Non-Deterministic Abstract Machines

Małgorzata Biernacka, Dariusz Biernacki,
Sergueï Lenglet, and Alan Schmitt

Semantics (deterministic languages)

Big-step

$$\frac{t \Downarrow \lambda x.t' \qquad t'\{s/x\} \Downarrow v}{t\ s \Downarrow v}$$

Semantics (deterministic languages)

Big-step

$$\frac{t \Downarrow \lambda x.t' \qquad t'\{s/x\} \Downarrow v}{t\ s \Downarrow v}$$

Small-step

$$\frac{t \to t'}{t\ s \to t'\ s}$$

Semantics (deterministic languages)

Big-step

$$\frac{t \Downarrow \lambda x.t' \qquad t'\{s/x\} \Downarrow v}{t\ s \Downarrow v}$$

Small-step

$$\frac{t \to t'}{t\ s \to t'\ s}$$

Reduction semantics

$$\mathbb{E}[(\lambda x.t')\ s] \to \mathbb{E}[t'\{s/x\}]$$

Semantics (deterministic languages)

Big-step

$$\frac{t \Downarrow \lambda x.t' \qquad t'\{s/x\} \Downarrow v}{t\ s \Downarrow v}$$

Small-step

$$\frac{t \to t'}{t\ s \to t'\ s}$$

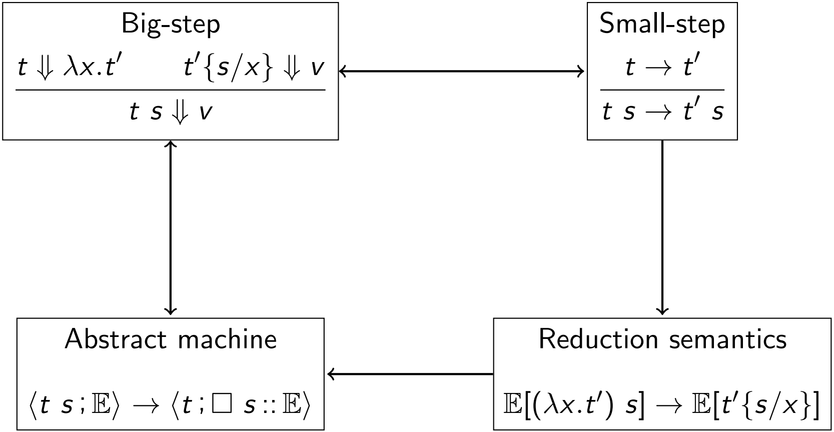
Abstract machine

$$\langle t\ s\,;\mathbb{E}\rangle \to \langle t\,;\square\ s :: \mathbb{E}\rangle$$

Reduction semantics

$$\mathbb{E}[(\lambda x.t')\ s] \to \mathbb{E}[t'\{s/x\}]$$

Semantics (deterministic languages)



Semantics (process calculi)

Small-Step

Abstract machine

Abstract machines

- Ad-hoc
- Incomplete
- No systematic derivation

λ-calculus

Syntax:

$$t, s ::= x \mid \lambda x.t \mid t \,@\, s$$

SOS semantics:

$$\frac{t \to t'}{t \,@\, s \to t' \,@\, s} \qquad \frac{s \to s'}{t \,@\, s \to t \,@\, s'} \qquad \frac{t \to t'}{\lambda x.t \to \lambda x.t'}$$

$$\frac{}{(\lambda x.t) \,@\, s \to t\{s/x\}}$$

Reduction semantics:

$$\mathbb{E}[(\lambda x.t) \,@\, s] \to \mathbb{E}[t\{s/x\}]$$

Non-Deterministic Abstract Machine

NDAM for the λ-calculus

$$\langle \lambda x.t \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle t \mid \lambda x :: \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \qquad \mathbb{E}[\lambda x.t] \rightsquigarrow \mathbb{E}[\lambda x.t]$$

NDAM for the λ-calculus

$$\langle \lambda x.t \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle t \mid \lambda x :: \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \qquad \mathbb{E}[\lambda x.t] \rightsquigarrow \mathbb{E}[\lambda x.t]$$

$$\langle t \mathbin{@} s \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle t \mid \mathbin{@} s :: \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \qquad \mathbb{E}[t \mathbin{@} s] \rightsquigarrow \mathbb{E}[t \mathbin{@} s]$$

$$\langle t \mathbin{@} s \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle s \mid t \mathbin{@} :: \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \qquad \mathbb{E}[t \mathbin{@} s] \rightsquigarrow \mathbb{E}[t \mathbin{@} s]$$

NDAM for the λ-calculus

$$\langle \lambda x.t \mid \mathbb{E} \rangle_{\text{ctx}} \mapsto \langle t \mid \lambda x :: \mathbb{E} \rangle_{\text{ctx}} \qquad \mathbb{E}[\lambda x.t] \rightsquigarrow \mathbb{E}[\lambda x.t]$$

$$\langle t \mathbin{@} s \mid \mathbb{E} \rangle_{\text{ctx}} \mapsto \langle t \mid @\, s :: \mathbb{E} \rangle_{\text{ctx}} \qquad \mathbb{E}[t \mathbin{@} s] \rightsquigarrow \mathbb{E}[t \mathbin{@} s]$$

$$\langle t \mathbin{@} s \mid \mathbb{E} \rangle_{\text{ctx}} \mapsto \langle s \mid t\, @ :: \mathbb{E} \rangle_{\text{ctx}} \qquad \mathbb{E}[t \mathbin{@} s] \rightsquigarrow \mathbb{E}[t \mathbin{@} s]$$

$$\langle t \mathbin{@} s \mid \mathbb{E} \rangle_{\text{ctx}} \mapsto \langle t \mid \mathbb{E}, s \rangle_{\beta}$$

$$\langle \lambda x.t \mid \mathbb{E}, s \rangle_{\beta} \mapsto \langle \mathbb{E}[t\{s/x\}] \mid \Box \rangle_{\text{ctx}}$$

Backtracking

$$\langle x \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}}$$

Backtracking

$$\langle x \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle \mathbb{E} \mid x \rangle_{\mathsf{bctx}}$$

Backtracking

$$\langle x \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle \mathbb{E} \mid x \rangle_{\mathsf{bctx}}$$

$$\langle @\, s :: \mathbb{E} \mid t \rangle_{\mathsf{bctx}} \mapsto \langle t \mathbin{@} s \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \qquad \mathbb{E}[t \mathbin{@} s] \rightsquigarrow \mathbb{E}[t \mathbin{@} s]$$

Backtracking

$$\langle x \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle \mathbb{E} \mid x \rangle_{\mathsf{bctx}}$$

$$\langle @\, s :: \mathbb{E} \mid t \rangle_{\mathsf{bctx}} \mapsto \langle t \,@\, s \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \qquad \mathbb{E}[t \,@\, s] \rightsquigarrow \mathbb{E}[t \,@\, s]$$

Annotations to prevent infinite loops of focus/unfocus

$$\langle x \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle \mathbb{E} \mid x^{\mathsf{ctx}} \rangle_{\mathsf{bctx}}$$

Backtracking

$$\langle x \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle \mathbb{E} \mid x \rangle_{\mathsf{bctx}}$$

$$\langle @\, s :: \mathbb{E} \mid t \rangle_{\mathsf{bctx}} \mapsto \langle t \,@\, s \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \qquad \mathbb{E}[t \,@\, s] \rightsquigarrow \mathbb{E}[t \,@\, s]$$

Annotations to prevent infinite loops of focus/unfocus

$$\langle x \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle \mathbb{E} \mid x^{\mathsf{ctx}} \rangle_{\mathsf{bctx}}$$

$$\langle t \,@\, s \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle t \mid @\, s :: \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \qquad \text{if } \mathsf{ctx} \notin \mathsf{an}(t)$$

Example

Subterm under focus

Surrounding context

$$(\lambda x.x \mathbin{@} x) \mathbin{@} (\lambda x.x \mathbin{@} x)$$

Example

Subterm under focus

Surrounding context

$$(\lambda x.x \mathbin{@} x) \mathbin{@} (\lambda x.x \mathbin{@} x)$$

$$\langle t \mathbin{@} s \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle t \mid @\, s :: \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \qquad \mathbb{E}[t \mathbin{@} s] \rightsquigarrow \mathbb{E}[t \mathbin{@} s]$$

Example

Subterm under focus

Surrounding context

$$(\lambda x.x \mathbin{@} x) \mathbin{@} (\lambda x.x \mathbin{@} x)$$

$$\langle \lambda x.t \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle t \mid \lambda x :: \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \qquad \mathbb{E}[\lambda x.t] \rightsquigarrow \mathbb{E}[\lambda x.t]$$

Example

Subterm under focus

Surrounding context

$$(\lambda x.x \mathbin{@} x) \mathbin{@} (\lambda x.x \mathbin{@} x)$$

$$\langle t \mathbin{@} s \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle t \mid @\, s :: \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \qquad \mathbb{E}[t \mathbin{@} s] \rightsquigarrow \mathbb{E}[t \mathbin{@} s]$$

Example

Subterm under focus

Surrounding context

$$(\lambda x.x^{\mathsf{ctx}} \mathbin{@} x) \mathbin{@} (\lambda x.x \mathbin{@} x)$$

$$\langle x \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle \mathbb{E} \mid x^{\mathsf{ctx}} \rangle_{\mathsf{ctx}}$$

Example

Subterm under focus

Surrounding context

$$(\lambda x.x^{\text{ctx}} \mathbin{@} x) \mathbin{@} (\lambda x.x \mathbin{@} x)$$

$$\langle @\, s :: \mathbb{E} \mid t \rangle_{\text{bctx}} \mapsto \langle t \mathbin{@} s \mid \mathbb{E} \rangle_{\text{ctx}} \qquad \mathbb{E}[t \mathbin{@} s] \rightsquigarrow \mathbb{E}[t \mathbin{@} s]$$

Example

Subterm under focus

Surrounding context

$$(\lambda x.x^{\mathsf{ctx}} \mathbin{@} x) \mathbin{@} (\lambda x.x \mathbin{@} x)$$

$$\langle t \mathbin{@} s \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle s \mid t \mathbin{@} :: \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \qquad \mathbb{E}[t \mathbin{@} s] \rightsquigarrow \mathbb{E}[t \mathbin{@} s]$$

Example

Subterm under focus

Surrounding context

$$(\lambda x.x^{\mathsf{ctx}} \mathbin{@} x^{\mathsf{ctx}}) \mathbin{@} (\lambda x.x \mathbin{@} x)$$

$$\langle x \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle \mathbb{E} \mid x^{\mathsf{ctx}} \rangle_{\mathsf{ctx}}$$

Example

Subterm under focus

Surrounding context

$$(\lambda x.x^{\mathsf{ctx}} \mathbin{@} x^{\mathsf{ctx}}) \mathbin{@} (\lambda x.x \mathbin{@} x)$$

$$\langle t \mathbin{@} :: \mathbb{E} \mid s \rangle_{\mathsf{bctx}} \mapsto \langle t \mathbin{@} s \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \qquad \mathbb{E}[t \mathbin{@} s] \rightsquigarrow \mathbb{E}[t \mathbin{@} s]$$

Example

Subterm under focus

Surrounding context

$$(\lambda x.x^{\mathsf{ctx},\beta} \mathbin{@} x^{\mathsf{ctx}}) \mathbin{@} (\lambda x.x \mathbin{@} x)$$

$$\langle t \mathbin{@} s \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle t \mid \mathbb{E}, s \rangle_{\beta} \qquad \text{(3 steps)}$$

Example

Subterm under focus

Surrounding context

$$(\lambda x. x^{\mathsf{ctx},\beta} \mathbin{@^{\mathsf{ctx}}} x^{\mathsf{ctx}}) \mathbin{@} (\lambda x. x \mathbin{@} x)$$

$$\langle t \mathbin{@} s \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle \mathbb{E} \mid t \mathbin{@^{\mathsf{ctx}}} s \rangle_{\mathsf{bctx}} \qquad \text{otherwise}$$

Example

Subterm under focus

Surrounding context

$$(\lambda x.x^{\mathsf{ctx},\beta} \mathbin{@^{\mathsf{ctx}}} x^{\mathsf{ctx}}) \mathbin{@} (\lambda x.x \mathbin{@} x)$$

$$\langle \lambda x :: \mathbb{E} \mid t \rangle_{\mathsf{bctx}} \mapsto \langle \lambda x.t \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \qquad \mathbb{E}[\lambda x.t] \rightsquigarrow \mathbb{E}[\lambda x.t]$$

Example

Subterm under focus

Surrounding context

$$(\lambda^{\mathsf{ctx}} x. x^{\mathsf{ctx},\beta} \mathbin{@^{\mathsf{ctx}}} x^{\mathsf{ctx}}) \mathbin{@} (\lambda x. x \mathbin{@} x)$$

$$\langle \lambda x.t \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle \mathbb{E} \mid \lambda^{\mathsf{ctx}} x.t \rangle_{\mathsf{bctx}} \qquad \text{otherwise}$$

Example

Subterm under focus

Surrounding context

$$(\lambda^{\mathsf{ctx}} x.x^{\mathsf{ctx},\beta} \mathbin{@}^{\mathsf{ctx}} x^{\mathsf{ctx}}) \mathbin{@} (\lambda x.x \mathbin{@} x)$$

$$\langle @\, s :: \mathbb{E} \mid t \rangle_{\mathsf{bctx}} \mapsto \langle t \mathbin{@} s \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \qquad \mathbb{E}[t \mathbin{@} s] \rightsquigarrow \mathbb{E}[t \mathbin{@} s]$$

Example

Subterm under focus

Surrounding context

$$(\lambda x.x \mathbin{@} x) \mathbin{@} (\lambda x.x \mathbin{@} x)$$

$$\langle t \mathbin{@} s \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle t \mid \mathbb{E}, s \rangle_{\beta}$$
$$\langle \lambda x.t \mid \mathbb{E}, s \rangle_{\beta} \mapsto \langle \mathbb{E}[t\{s/x\}] \mid \Box \rangle_{\mathsf{ctx}}$$

NDAM for the λ-calculus

$$\langle \lambda x.t \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle t \mid \lambda x :: \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \qquad \text{if } \mathsf{ctx} \notin \mathsf{an}(t)$$

$$\langle t \,@\, s \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle t \mid @\, s :: \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \qquad \text{if } \mathsf{ctx} \notin \mathsf{an}(t)$$

$$\langle t \,@\, s \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle s \mid t \,@ :: \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \qquad \text{if } \mathsf{ctx} \notin \mathsf{an}(s)$$

$$\langle t \,@\, s \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle t \mid \mathbb{E}, s \rangle_{\beta} \qquad \text{if } \beta \notin \mathsf{an}(t)$$

$$\langle t \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle \mathbb{E} \mid t^{\mathsf{ctx}} \rangle_{\mathsf{bctx}} \qquad \text{otherwise (3 steps)}$$

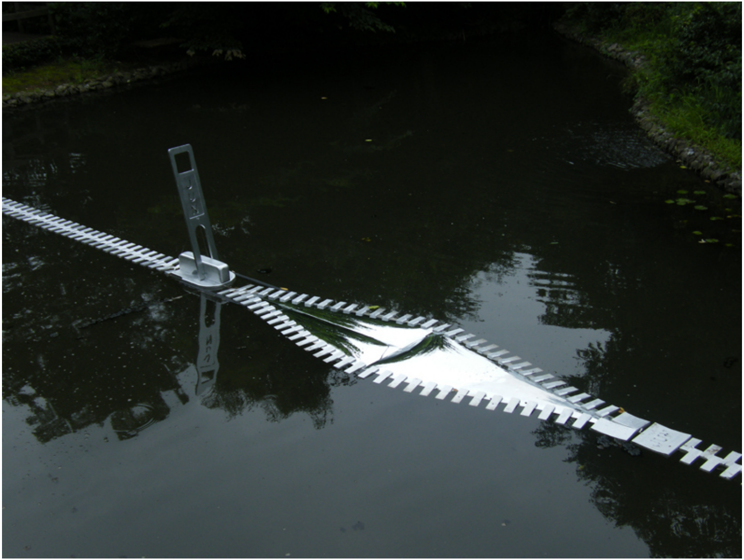
$$\langle \lambda x.t \mid \mathbb{E}, s \rangle_{\beta} \mapsto \langle \mathbb{E}[t\{s/x\}] \mid \Box \rangle_{\mathsf{ctx}}$$

$$\langle t \mid \mathbb{E}, s \rangle_{\beta} \mapsto \langle t^{\beta} \mid \mathbb{E}, s \rangle_{\mathsf{b}\beta} \qquad \text{otherwise (2 steps)}$$

$$\langle \lambda x :: \mathbb{E} \mid t \rangle_{\mathsf{bctx}} \mapsto \langle \lambda x.t \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \qquad \text{4 steps}$$

$$\vdots$$

Zipper semantics



Deriving the NDAM

$$\langle \lambda x.t \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle t \mid \lambda x :: \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \qquad \text{if } \mathsf{ctx} \notin \mathsf{an}(t)$$

$$\langle t \mathbin{@} s \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle t \mid @\, s :: \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \qquad \text{if } \mathsf{ctx} \notin \mathsf{an}(t)$$

$$\langle t \mathbin{@} s \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle s \mid t\, @ :: \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \qquad \text{if } \mathsf{ctx} \notin \mathsf{an}(s)$$

$$\langle t \mathbin{@} s \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle t \mid \mathbb{E}, s \rangle_{\beta} \qquad \text{if } \beta \notin \mathsf{an}(t)$$

$$\langle t \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle \mathbb{E} \mid t^{\mathsf{ctx}} \rangle_{\mathsf{bctx}} \qquad \text{otherwise (3 steps)}$$

$$\langle \lambda x.t \mid \mathbb{E}, s \rangle_{\beta} \mapsto \langle \mathbb{E}[t\{s/x\}] \mid \Box \rangle_{\mathsf{ctx}}$$

$$\langle t \mid \mathbb{E}, s \rangle_{\beta} \mapsto \langle t^{\beta} \mid \mathbb{E}, s \rangle_{\mathsf{b}\beta} \qquad \text{otherwise (2 steps)}$$

$$\langle \lambda x :: \mathbb{E} \mid t \rangle_{\mathsf{bctx}} \mapsto \langle \lambda x.t \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \qquad \text{4 steps}$$

$$\vdots$$

Deriving the NDAM

$$\langle \lambda x.t \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathrm{ctx}} \mapsto \langle t \mid \lambda x :: \mathbb{E} \rangle_{\mathrm{ctx}} \qquad \text{if ctx} \notin \mathrm{an}(t)$$

$$\langle t \mathbin{@} s \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathrm{ctx}} \mapsto \langle t \mid @\, s :: \mathbb{E} \rangle_{\mathrm{ctx}} \qquad \text{if ctx} \notin \mathrm{an}(t)$$

$$\langle t \mathbin{@} s \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathrm{ctx}} \mapsto \langle s \mid t\, @ :: \mathbb{E} \rangle_{\mathrm{ctx}} \qquad \text{if ctx} \notin \mathrm{an}(s)$$

$$\langle t \mathbin{@} s \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathrm{ctx}} \mapsto \langle t \mid \mathbb{E}, s \rangle_{\beta} \qquad \text{if } \beta \notin \mathrm{an}(t)$$

$$\langle \lambda x.t \mid \mathbb{E}, s \rangle_{\beta} \mapsto \langle \mathbb{E}[t\{s/x\}] \mid \Box \rangle_{\mathrm{ctx}}$$

Deriving the NDAM

$$\langle \lambda x.t \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle t \mid \lambda x :: \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \qquad \text{if } \mathsf{ctx} \notin \mathsf{an}(t)$$

$$\langle t \mathbin{@} s \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle t \mid @\, s :: \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \qquad \text{if } \mathsf{ctx} \notin \mathsf{an}(t)$$

$$\langle t \mathbin{@} s \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle s \mid t\, @ :: \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \qquad \text{if } \mathsf{ctx} \notin \mathsf{an}(s)$$

$$\langle t \mathbin{@} s \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle t \mid \mathbb{E}, s \rangle_{\beta} \qquad \text{if } \beta \notin \mathsf{an}(t)$$

$$\langle \lambda x.t \mid \mathbb{E}, s \rangle_{\beta} \mapsto \langle \mathbb{E}[t\{s/x\}] \mid \Box \rangle_{\mathsf{ctx}}$$

$$\frac{t \xrightarrow{\lambda x :: \mathbb{E}}_{\mathsf{ctx}} t'}{\lambda x.t \xrightarrow{\mathbb{E}}_{\mathsf{ctx}} t'}$$

Deriving the NDAM

$$\langle \lambda x.t \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle t \mid \lambda x :: \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \qquad \text{if } \mathsf{ctx} \notin \mathsf{an}(t)$$

$$\langle t \,@\, s \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle t \mid @\, s :: \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \qquad \text{if } \mathsf{ctx} \notin \mathsf{an}(t)$$

$$\langle t \,@\, s \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle s \mid t \,@ :: \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \qquad \text{if } \mathsf{ctx} \notin \mathsf{an}(s)$$

$$\langle t \,@\, s \mid \mathbb{E} \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto \langle t \mid \mathbb{E}, s \rangle_{\beta} \qquad \text{if } \beta \notin \mathsf{an}(t)$$

$$\langle \lambda x.t \mid \mathbb{E}, s \rangle_{\beta} \mapsto \langle \mathbb{E}[t\{s/x\}] \mid \Box \rangle_{\mathsf{ctx}}$$

$$\frac{t \xrightarrow{\lambda x :: \mathbb{E}}_{\mathsf{ctx}} t'}{\lambda x.t \xrightarrow{\mathbb{E}}_{\mathsf{ctx}} t'} \qquad \frac{t \xrightarrow{@\, s :: \mathbb{E}}_{\mathsf{ctx}} t'}{t \,@\, s \xrightarrow{\mathbb{E}}_{\mathsf{ctx}} t'} \qquad \frac{s \xrightarrow{t\, @ :: \mathbb{E}}_{\mathsf{ctx}} s'}{t \,@\, s \xrightarrow{\mathbb{E}}_{\mathsf{ctx}} s'}$$

$$\frac{t \xrightarrow{\mathbb{E}, s}_{\beta} t'}{t \,@\, s \xrightarrow{\mathbb{E}}_{\mathsf{ctx}} t'} \qquad \frac{}{\lambda x.t \xrightarrow{\mathbb{E}, s}_{\beta} \mathbb{E}[t\{s/x\}]}$$

Equivalence results

Theorem (RS $\iff$ ZS)

$t \rightarrow_{\mathsf{rs}} t'$ iff $t \xrightarrow{\square}_{\mathsf{ctx}} t'$

Theorem

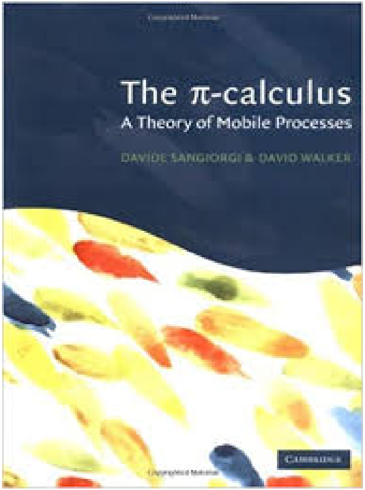
The redex search in the NDAM is terminating

Theorem (ZS $\iff$ NDAM)

- *$t \xrightarrow{\square}_{\mathsf{ctx}} t'$ iff $\langle t \mid \square \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto^* \langle t' \mid \square \rangle_{\mathsf{ctx}}$*
- *t is a normal form iff $\langle t \mid \square \rangle_{\mathsf{ctx}} \mapsto^* \langle \square \mid t \rangle_{\mathsf{bctx}}$*

Generic result (independant from the ZS)

Process calculi



HOcore

$a, b \ldots$	Channel names
$P, Q ::= 0$	Inactive process
$\mid \overline{a}\langle P \rangle$	Output
$\mid a(X).P$	Input
$\mid P \parallel Q$	Parellel composition

HOcore

$a, b \ldots$	Channel names
$P, Q ::= 0$	Inactive process
$\mid \ \overline{a}\langle P \rangle$	Output
$\mid \ a(X).P$	Input
$\mid \ P \parallel Q$	Parellel composition

$$\overline{a}\langle P \rangle \parallel a(X).Q \rightarrow 0 \parallel Q\{P/X\}$$

HOcore

$a, b \ldots$	Channel names
$P, Q ::= 0$	Inactive process
$\mid \overline{a}\langle P \rangle$	Output
$\mid a(X).P$	Input
$\mid P \parallel Q$	Parellel composition

$$\mathbb{E}[\mathbb{F}[\overline{a}\langle P \rangle] \parallel \mathbb{G}[a(X).Q]] \rightarrow \mathbb{E}[\mathbb{F}[0] \parallel \mathbb{G}[Q\{P/X\}]]$$

$$\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G} ::= \Box \mid \mathbb{E} \parallel P \mid P \parallel \mathbb{E}$$

Zipper semantics for HOcore

$$\frac{}{R \xrightarrow{\square}_{\mathsf{ctx}} \ldots}$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{F}[\overline{a}\langle P\rangle] \parallel \mathbb{G}[a(X).Q]] \to \mathbb{E}[\mathbb{F}[0] \parallel \mathbb{G}[Q\{P/X\}]]$$

Zipper semantics for HOcore

$$\dfrac{\dfrac{}{R_1 \parallel R_2 \xrightarrow{\mathbb{E}}_{\mathsf{ctx}} \cdots}}{\dfrac{\vdots\ \mathbb{E}}{R \xrightarrow{\square}_{\mathsf{ctx}} \cdots}}$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{F}[\overline{a}\langle P\rangle] \parallel \mathbb{G}[a(X).Q]] \rightarrow \mathbb{E}[\mathbb{F}[0] \parallel \mathbb{G}[Q\{P/X\}]]$$

Zipper semantics for HOcore

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{R_1 \xrightarrow{\Box,\mathbb{E},R_2}_{\text{out}} \cdots}}{R_1 \parallel R_2 \xrightarrow{\mathbb{E}}_{\text{ctx}} \cdots}}{\dfrac{\vdots\ \mathbb{E}}{R \xrightarrow{\Box}_{\text{ctx}} \cdots}}$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{F}[\overline{a}\langle P\rangle] \parallel \mathbb{G}[a(X).Q]] \rightarrow \mathbb{E}[\mathbb{F}[0] \parallel \mathbb{G}[Q\{P/X\}]]$$

Zipper semantics for HOcore

$$
\begin{array}{c}
\hline
\overline{a}\langle P\rangle \xrightarrow{\mathbb{F},\mathbb{E},R_2}_{\mathsf{out}} \cdots \\
\hline
\vdots\ \mathbb{F} \\
\hline
R_1 \xrightarrow{\Box,\mathbb{E},R_2}_{\mathsf{out}} \cdots \\
\hline
R_1 \parallel R_2 \xrightarrow{\mathbb{E}}_{\mathsf{ctx}} \cdots \\
\hline
\vdots\ \mathbb{E} \\
\hline
R \xrightarrow{\Box}_{\mathsf{ctx}} \cdots
\end{array}
$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{F}[\overline{a}\langle P\rangle] \parallel \mathbb{G}[a(X).Q]] \to \mathbb{E}[\mathbb{F}[0] \parallel \mathbb{G}[Q\{P/X\}]]$$

Zipper semantics for HOcore

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{R_2 \xrightarrow{\square,\mathbb{F},\mathbb{E},a,P}_{\mathsf{in}} \cdots}}{\overline{a}\langle P\rangle \xrightarrow{\mathbb{F},\mathbb{E},R_2}_{\mathsf{out}} \cdots}}{\vdots\ \mathbb{F}}}{R_1 \xrightarrow{\square,\mathbb{E},R_2}_{\mathsf{out}} \cdots}}{R_1 \parallel R_2 \xrightarrow{\mathbb{E}}_{\mathsf{ctx}} \cdots}}{\dfrac{\vdots\ \mathbb{E}}{R \xrightarrow{\square}_{\mathsf{ctx}} \cdots}}
$$

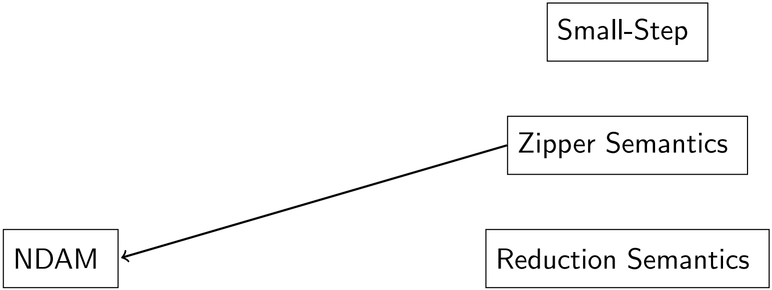
$$\mathbb{E}[\mathbb{F}[\overline{a}\langle P\rangle] \parallel \mathbb{G}[a(X).Q]] \rightarrow \mathbb{E}[\mathbb{F}[0] \parallel \mathbb{G}[Q\{P/X\}]]$$

Zipper semantics for HOcore

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{a(X).Q \xrightarrow{\mathbb{G},\mathbb{F},\mathbb{E},a,P}_{\text{in}} \mathbb{E}[\mathbb{F}[0] \parallel \mathbb{G}[Q\{P/X\}]]}{\vdots\ \mathbb{G}}}{R_2 \xrightarrow{\square,\mathbb{F},\mathbb{E},a,P}_{\text{in}} \cdots}}{\overline{a}\langle P\rangle \xrightarrow{\mathbb{F},\mathbb{E},R_2}_{\text{out}} \cdots}}{\vdots\ \mathbb{F}}}{R_1 \xrightarrow{\square,\mathbb{E},R_2}_{\text{out}} \cdots}}{R_1 \parallel R_2 \xrightarrow{\mathbb{E}}_{\text{ctx}} \cdots}}{\dfrac{\vdots\ \mathbb{E}}{R \xrightarrow{\square}_{\text{ctx}} \cdots}}$$

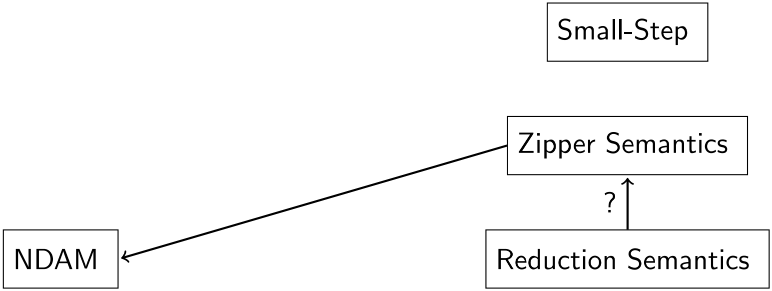
$$\mathbb{E}[\mathbb{F}[\overline{a}\langle P\rangle] \parallel \mathbb{G}[a(X).Q]] \to \mathbb{E}[\mathbb{F}[0] \parallel \mathbb{G}[Q\{P/X\}]]$$

Conclusion



- Generic design (backtracking, annotations)
- Automatic translation from the ZS
- Sound and complete w.r.t. the ZS
- Implemented in OCaml

Future work



- Distributed design (process calculi)