAS PARIS 7 (2019).

Exercice 1 (Chemins)

On veut compter les chemins dans $\mathbb{N}^2$ commençant en $(0,0)$, avec des pas $(1,i)$ pour $i \geq -1$. (Contrairement au chemins de Łukasiewicz, on ne termine pas forcément à hauteur 0.)

On note $F(t,u)$ la série génératrice de ces chemins en fonction de la longueur (variable t) et de la hauteur finale (variable u), où de plus chaque pas $(1,k)$ avec $k >= 0$ reçoit un poids t_k.

(i) Écrire une équation pour la série $F(t,u)$.

(ii) Utiliser la méthode du noyau : écrire l'équation sous la forme $K(t,u)F(t,u) = \cdots$. Montrer qu'il existe une unique série formelle en t, notée $U(t)$, telle que $K(t,U(t)) = 0$. Que peut-on dire de l'équation satisfaite par $U(t)$?

(iii) En déduire une expression pour $F(t,u)$. Peut-on l'interpréter combinatoirement ?

Exercice 2 (Paramétrisation lagrangienne)

On a vu en cours que la série $M(z)$ des cartes planaires enracinées s'écrit $M(z) = T(z) - zT(z)^3$ où $T(z)$ satisfait $T(z) = 1 + 3zT(z)^2$.

On a vu au TD précédent que $M(z)$ est reliée à la série $C(z)$ des cartes planaires enracinées non-séparables par $M(z) = 1 + C(zM(z)^2)$.

En déduire que $C(t) = t(2 + Y(t) - Y(t)^2)$ où $Y(t)$ satisfait $Y(t) = t(1 + Y(t))^3$.

Indication : Poser $t = zM(z)^2$, chercher une relation entre $T(z)$ et $Y(t)$.

Exercice 3 (Cartes à degrés fixés)

Écrire une équation pour la série génératrice des cartes planaires enracinées, avec pour variable : z qui suit le nombre d'arêtes, u qui suit le degré de la face externe, et chaque face (interne) à k arêtes a un poids t_k.

Adapter cette équation dans les cas des cartes où le degré de la face externe est borné par un entier fixé, et montrer que la série obtenue est algébrique.