évaluation et qualité Hcéres

VOLUME 2

ANALYSE DISCIPLINAIRE
ET DES INTERACTIONS SCIENTIFIQUES

SYNTHÈSE NATIONALE ET DE PROSPECTIVE SUR LES MATHÉMATIQUES

Par le comité de synthèse,
sous la présidence et la vice-présidence
de Marc Peigné et Grégoire Allaire

Novembre 2022

HAUT CONSEIL DE L'ÉVALUATION DE LA RECHERCHE ET DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

SYNTHÈSE NATIONALE ET DE PROSPECTIVE SUR LES MATHÉMATIQUES

ANALYSE DISCIPLINAIRE ET DES INTERACTIONS SCIENTIFIQUES

Au nom du comité d'experts[1] :
Marc Peigné, Président du comité

Pour le Hcéres[2] :
Thierry Coulhon, Président

En vertu du décret n° 2021-1536
du 29 novembre 2021 :
1. Les rapports d'évaluation "sont signés par le président du comité". (Article 11, alinéa 2) ;
2. Le président du Hcéres « contresigne les rapports d'évaluation établis par les comités d'experts et signés par leur président ». (Article 8, alinéa 5).

Ouvrage publié le 9 novembre 2022

Cet ouvrage est édité par le Hcéres :
Hcéres
2, rue Albert Einstein
75013 Paris

Conception/réalisation : Taola/Panteo

Illustration de la page de couverture :
Bandeau du site web du semestre Geometry and statistics in data sciences, IHP, Paris, 2022, https://indico.math.cnrs.fr/event/6590/.
Avec l'aimable autorisation des organisateurs du semestre.

PRÉAMBULE À L'ANALYSE DISCIPLINAIRE ET DES INTERACTIONS

Le volume 1 (Vol. 1 SNM) de cette Synthèse nationale des mathématiques présente le fonctionnement de l'école mathématique française, ses forces et ses faiblesses, les enjeux à venir, et propose quelques recommandations qui peuvent y répondre. Il se concentre sur de nombreux aspects des mathématiques dans l'enseignement supérieur et la recherche, ainsi que leurs liens avec les autres disciplines, le monde économique et la société, la formation des enseignants du secondaire et les questions autour du déséquilibre femmes-hommes entre autres. Par contre, il n'aborde pas l'analyse proprement scientifique des mathématiques en France et leur développement actuel. Le présent volume (Vol. 2 SNM ADIS) y est consacré.

Les textes présentés sont le fruit de nombreux échanges (plus de 200 entretiens et questionnaires) avec des mathématiciennes et mathématiciens, en France et à l'étranger. Ils ont permis à chaque membre du comité d'affiner sa vision du spectre des mathématiques d'aujourd'hui. Pour aborder les contributions qui suivent, il est essentiel que le lecteur ou la lectrice garde à l'esprit les limitations du travail accompli : certaines sont structurelles, d'autres correspondent aux choix effectués, d'autres enfin aux compétences limitées de tout comité, quel qu'il soit. Par souci de clarté, au fil de ce volume, nous précisons les biais que nous avons identifiés ; c'est utile à la lecture, qui appelle donc à la bienveillance, mais utile aussi à tout autre comité entreprenant une tâche similaire dans le futur.

Il est difficile à une personne extérieure au domaine de saisir l'étendue des questions abordées par les mathématiques contemporaines, l'infinie variété des méthodes, des sujets abordés, des questions ouvertes, qu'elles soient posées à l'intérieur de la discipline ou venant de sollicitations extérieures. Cette saisie reste délicate pour les mathématiciens professionnels eux-mêmes. Au cœur même d'un champ de compétences donné, il est souvent difficile d'avoir une idée précise de l'ensemble des travaux en cours. Conscients de l'étendue de la tâche et de l'impossibilité structurelle d'une analyse exhaustive, c'est donc avec humilité que nous[1] avons conduit cette enquête et essayé d'en rendre compte. Nous avons effectué une sélection parmi l'ensemble des matériaux accumulés. Celle-ci est donc discutable, et sera sans doute discutée ; elle l'a été au sein de notre comité lorsqu'il a fallu renoncer à développer comme il aurait convenu tel ou tel domaine, telle ou telle thématique. Il y a eu débat, puis des décisions collectives que nous assumons.

La **méthodologie** suivie par le comité pour la rédaction de ces analyses est la suivante. Dans un premier temps, nous avons effectué une sélection de champs thématiques et les avons assignés à des groupes de travail. Ces groupes ont procédé à un grand nombre d'entretiens avec des personnalités représentatives et ont étayé leur travail avec les données dont ils disposaient (rapports Hcéres, documents et rapports de synthèse divers et variés, questionnaires, etc.). Les périmètres des domaines explorés ont pu évoluer au fur et à mesure de l'avancement de l'analyse. Les textes qui suivent sont les fruits d'un travail collectif, ils ont été lus et discutés à plusieurs reprises, avant d'aboutir à la version finale proposée. Les contenus et les conclusions présents dans le rapport n'engagent en rien les collègues interviewés.

Les rédacteurs ont eu une grande liberté dans la conception et la structuration de chaque texte. Il y a donc une certaine **inhomogénéité** de style, elle est assumée et traduit en partie le fait que les questions abordées varient fortement d'une thématique à l'autre. Il est impossible de rendre compte des mathématiques dans toutes leurs échelles de granularité. Nous avons donc préféré développer quelques **exemples représentatifs** plutôt que de chercher à lister de façon exhaustive les problèmes, les avancées ou les thématiques de recherche. *In fine* le comité a fait sien l'ensemble des textes de ce volume.

Le découpage proposé ici, en sous-domaines de l'ensemble des mathématiques, fait apparaître,

1. La liste des membres du comité est donnée en annexe B du volume 1. Le comité, dans ce volume 2, s'exprime à la première personne.

d'une part, des champs purement disciplinaires, internes aux mathématiques et, d'autre part, des champs interagissant explicitement avec d'autres sciences ou domaines académiques. Il est quelque peu arbitraire car l'ensemble des mathématiques a vocation à pouvoir interagir, comme décrit dans le chapitre 1 du volume 1. Lorsque l'on parle d'**interactions**, on se limite presque exclusivement ici aux échanges entre les mathématiques et les autres disciplines académiques. Existent aussi des interactions avec le monde socio-économique, analysées dans le volume 1 ; certaines d'entre elles sont aussi évoquées ici (voir par exemple les paragraphes 2.2.9, 2.2.10 et 2.3.3.).

Le principe d'un tel découpage est cependant discutable par le caractère intrinsèque des mathématiques, dont la spécificité première est de proposer un langage commun et une méthode d'analyse logique et conceptuelle à l'ensemble des autres disciplines. L'histoire de ces échanges est féconde, parsemée de succès comme la théorie de la relativité, le boson de Higgs, les bases de la génétique, parmi tant d'autres, mais également parsemée de doutes. L'apport des mathématiques aux sciences humaines et sociales, ou aux sciences de la vie, et l'importance à donner aux mathématiques dans cette interaction, sont aussi en questionnement constant. Rappelons la controverse entre Émile Borel et John Maynard Keynes sur la place de l'analyse mathématique en économie, ou le point de vue hostile de Claude Bernard affirmant que la statistique conduisait immanquablement à l'erreur en biologie.

La physique a eu un rôle historique au fil des derniers siècles en sollicitant et en participant au développement de nombreux domaines des mathématiques. Ce sont aujourd'hui de nombreuses autres disciplines qui interpellent les mathématiques, qu'elles soient scientifiques (chimie, biologie, santé, etc. ou encore plus récemment l'informatique) ou qu'elles relèvent des sciences humaines (économie, histoire, philosophie etc.). Nous analysons quelques-unes d'entre elles, en soulignant les allers-retours féconds qui en découlent mais aussi les difficultés que les chercheurs et chercheuses rencontrent lors de ces échanges. Les interactions récentes avec l'informatique et les perspectives qu'elles ouvrent nous ont tout particulièrement interpellées, nous amenant à utiliser le terme de « transdisciplinarité », tant ces échanges ouvrent des horizons nouveaux sur la pratique même de notre discipline.

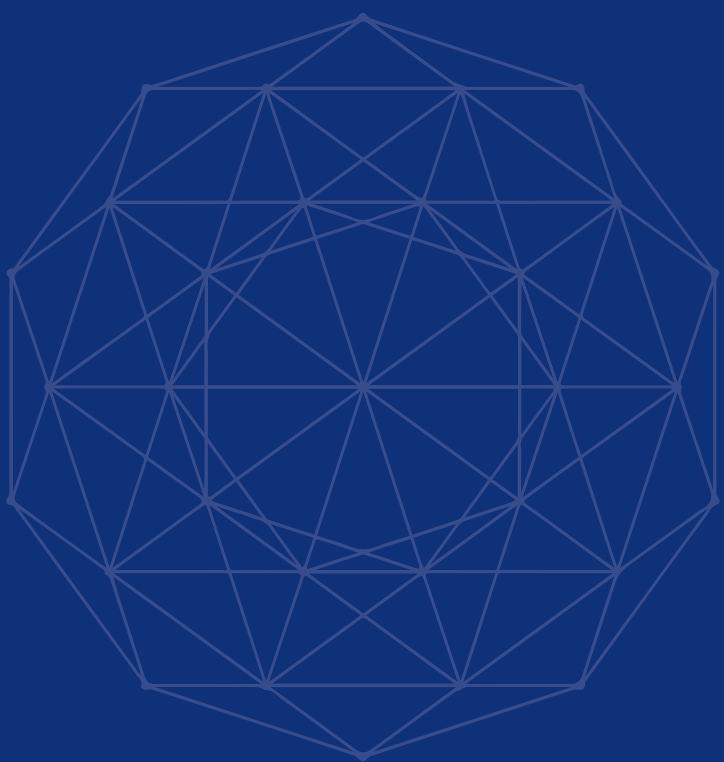
Les interactions entre mathématiciennes, mathématiciens et spécialistes d'autres disciplines se situent donc entre évidence et défiance, entre enthousiasme pour un travail transdisciplinaire et difficultés. C'est tout particulièrement le cas en France en raison de formations initiales trop peu interdisciplinaires et de modes de fonctionnement très différents d'une communauté à l'autre. La remarque méthodologique que nous avons faite au sujet du découpage des mathématiques en domaines s'applique également à la description de leurs interactions. L'étendue des champs à couvrir est immense et en devenir permanent ; nous avons donc effectué des choix, que ce soit au niveau général au dans le détail des développements. Le lecteur et la lectrice reconnaîtront dans le chapitrage de ce volume les disciplines concernées.

Au fur et à mesure de ce travail, l'organisation quelque peu singulière des mathématiques nous est apparue de plus en plus clairement comme une spécificité, que nous avons cherché à faire ressortir le mieux possible. De grands laboratoires fédèrent souvent un grand nombre de champs de recherche, créant des dynamiques d'interactions internes aux mathématiques. Des laboratoires de taille plus modeste proposent un panel plus restreint de thématiques mais leurs travaux contribuent de façon significative à la production de l'ensemble de l'école française. Cette variété géographique de l'activité de recherche en mathématique n'altère cependant pas le constat suivant, bien réel sur l'ensemble du territoire : les interactions « internes » aux mathématiques, avec la mise en commun de problématiques, d'outils, de techniques et plus généralement de méthodes, sont en pleine effervescence, extrêmement fécondes et donc indispensables à leurs développements. Il y a là une tendance profonde, très enrichissante et observable dans tous les domaines.

On pourra regretter que ce mouvement incessant en interne ne soit pas toujours clairement identifié comme relevant du champ des interactions. Sur les campus français, là où coexistent souvent plusieurs laboratoires de physique ou biologie, s'affiche en règle générale un seul laboratoire de mathématiques, regroupant des équipes dont les thématiques sont parfois très éloignées, mais qui œuvrent à proposer un visage commun. Ce fonctionnement est propre à la discipline, la communauté mathématique s'y retrouve et le revendique, il serait sans doute souhaitable qu'il soit mieux compris et reconnu de l'extérieur, et que ces interactions soient mieux valorisées.

CHAPITRE 1

ALGÈBRE, ARITHMÉTIQUE ET GÉOMÉTRIE



UN FONCTIONNEMENT EN RÉSEAUX STRUCTURÉS

1.1 INTRODUCTION

Les domaines que nous abordons dans cette annexe – algèbre, géométrie algébrique, arithmétique et complexe, théorie des nombres – sont fortement interconnectés, et c'est surtout pour des raisons d'exposition que nous les traiterons séparément. Le lecteur verra d'ailleurs ces interconnections apparaître naturellement au fil du texte et telle ou telle thématique rangée sous un chapeau aurait très bien pu l'être dans une autre section.

Ces disciplines sont en effet, les unes pour les autres, des sources d'idées nouvelles pour aborder différents problèmes et des sources d'inspiration pour les développements futurs. En France, ce rapprochement est largement dû aux travaux de Henri Cartan, Alexandre Grothendieck, Jean-Pierre Serre, André Weil et de leurs successeurs. L'école française joue un rôle de premier plan en algèbre, en géométrie algébrique, arithmétique et complexe et en théorie des nombres. En témoignent les nombreux prix internationaux prestigieux, souvent obtenus pour des travaux couvrant l'ensemble de ces domaines : les médailles Fields attribuées à Jean-Pierre Serre (1954), Alexandre Grothendieck (1966), Pierre Deligne (1974), Laurent Lafforgue (2002) et Ngô Bao Chaû (2010) ou encore le prix Abel de Serre (2003, premier lauréat du prix), le prix Shaw de Claire Voisin (2017) ainsi que le *Breakthrough Prize* de Vincent Lafforgue (2019), sans compter les invitations récurrentes à donner des exposés lors des différentes éditions du congrès international des mathématiciens (ICM) qui se tient tous les quatre ans.

Une autre caractéristique de ces domaines est d'apparaître et de pouvoir être développés dans des contextes multiples et avec des points de vue différents. Algèbre, arithmétique et géométrie reviennent comme un leitmotiv dans les différents volumes de ce rapport : l'algèbre et la géométrie sont très présentes en mathématiques discrètes ; elles sont, avec l'arithmétique, à la base de nombreux développements en informatique théorique (de la cryptographie à la géométrie effective et computationnelle en passant par la théorie des modèles) ou en physique (théorie des cordes, renormalisation, etc.). L'étude de structures ou de marches aléatoires sur des objets de nature algébrique ou géométrique fait naturellement appel aux probabilités. On pourrait multiplier les exemples ; nous laisserons plutôt le lecteur découvrir toutes ces interfaces au fil des différents chapitres.

Toutes ces considérations motivent une mise en garde, valable pour la plupart des thématiques de ce volume, mais peut-être encore plus pertinente ici compte tenu de ce phénomène d'ubiquité. Il aurait été impossible de rendre compte ici de toutes les facettes des thématiques abordées et, même à l'échelle globale de l'ensemble des chapitres de ce volume, il est sans doute des aspects de l'algèbre, de l'arithmétique ou de la géométrie qui ne sont pas suffisamment traités. Mais nous avons dû faire des choix : dans ce texte, nous avons opté pour une certaine forme de cohérence globale des différents développements.

1.2 ALGÈBRE ET THÉORIE DE LIE

L'algèbre est à la fois une discipline en elle-même et un outil fondamental pour l'ensemble des mathématiques. Commençons par mentionner tout un ensemble d'occurrences et de liens actifs, classiques ou plus récents ; nous passerons ensuite à quelques développements plus ciblés.

L'algèbre apparaît par exemple souvent dès qu'il est question d'effectivité ou de calculabilité dans des domaines comme la géométrie effective et les techniques de type bases de Gröbner, l'analyse numérique, le contrôle etc. C'est l'une des raisons qui rendent nécessaire son enseignement à tous les niveaux.

De façon générale, les liens avec la physique sont importants. On sait le rôle joué par la théorie des représentations des groupes dès les débuts de la mécanique quantique, puis en physique des particules. Plus récemment, on peut mentionner l'utilisation d'outils de théorie des groupes en théorie de la renormalisation, avec, en théorie quantique des champs perturbative, les travaux de Alain Connes (médaille Fields 1982) et Dirk Kreimer sur les algèbres de Hopf dans les années 2000 ou encore avec le rôle central de la théorie des structures de régularité pour les équations différentielles stochastiques (Martin Hairer, médaille Fields 2014).

Au-delà de cet exemple des structures de régularité, on observe de plus en plus de développements à l'interface de l'algèbre et des probabilités. Citons, par exemple, les dynamiques aléatoires sur des objets algébriques comme les groupes ou encore, dans une autre direction, les liens étroits entre la combinatoire analytique et les phénomènes asymptotiques apparaissant dans l'énumération de structures discrètes. Pour une description plus précise de ces liens, nous renvoyons au Chapitre 5 sur les mathématiques discrètes.

Dans la perspective plus spécifique des thèmes abordés dans ce chapitre, on peut mentionner l'algèbre homologique, qui joue un rôle central et unificateur pour la géométrie, la topologie et l'arithmétique. Cette partie de l'algèbre, dont l'origine remonte à Riemann, Betti, Poincaré ou Hilbert, mais dont le développement systématique s'est produit dans les débuts de la deuxième moitié du XX^{e} siècle, est associée au calcul d'invariants pour les espaces topologiques. Elle est intimement liée à des notions comme celles de catégorie abélienne, de catégorie dérivée et de catégories supérieures. Les méthodes de l'algèbre homologique ont par exemple fait émerger un nouveau domaine en géométrie algébrique, la géométrie algébrique dérivée, qui trouve ses racines dans la théorie de l'intersection et des déformations, développée par Serre et Deligne, dans la théorie de Gromov-Witten et les travaux de Maxim Kontsevich (médaille Fields 1998), ou encore dans la théorie de l'homotopie développée par Grothendieck. L'algèbre homologique a également impulsé une dynamique nouvelle en géométrie énumérative, grâce notamment à ces mêmes invariants de Gromov-Witten. Il s'agit d'un thème étroitement lié à la physique théorique, au travers de la notion de symétrie miroir.

Signalons enfin, toujours à propos de géométrie, qu'une partie importante de la théorie des groupes, celle liée aux groupes de tresses et aux groupes quantiques, s'est développée en direction de la géométrie et de la topologie de basse dimension, qui font l'objet du Chapitre 3 de ce volume. Il s'agit d'un domaine très actif où la France est en pointe sur plusieurs thématiques.

Afin d'illustrer l'activité en algèbre, nous avons choisi de faire un focus plus technique sur deux thématiques où la tradition française est très présente avec les figures tutélaires de Élie Cartan, François Bruhat, Claude Chevalley, Jacques Tits (prix Abel 2008), etc. : d'une part, la théorie de Lie et, d'autre part, la théorie géométrique des représentations.

1.2.1 THÉORIE DE LIE

La théorie de Lie, qui s'intéresse classiquement aux groupes ayant une structure topologique, est souvent plus intéressante, aujourd'hui, lorsqu'elle est mélangée à d'autres problématiques. Un cas exemplaire sur lequel on s'attarde ici est l'étude des sous-groupes discrets des groupes de Lie, qui a connu un fort développement au cours des dix dernières années et se rattache à de nombreuses thématiques.

Le sujet prolonge l'étude des sous-groupes de covolume fini dans $SL_2(R)$ qui remonte aux débuts du XX^{e} siècle. La fin du XX^{e} et le début du XXI^{e} siècles ont vu les scientifiques s'intéresser aux sous-groupes discrets de $SL_2(C)$ avec des approches mêlant outils de théorie géométrique des groupes et probabilités ; d'autres groupes restent à explorer, c'est l'étape à venir. Au niveau technique, l'idée et l'enjeu clé sont de développer plusieurs points de vue pour aborder leur étude et d'interpeller aussi l'analyse (en particulier les équations aux dérivées partielles elliptiques), les systèmes dynamiques, la géométrie riemannienne, les groupes et variétés algébriques etc. Listons quelques mots-clés caractérisant ces différents points de vue : groupes Anosov ; point de vue Hitchin et fibrés de Higgs ; théorie de Teichmüller supérieure ; réseaux (par exemple $SL_n(Z)$ dans $SL_n(R)$), dynamique homogène, programme de Zimmer ; groupes approximatifs ; convexes divisibles ; structures géométriques, etc.

Au niveau de la prospective, le sujet abonde de conjectures phares et est riche de l'utilisation de techniques qui viennent « d'ailleurs » (probabilités, équations aux dérivées partielles, théorie géométrique des groupes, etc.).

1.2.2 THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES REPRÉSENTATIONS

La théorie des représentations a émergé des travaux de Frobenius à la fin du XIX^e siècle. Elle est née en lien avec l'étude des groupes finis et de leurs actions, mais a ensuite été appliquée avec succès aux groupes et algèbres de Lie dans les premières décennies du XX^e siècle (notamment grâce aux travaux de Hermann Weyl), puis aux groupes algébriques (travaux de Claude Chevalley dans les années 1950).

La terminologie « théorie géométrique des représentations » s'est imposée au tournant du XXI^e siècle mais le sujet est plus ancien. Il s'agit d'étudier par des méthodes géométriques les représentations de groupes usuels et quantiques, d'algèbres de Lie, de carquois, de diverses algèbres (de Hecke/de Cherednik/de Hecke affines, etc.).

Parmi les exemples classiques : la méthode des orbites de Kirillov (1961) qui lie les représentations unitaires d'un groupe de Lie aux orbites coadjointes, la théorie de Deligne-Lusztig (1976), qui construit des représentations des groupes finis de type de Lie en utilisant la cohomologie l-adique de variétés sur lesquelles ils agissent ; la correspondance de Springer (1977) qui étudie les représentations irréductibles du groupe de Weyl d'un groupe réductif, etc.

Autour des années 2000, plusieurs tendances se sont dessinées : l'utilisation systématique des catégories dérivées, le développement des méthodes de catégorification, l'étude de la cohomologie à coefficients entiers ou dans Z/pZ pour étudier les représentations en caractéristique positive, un rôle accru de la géométrie symplectique et de la géométrie énumérative.

Le sujet est riche de conjectures importantes (conjecture de Lusztig (1980), conjecture de Broué (1990)). Parmi les succès récents on peut d'ailleurs citer, outre les avancées liées aux tendances qui viennent d'être décrites, la preuve en 2001 par Mark David Haiman de la conjecture n ! (1993), liée aux représentations des groupes symétriques, mais aussi, dans une autre direction, le succès de l'application des méthodes de théorie géométrique des représentations dans le programme de Langlands (notamment les travaux de Ngô Bao Châu sur le Lemme fondamental et ceux de Vincent Lafforgue sur la construction des correspondances de Langlands). Depuis une dizaine d'années, des liens importants avec la géométrie symplectique intéressent beaucoup les géomètres algébristes : la théorie des représentations a permis de construire de nouvelles singularités symplectiques isolées à groupe fondamental local trivial, proposant ainsi une solution à un problème posé par Arnaud Beauville dans les années 2000.

L'un des enjeux pour la théorie sera de renforcer et d'approfondir ces interactions avec d'autres domaines. Par exemple, les liens entre la théorie des représentations et la théorie des nombres (grâce au programme de Langlands) ou la géométrie algébrique (grâce notamment à la géométrie algébrique dérivée) devraient être des sources fécondes d'avancées. Plusieurs mathématiciens français sont parmi les leaders du domaine, ils y ont joué et y jouent un rôle moteur.

1.3 THÉORIE DES NOMBRES ET GÉOMÉTRIE ARITHMÉTIQUE

La théorie des nombres, « reine des mathématiques », a la particularité de combiner de nombreux domaines : analyse réelle et complexe, algèbre, combinatoire, géométrie algébrique, systèmes dynamiques, théorie des représentations et maintenant logique mathématique. Par ailleurs, bien que considérée par certains comme une des disciplines mathématiques les plus « pures », la théorie des nombres a de nombreuses applications touchant notamment aux mathématiques discrètes et à l'algorithmique.

Pendant la seconde moitié du XX^e siècle, la théorie des nombres s'est fortement rapprochée de la géométrie algébrique (notamment à travers la théorie des schémas de Grothendieck). Ce rapprochement, initié par Weil, a été poursuivi par Serre ainsi que par plusieurs étudiants de Grothendieck contribuant ainsi à créer l'école française de géométrie arithmétique. De nos jours, la géométrie arithmétique se décline en plusieurs courants au gré de divers problèmes de théorie des nombres ou de géométrie algébrique. On pense notamment à la géométrie d'Arakelov, de Berkovich, ou encore la théorie de Hodge p-adique qui est une version arithmétique de la vénérable Théorie de Hodge en géométrie différentielle complexe. On discutera un peu plus loin d'une avancée récente, la conjecture de André-Oort (qui généralise celle de Manin-Mumford, déjà démontrée par Michel Raynaud), où les contributions françaises ont été majeures.

Un autre fait majeur a été la création du « programme de Langlands » proposé dans les années 1960 par le mathématicien canadien Robert Langlands (prix Abel 2018) ; ce programme, dont les racines remontent au *Jugendtraum* de Kronecker au XIX^e siècle, propose une vaste unification de la théorie des nombres, de l'analyse harmonique et de la théorie des représentations. Un des points culminants de ce programme a été la preuve en 1995 par Andrew Wiles de la conjecture de Fermat. Ici encore, l'école française est en pointe.

La théorie des nombres a également de nombreux liens avec des domaines plus applicatifs ; on citera notamment ceux avec les mathématiques discrètes, l'algorithmique et la cryptologie. Les connections vont dans les deux sens. D'une part, la théorie des nombres exporte vers ces domaines certaines de ses méthodes et de ses objets (constructions explicites de graphes expanseurs d'origine géométrique ou automorphes, courbes elliptiques et autres variétés abéliennes en cryptologie, méthodes de crible). D'autre part, elle importe depuis ces domaines de nombreuses méthodes (techniques de combinatoire, automates, théorie des graphes, théorie des modèles). À la croisée des chemins, on rencontre la théorie algorithmique des nombres, un outil expérimental et prédictif de plus en plus fondamental et en pleine expansion en raison de l'explosion de la puissance des ordinateurs. On citera notamment un fleuron national : le système de calcul formel PARI-GP, créé par Henri Cohen et développé par ses successeurs.

Les prix prestigieux et les invitations nombreuses et récurrentes aux diverses éditions du Congrès international des mathématiciens témoignent de la grande vitalité de l'école française de théorie des nombres ; nous discutons plus en détails de quelques exemples frappants.

1.3.1 PROGRAMME DE LANGLANDS

Ce programme est constitué d'un réseau cohérent et extrêmement précis de prédictions, de conjectures et quelquefois de théorèmes, visant à décrire les représentations des groupes de Galois (objets éminemment arithmétiques) à l'aide de représentations de dimension infinie : les représentations automorphes (provenant de l'analyse harmonique sur les groupes linéaires). Les travaux monumentaux de Wiles sur la conjecture de Fermat en font partie mais le programme lui-même est beaucoup plus vaste. En France, le sujet a connu un développement explosif au début années 80 quand une génération de jeunes mathématiciens français a entrepris d'étudier les différents aspects du programme.

Outre l'aspect arithmétique, le programme de Langlands se décline maintenant dans plusieurs directions connexes où la réputation française n'est pas à démontrer : programme de Langlands local, programme de Langlands géométrique (fortement lié aux développements modernes de la géométrie algébrique et de la physique mathématique) ou encore programme de Langlands p-adique. Pour ce dernier aspect, la présence française est due originellement aux travaux précurseurs de Jean-Marc Fontaine qui permirent de développer la théorie de Hodge p-adique (qui n'était pas intégrée au programme de Langlands) et aux travaux de ses élèves et de ses collaborateurs. Notons, pour boucler la boucle, que ce dernier aspect joue un rôle fondamental dans l'étude des conjectures de modularité de Fontaine-Mazur (une vaste généralisation des travaux de Wiles sur la conjecture de Fermat) ; on pense notamment à la preuve, par Chandrashekhar Khare et Jean-Pierre Wintenberger (récompensés par le *Cole Prize*), des conjectures de Serre (qui remontent aux années 70) et plus récemment aux travaux de Vincent Pilloni (Prix Fermat 2021).

1.3.2 GÉOMÉTRIE DIOPHANTIENNE

La géométrie diophantienne est consacrée à l'étude des structures entières ou rationnelles (par exemple, les points entiers ou rationnels) des variétés algébriques générales (l'équation de Fermat qui a été résolue par Wiles en suivant le programme de Langlands est de ce point de vue très particulière). Son nom remonte au mathématicien de l'antiquité grecque Diophante qui étudia les solutions entières de certaines équations polynomiales. Elle a évidemment considérablement évolué au fil des siècles et notamment ces dernières décennies, entres autres, grâce aux travaux de Michel Raynaud, Lucien Szpiro ou Christophe Soulé et de leurs élèves ; à nouveau l'école française joue un rôle moteur dans ce domaine.

On peut, par exemple, citer les conjectures de Batyrev-Manin-Tschinkel dont le but est l'étude quantitative de la répartition (notamment le comptage) des points rationnels de grande hauteur sur des variétés dites de Fano. Dans ce domaine, se combinent des méthodes diverses et variées, toutes aussi délicates les unes que les autres, qu'elles soient de nature géométrique (géométrie d'Arakelov, géométrie tropicale, torseurs universels) ou issues de la théorie analytique des nombres (méthode du cercle, du crible, fonctions multiplicatives, etc.).

Un autre exemple spectaculaire est la conjecture de André-Oort (d'après le français Yves André et le hollandais Frans Oort) : son objectif est de décrire les sous-variétés dites « spéciales » d'une classe fondamentale de variétés algébriques, dites « de Shimura », qui jouent un rôle considérable dans le programme de Langlands. Cette conjecture vient d'être résolue par une équipe anglo-canadienne mais cela n'aurait pas été possible sans les apports multiples d'une équipe de chercheurs français qui, entre autres, a obtenu une preuve conditionnelle de cette conjecture (*i.e.* en admettant l'hypothèse de Riemann, issue de la théorie analytique des nombres). Outre des méthodes de transcendance fonctionnelle (théorème de type Ax-Lindemann), les deux preuves combinent une variété impressionnante de techniques issues de domaines variés, comme la géométrie diophantienne (géométrie d'Arakelov, méthodes de comptage de points), la géométrie complexe (théorie de Hodge), la théorie ergodique (théorie de Ratner) et, ce qui est plus surprenant, la logique mathématique (avec la théorie des modèles et notamment la notion d'o-minimalité).

1.4 GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE ET COMPLEXE

L'école française en géométrie algébrique et complexe a joué durant tout le XX^e^ siècle un rôle fondamental dans le développement de la géométrie algébrique moderne. Elle a notamment été à l'origine d'outils essentiels sans lesquels la géométrie algébrique au niveau mondial n'aurait pu produire autant de résultats frappants. C'est le cas en particulier de la théorie des faisceaux et de leur cohomologie dans les travaux de Serre, des faisceaux algébriques cohérents (FAC), de la géométrie algébrique et géométrie analytique (GAGA) ou du langage des schémas dans les Éléments de géométrie algébrique (EGA) de Grothendieck. Dans leur sillage, c'est toute une école qui a produit et continue de produire des résultats exceptionnels, renouvelant ainsi la discipline et attirant de nouvelles générations de jeunes collègues.

Mettons à présent en relief quelques thématiques de recherche très actives, sans aucune prétention à l'exhaustivité.

1.4.1 FIBRÉS VECTORIELS

Durant la période 1970-2000, l'étude des propriétés des fibrés vectoriels sur les courbes et la classification des courbes gauches a connu un grand essor. Citons les travaux sur les théorèmes d'annulation pour les fibrés amples qui généralisent au rang supérieur les travaux de Kodaira ou encore ceux sur les espaces de modules des fibrés vectoriels sur le plan projectif où les chercheurs et les chercheuses français ont joué un rôle moteur au cours des années 80 et 90. Cette théorie a mené à la formulation du principe dit de « dualité étrange » sur les surfaces projectives lisses ; elle trouve son expression dans la célèbre formule de Verlinde, formule motivée à l'origine par des considérations de physique théorique et qui fait apparaître des liens étonnants entre la théorie conforme des champs et l'étude de fibrés en droite sur certaines variétés projectives. Ces résultats ont influencé, par la suite, les travaux de nombreux mathématiciens français, en particulier sur les espaces des modules des fibrés vectoriels, en théorie de Hodge et en théorie des catégories.

1.4.2 MÉTHODES ANALYTIQUES EN GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Un autre thème majeur est l'application des méthodes analytiques à la géométrie algébrique et complexe, incluant la théorie de Hodge ou la géométrie symplectique. Elles ouvrent en particulier des perspectives nouvelles en géométrie birationnelle notamment en lien avec le programme des modèles minimaux développé par Shigefumi Mori (Japon, médaille Fields 1990). Rappelons que l'objectif de ce programme est de classifier les variétés algébriques, généralisant à la dimension supérieure la classification des surfaces algébriques, menée par l'école italienne au XX^e^ siècle. Il n'est toujours pas achevé en toute dimension et connaît des développements importants - citons par exemple les travaux de Caucher Birkar (Iran et Angleterre, médaille Fields 2018). Il est également à l'origine de développements féconds dans l'étude des groupes de Cremona, un sujet en plein essor, à l'interface de la dynamique complexe et de la géométrie algébrique. Un résultat marquant obtenu récemment, entre 2013 et 2016, par des membres de l'école française : le groupe de Cremona du plan n'est pas simple.

Une autre direction plus classique mais toujours aussi active se situe dans le prolongement de l'étude des courbes dans les espaces projectifs, notamment la célèbre conjecture de Green énoncée en 1984. Ces dernières années, les recherches se concentrent sur les questions de rationalité des variétés algébriques ou sur l'étude des groupes et des anneaux de Chow, objets fondamentaux en géométrie algébrique développés notamment dans les travaux sur la conjecture de Beauville et Voisin pour les variétés hyperkählériennes. S'y mêlent outils et techniques issus de la géométrie symplectique et de la géométrie algébrique. Les premiers exemples de ces variétés hyperkählériennes ont été construits et étudiés dans les années 80-90 par l'école française, puis étendus aux variétés singulières.

Les propriétés topologiques et géométriques des variétés algébriques sont appréhendées par le biais de l'algèbre homologique et de la théorie de Hodge, qui irriguent ce domaine dans des directions variées. Un des résultats les plus remarquables, dû à Voisin, est la construction de variétés kählériennes résolvant le problème de Kodaira : contrairement au cas de la dimension deux, il existe des variétés kählériennes de dimension 4 et plus qui ne peuvent être déformées en des variétés projectives.

1.4.3 THÉORIE DES SINGULARITÉS

Par ailleurs, surtout depuis les années cinquante, la recherche française s'est fortement impliquée en théorie des singularités et y joue un rôle moteur. Cette thématique est à la croisée de nombreux champs mathématiques tels que la géométrie algébrique, la géométrie complexe, la topologie et la géométrie des variétés, la théorie des nombres, la géométrie non-archimédienne, la théorie des modèles, etc. Pour ce qui est de la géométrie algébrique, bien que cette dernière s'intéresse avant tout aux objets lisses, des singularités apparaissent naturellement : en effet, des informations géométriques significatives de certaines variétés lisses sont mises en lumière en étudiant leurs dégénérescences possibles vers des objets singuliers. Ainsi, le programme des modèles minimaux en dimension supérieure s'est développé en permettant aux variétés d'être singulières. Parmi les résultats les plus marquants en théorie des singularités, on peut citer les développements de la théorie de stratification initiés par René Thom (médaille Fields 1958) et Mather dans les années 50, la démonstration en 1961 par Heisuke Hironaka (Japon, médaille Fields 1970) de l'existence d'une résolution des singularités en caractéristique nulle et plus récemment le développement de la théorie d'intégration motivique notamment par l'école française dans les années 90.

1.4.4 GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE RÉELLE

La géométrie algébrique réelle interagit aussi avec l'informatique par le biais de la géométrie algébrique effective. Cette thématique, en plein essor dans les années 80, s'est focalisée dans un premier temps autour de la décomposition d'objets algébriques et du calcul effectif avec les bases de Gröbner. Elle vient en support à l'intuition pour démontrer certains résultats ou trouver un contre-exemple. Elle permet aussi de faire un lien entre la géométrie algébrique et le monde de l'industrie, notamment la robotique, au travers de l'étude des systèmes d'équations algébriques 0-dimensionnels. Ces travaux irriguent en retour le domaine de la géométrie algébrique réelle, avec par exemple le comptage des composantes connexes des variétés algébriques réelles. L'école française a eu un rôle moteur dans son développement mais sa communauté s'est fortement rétrécie et rencontre des difficultés à attirer des jeunes scientifiques, malgré la richesse du sujet et son développement au niveau international.

Mentionnons aussi une direction de recherche originale et récente, celle de la géométrie algébrique réelle aléatoire. Elle concerne l'étude des nombres de Betti d'hypersurfaces algébriques réelles aléatoires ou celle des composantes connexes réelles de surfaces algébriques aléatoires. Ce domaine est fortement connecté à l'analyse, aux probabilités et aux systèmes dynamiques.

1.5 INTERACTIONS ENTRE LES THÉMATIQUES, STRUCTURES ET INTERNATIONALISATION

Au niveau des structures, la recherche dans ces trois thématiques – algèbre et théorie de Lie, théorie des nombres et géométrie algébrique et complexe – est coordonnée à travers plusieurs groupements de recherche (GDR) : le GDR Théorie de Lie géométrique et algébrique (TLAG), le GDR Géométrie algébrique et géométrie complexe (GAGC), le GDR Topologie algébrique et applications (TAA), le GDR Tresses et le GDR Structuration de la théorie de nombres (STN). Mentionnons également le GDR Singularités et applications dont l'un des thèmes principaux est la théorie des singularités en géométrie algébrique mais qui couvre également les aspects plus topologiques ou analytiques.

Dans les sections précédentes, nous avons mentionné l'existence de nombreux centres d'intérêts communs et de fructueuses interactions entre ces thématiques. En organisant de nombreuses activités, les GDR jouent un rôle important dans la poursuite de telles interactions. Ils en initient aussi des nouvelles, autour de sujets d'intérêt commun. Par exemple, de nombreux aspects du programme de Langlands intéressent deux ou trois des thématiques. C'est également le cas pour des interactions plus inattendues, avec des thématiques apparemment éloignées : par exemple, entre théorie des nombres et mathématiques discrètes, géométrie birationnelle et dynamique ou géométrie algébrique réelle et probabilités.

1.6 POSITIONNEMENT INTERNATIONAL, DIFFICULTÉS ET MENACES

Depuis plusieurs décennies, l'école mathématique française est à la pointe de la recherche mondiale en algèbre, en arithmétique et en géométrie algébrique et complexe. Bien que la communauté de chercheurs relevant de ces domaines soit relativement restreinte en nombre, de nombreux prix prestigieux, dont plusieurs médailles Fields, ont été obtenus dans ces domaines, ce qui est particulièrement réjouissant.

Néanmoins, au cours des multiples entretiens que les membres du comité ont mené avec les spécialistes de ces domaines, plusieurs motifs d'inquiétude ont été soulignés : en particulier, le faible nombre de postes mis au concours et la faible attractivité des débuts de carrières en comparaison notamment avec les pays anglo-saxons. Ont aussi été évoquées lors de ces échanges, les lacunes croissantes de la formation mathématique au lycée, lacunes qui, à terme, menacent la formation d'une nouvelle génération de talents qui puisse prendre la relève. Ce risque est d'autant plus fort que les thématiques analysées ici sont parmi les plus abstraites du spectre des mathématiques. L'ampleur des vides à combler pour continuer de viser le meilleur niveau international ne cesse de s'accroître et va devenir rédhibitoire. Les effectifs des masters dans ces disciplines fondamentales sont très faibles. L'apport d'étudiants étrangers, notamment chinois, extrêmement bien formés et attirés par l'excellence de l'école mathématique française, peut permettre de résister un temps, mais il faut aussi tenir compte des politiques d'incitation au retour de ces pays, qui offrent à leurs meilleurs jeunes talents des conditions extrêmement compétitives au niveau international.

Un point positif cependant est l'existence d'un (petit) nombre de postes de chercheurs au CNRS et (pour les enseignantes-chercheuses et enseignants-chercheurs) de périodes de délégations CNRS. Cette politique, qu'il convient de poursuivre, voire d'amplifier, contribue à attirer et à retenir en France des scientifiques particulièrement brillants, en leur permettant de développer leur activité de recherche au plus haut niveau. On peut cependant regretter de voir certains d'entre eux, après avoir obtenu des résultats remarquables, partir à l'étranger où les conditions offertes sont parfois bien meilleures qu'en France ; le très faible nombre de postes de directeurs de recherche CNRS ne permet pas d'envisager raisonnablement une carrière dans cette voie.

CHAPITRE 2

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, ANALYSE NUMÉRIQUE, OPTIMISATION ET CALCUL SCIENTIFIQUE

2.1 INTRODUCTION

2.1.1 UNE PRÉSENTATION DE LA THÉMATIQUE

Les équations aux dérivées partielles (EDP), l'analyse numérique, l'optimisation et le calcul scientifique sont souvent (mais pas toujours) regroupés dans les mêmes équipes des laboratoires de mathématiques, témoignant ainsi de la filiation commune qu'ils entretiennent vis-à-vis de Laurent Schwartz et Jacques-Louis Lions en France. Présentes dans essentiellement tous les laboratoires du territoire national, ces thématiques ont vécu une période d'expansion importante entre les années 70 et 90. Elles ont contribué au développement d'interactions entre université et industrie, ainsi qu'à des interactions fécondes avec les autres disciplines, que ce soit, de façon traditionnelle, avec la physique, la mécanique, la chimie, ou les sciences de l'ingénieur, ou avec la biologie, la médecine, l'économie et les sciences sociales ; enfin, de plus en plus en souvent, ces interactions se nourrissent également des statistiques et des probabilités.

Le domaine des EDP trouve son sujet d'étude dans les autres disciplines, en s'attachant à des équations issues de la modélisation de phénomènes physiques, biologiques, des sciences de l'ingénieur ou même des sciences économiques. Il est intimement lié aux questions de modélisation (pour lesquelles le langage mathématique est d'une efficacité redoutable), de simulation (grâce à l'outil informatique) et d'optimisation ou de contrôle pour rétroagir sur les systèmes étudiés. Le recours aux modèles mathématiques permet de dégager les traits saillants des phénomènes physiques et de les classifier. Il n'est pas rare que des phénomènes de nature différente soient modélisés par des équations du même type sur le plan mathématique. On peut alors avoir recours à l'expérience accumulée dans l'analyse d'un des phénomènes pour étudier l'autre. Ce sont également les propriétés communes à ces équations (elliptiques, hyperboliques, dispersives, paraboliques, etc.) ainsi que les méthodes utilisées pour les résoudre qui structurent le domaine : les chercheurs et les chercheuses en EDP s'identifient entre eux par les équations qu'ils étudient. Du point de vue de l'organisation interne des mathématiques, il est intéressant de voir que c'est un objet partiellement extérieur aux mathématiques, l'équation elle-même, issue de la modélisation de problèmes pratiques, qui vient structurer une communauté. D'autres domaines des mathématiques s'organisent autour de grandes conjectures ; les EDP, elles, se structurent autour de leur objet d'étude.

L'objectif ne va plus être seulement la détermination des propriétés des solutions de ces équations, ou leur résolution, mais également l'analyse des multiples problèmes mathématiques qui y sont associés, plaçant les EDP dans un dialogue avec les autres domaines des mathématiques. On peut dresser un parallèle avec le calcul différentiel, né du travail de Newton pour calculer des trajectoires des planètes et devenu un domaine mathématique irrigant l'ensemble des mathématiques. Il en est de même avec les EDP qui naissent de problématiques issues des autres sciences, et qui, en même temps, sont en lien étroit avec l'analyse, l'analyse harmonique, l'analyse spectrale, ainsi que la géométrie, non seulement parce que ces thématiques sont importantes pour la compréhension des objets impliqués par l'analyse des EDP, mais aussi parce les EDP leur apportent de nouveaux sujets et de nouvelles méthodes pour résoudre leurs propres questions. Par les problématiques qu'elles apportent, les EDP font progresser la connaissance dans ces disciplines, tout comme elles y ont recours.

On trouve donc dans cette communauté des EDP un spectre de compétences très large, allant de l'analyse théorique au développement de codes, en passant par l'analyse numérique, la modélisation et l'optimisation, la même personne contribuant parfois autant au développement de la théorie qu'à son utilisation au plus près des applications.

2.1.2 LA FÉCONDITÉ DE L'HÉRITAGE DE JACQUES-LOUIS LIONS

L'essor des équations aux dérivées partielles dans la deuxième moitié du XX^{e} siècle en France s'inscrit dans l'héritage de Schwartz et J.-L. Lions, ce dernier ayant soutenu sa thèse sous la direction du premier. Pour parler des membres fondateurs de l'école des EDP françaises, il faut ajouter à Schwartz, Gustave Choquet, dont les élèves furent Jean-Michel Bony et Haïm Brézis notamment. Une bonne partie des mathématiciennes et des mathématiciens travaillant en EDP aujourd'hui en France ont été formés par ces deux derniers - citons notamment Pierre-Louis Lions, médaille Fields en 1994. L'autre partie de la communauté des EDP remonte à Schwartz et ses élèves, dont J.-L. Lions puis, à la génération suivante, Louis Boutet de Monvel, Charles Goulaouic et Bernard Malgrange ; notons que ces filiations irriguent également l'analyse et la géométrie. On trouvera une illustration parlante de cette courte description dans l'infographie[2] réalisée par le CNRS et présentant la généalogie des conférenciers liés à la France lors de l'*International Congress of Mathematics* de 2014. La forte présence des EDP françaises à ce congrès montre également la reconnaissance internationale dont elles jouissent. Un autre aspect intéressant est son taux de féminisation, un peu moins faible que dans d'autres domaines des mathématiques et avec des personnalités scientifiques de tout premier plan.

À la fin des années 50, apparut avec J.-L. Lions une certaine manière de faire des mathématiques, avec un souci de l'applicabilité. J.-L. Lions a l'originalité d'adopter cette optique déjà présente dans le monde anglo-saxon, en la mariant à l'exigence de l'approche théorique à la française, et qui conduira aux développements exceptionnels de l'analyse numérique des EDP dans les années 70 et 80. Dans sa filiation scientifique, on retrouve mêlés théoriciens, numériciens et développeurs de codes. L'*International congress of industrial and applied mathematics* (Iciam) illustre la place des mathématiciens français au sein des mathématiques appliquées : citons les prix Iciam de Claude Bardos, Jean-Michel Coron et Yvon Maday, prix décernés sous l'égide de l'*International council for industrial and applied mathematics* dont la présidence fut assurée entre 2019 et 2021 par Maria Esteban. Ces exemples montrent la force des mathématiques appliquées françaises. En particulier, l'étude théorique de la méthode des éléments finis se place naturellement dans le cadre variationnel utilisé pour l'étude de solutions faibles d'équations aux dérivées partielles. Des contributions fondamentales dans ce domaine ont notamment été réalisées par Philippe Ciarlet, Pierre-Arnaud Raviart ou Jean-Claude Nédélec qui ont donné leurs noms à plusieurs éléments finis devenus classiques. Cette filiation a donné lieu à une spécificité française de l'analyse numérique : celle-ci est très axée sur la discrétisation d'EDP et la recherche cruciale du bon cadre fonctionnel pour l'analyse et la discrétisation. Cette approche a été très féconde et a une très grande répercussion sur l'analyse numérique au niveau international en définissant une nouvelle approche et un nouveau langage issu de l'analyse fonctionnelle pour des problèmes pratiques. Par contre, d'autres domaines importants de l'analyse numérique classique comme la théorie de l'approximation, la résolution numérique de grands systèmes linéaires ou les méthodes numériques pour les équations différentielles ordinaires ont été moins étudiées en France à cette époque. L'importance du contrôle et de l'optimisation n'a pas échappé non plus à J.-L. Lions puisque c'est lui qui a principalement importé les techniques du contrôle optimal de Pontryagine des équations différentielles ordinaires vers les EDP. L'influence de J.-L. Lions culmine dans la rédaction, conjointement avec Robert Dautray et de très nombreux collaborateurs, de l'encyclopédie « *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques* », en 6 volumes, qui avait vocation à être une nouvelle version du célèbre livre de Courant et Hilbert des années 1920.

Notons qu'à côté de l'influence de J. L. Lions, d'autres écoles de mathématiques appliquées sont approuvées en France, notamment à Grenoble où se sont développés des liens intimes entre mathématiques appliquées et informatique.

2.2 DES EDP EN SYNERGIE AVEC L'ANALYSE AU SENS LARGE

Le monde des EDP est aujourd'hui foisonnant et présente de nombreuses facettes. Nous essayons d'en dégager quelques aspects importants dans les paragraphes qui suivent, en mettant en valeur les interactions qu'ils entretiennent entre eux ainsi qu'avec d'autres domaines des mathématiques.

2.2.1 UN ALLER ET RETOUR AVEC LA GÉOMÉTRIE

Le calcul des variations est lié à la recherche de fonctions minimisant des fonctionnelles. On peut penser à des fonctionnelles issues de la physique mais également de la géométrie, comme par exemple la recherche de métrique riemannienne à courbure scalaire constante, le problème de Yamabe, résolu en 1984 par Thierry Aubin, Richard Schroen et Robert Trüdinger par des techniques de géométrie certes, mais également d'analyse fonctionnelle et d'EDP. Le calcul des variations en

2. https://lejournal.cnrs.fr/infographies/france-terre-de-mathematiques.

lien avec la géométrie est encore très présent en France et montre la fécondité de l'interface entre les EDP et la géométrie. On notera d'ailleurs que dans la résolution de la conjecture de Poincaré, un des seuls problèmes du millénaire[3] qui ait été résolu, Gregory Perelman fait lui aussi intervenir des EDP, la construction d'objets géométriques sur des variétés n'étant pas sans lien avec les EDP. Celles-ci interagissent également avec la théorie géométrique de la mesure et le transport optimal, thématique importante de Cédric Villani (médaille Fields 2010). Il faut noter que le développement du calcul des variations et des disciplines connexes s'est fait en France en forte relation avec l'école italienne dont c'est un des domaines d'excellence. Il faut également mentionner P.-L. Lions, pour ses contributions à la théorie des solutions de viscosité ainsi qu'à celle des jeux à champ moyen. Ce dernier domaine s'applique notamment aux sciences économiques et connaît un grand essor actuellement, en lien étroit avec les probabilités. Ce mouvement vers les applications se retrouve également avec le développement de méthodes numériques de transport optimal.

Le domaine des EDP dispersives est également en forte interaction avec la géométrie. Ce domaine d'expertise française s'intéresse aux questions liées au comportement en temps grand de solutions de ces EDP, ou bien à l'analyse du profil, au moment de l'explosion, de solutions vivant en temps court. La recherche est ici fortement marquée par les interactions avec l'école des EDP américaine issue de l'analyse harmonique et d'Élias Stein. Ce domaine d'excellence des EDP françaises se développe aujourd'hui sur les réseaux et les graphes, et s'est également ouvert vers les systèmes dynamiques et les équations hamiltoniennes, non sans lien avec les équations de la mécanique quantique.

2.2.2 DES EDP INSPIRÉES PAR LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE ET LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

Fortement influencée par la mécanique quantique, l'analyse microlocale apparaît en France dans les années 70, autour de Goulaouic dont le séminaire à l'École Polytechnique eut une influence forte sur une génération de mathématiciens, tout comme Bernard Helffer et Johannes Sjöstrand après lui. Initiée par Lars Hörmander en Suède, Peter Lax aux États-Unis et Viktor Maslov en Russie, cette approche des équations aux dérivées partielles est également très géométrique. Elle se cantonne tout d'abord à la sphère théorique, avec un intérêt marqué pour la physique mathématique, notamment avec l'approche semiclassique. Mais aujourd'hui, les mathématiciens et les mathématiciennes issus de cette école ont irrigué la sphère des applications, comme, par exemple, le contrôle ou l'analyse des problèmes inverses. Il faut noter que cette communauté a bénéficié de l'arrivée de collègues venant de l'ex-URSS dans les années 90, profitant ainsi de l'activité de très haut niveau de l'école russe d'analyse microlocale. Notons également que, par son approche asymptotique, l'analyse semiclassique interagit également avec l'analyse numérique et trouve des applications en physique ou en chimie quantique.

2.2.3 ANALYSE ASYMPTOTIQUE, CONVERGENCE DE MODÈLES

L'inspiration par la physique, que nous avons soulignée au paragraphe précédent, est évidemment très présente dans le domaine des équations liées aux écoulements fluides. La dynamique des fluides peut être abordée de plusieurs manières, de façon microscopique en envisageant la cinétique des particules ou de manière macroscopique, par des équations comme celles de Navier-Stokes, rendant compte des phénomènes à une échelle plus large. Ces problèmes théoriques très profonds sont issus de la modélisation, en physique statistique et en mécanique des fluides, bien sûr, mais également dans les mathématiques qui se sont développées en interactions avec la biologie, dont nous parlerons plus en détail plus bas. Outre l'analyse des modèles proprement dits, se pose la question de la dérivation du modèle macroscopique depuis le modèle microscopique. Cette question relève de l'analyse asymptotique : que se passe-t-il lorsque le nombre de particules tend vers l'infini, peut-on démontrer que les limites des quantités physiques pertinentes sont solutions des équations du modèle macroscopique ? Quoique purement mathématique, la réponse à ce questionnement joue un rôle dans la validation des modèles en étayant leur pertinence. Parmi les équations entrant dans ce cadre de travail, on trouve les équations cinétiques, celles de Hamilton Jacobi, ainsi que toutes les équations de la mécanique des fluides, comme celles de Navier-Stokes dont l'existence de solutions en tout temps est l'objet d'un des problèmes du millénaire ; on voit ici surgir la problématique de la validation des modèles tant une équation décrivant les écoulements liquides dont les solutions explosent en temps fini peut sembler peu adéquate. Notons que ce domaine voit lui aussi une sorte de continuum entre questions théoriques et questions plus appliquées de simulation ou de modélisation que nous reprendrons au paragraphe 2.3.1. Du point de

3. Les problèmes du millénaire consistent en sept questions choisies en 2000 par l'institut de mathématiques Clay qui offre un million de dollars pour la résolution de chacune d'entre elles.

vue théorique, il mobilise un vaste champ de compétence, notamment l'analyse harmonique, dès qu'il s'agit d'étudier des phénomènes haute fréquence.

2.2.4 DES EDP EN INTERACTION AVEC L'ANALYSE HARMONIQUE

L'analyse de Fourier et l'analyse harmonique sont très présentes dans l'analyse des EDP, notamment dès qu'il s'agit d'étudier des comportements haute fréquence. C'est le cas en particulier en contrôle. Ce domaine est exemplaire des EDP par le fait qu'il rassemble des théoriciens utilisant des méthodes très variées, par exemple des méthodes microlocales très abstraites, mais aussi des numériciens, tout en débordant largement en-dehors du champ des EDP, avec par exemple le contrôle des équations différentielles ordinaires ou l'automatique. Les techniques utilisées sont multiples, ce qui rend difficile le choix du paragraphe où aborder cette thématique. Les méthodes d'analyse haute fréquence utilisées pour contrôler une partie des solutions peuvent justifier la présence du contrôle dans ce paragraphe consacré aux liens avec l'analyse harmonique. Nous aurions également pu le rattacher à la géométrie, ou le citer comme un domaine en interaction avec la mécanique. Le choix de le mettre ici est lié également à la proximité des méthodes utilisées en contrôle avec celles de l'analyse des problèmes inverses, lesquelles, par l'immense champ d'applications qu'elles ont en imagerie, entretiennent également des liens avec l'analyse de Fourier. Il s'agit ici d'un domaine très important des EDP, quantitativement par le nombre de chercheurs et de chercheuses qui s'y intéressent, mais également par la pertinence des applications qui en découlent. Comme pour l'analyse semiclassique, c'est l'exemple type d'un domaine que l'on ne peut séparer entre mathématiques dites appliquées et mathématiques dites fondamentales, les mêmes personnes pouvant s'intéresser à la théorie comme aux applications, à l'image d'Yves Meyer (prix Abel 2017).

L'analyse harmonique est intrinsèquement un domaine en interaction comme l'a montré le formidable essor de l'analyse en ondelettes qui a irrigué des thématiques comme la théorie du signal, l'imagerie, les statistiques, le *compressed sensing* et l'analyse multifractale. La théorie des ondelettes a démarré en France, autour de Meyer puis Stéphane Mallat. En tant que domaine, les ondelettes sont un peu victimes de leur succès et se sont dissoutes dans leur domaine d'application, notamment le traitement d'image, où elles sont devenues un outil classique et utilisé couramment dans les applications. Notons qu'elles interviennent dans des sujets nouveaux comme l'apprentissage machine et l'intelligence artificielle.

L'analyse multifractale et la théorie des fractales sont aussi très liées à l'analyse harmonique et aux ondelettes. Elles se sont développées de façon pluridisciplinaire et ont rencontré de grands succès dans l'analyse de la turbulence et de divers signaux. De nos jours, l'analyse multifractale va de pair avec l'apprentissage pour construire des outils de classification et des techniques de calage de paramètres de modélisation.

2.2.5 INTERACTIONS AVEC LES PROBABILITÉS ET AVEC LES SYSTÈMES DYNAMIQUES

C'est une interaction classique et ancienne qui se développe régulièrement (voir le Chapitre 6). On peut penser aux équations différentielles stochastiques en mathématiques financières ou bien aux équations aux dérivées partielles stochastiques avec, par exemple, des forces ou des coefficients aléatoires. Néanmoins, ces interactions ne sont pas épuisées et c'est là sans doute que se trouve une partie du futur des EDP, dans la mesure où ces thématiques prennent une place grandissante dans les activités des chercheurs et des chercheuses. Parmi les questions délicates qui se résoudront peut-être de cette manière, on trouvera les questions relatives à la turbulence. Le deuxième grand champ d'interactions, sans doute un peu plus ancien que le précédent mais sans doute encore très prometteur est celui des interactions des EDP avec les systèmes dynamiques, autour de questions reliées à l'analyse en grand temps de solutions hamiltoniennes, aux systèmes chaotiques, à la théorie spectrale haute fréquence et à la théorie KAM[4].

2.2.6 DES EDP AUX INTERACTIONS AVEC LES AUTRES SCIENCES

Avec le développement de la théorie et de la puissance de calcul des ordinateurs, les modèles simulés deviennent plus complexes. Ils font intervenir des EDP couplées mais aussi des modèles probabilistes, de la quantification d'incertitude, de l'apprentissage machine, de l'analyse de données, des couplages entre modèles déterministes et analyse de données (comme dans le cas de modèles d'aide à la décision pour la médecine). Pour cette raison, de nombreux domaines des mathématiques doivent interagir avec le calcul scientifique au-delà d'interactions plus anciennes comme

4. Du nom des mathématiciens Andreï Kolmogorov, Vladimir Arnold et Jürgen Moser.

le contrôle, mentionné ci-dessus, l'optimisation ou les problèmes inverses. Les probabilités et les statistiques en particulier deviennent des partenaires essentiels, mais il existe aussi des besoins en compression de données, en cryptographie et dans d'autres domaines où les mathématiciens peuvent apporter des contributions importantes.

Outre les applications classiques des mathématiques en physique, en mécanique et en ingénierie qui impliquent de plus en plus de mathématiciens, les EDP interagissent de façon croissante avec les autres disciplines scientifiques. Nous détaillons ci-dessous quelques thématiques, à fort enjeu pour la société, dans lesquelles les EDP jouent un rôle central.

2.2.7 LES MATHÉMATIQUES DU VIVANT

L'interaction entre les mathématiques et la biologie s'est beaucoup développée depuis les années 80. Elle a d'abord présenté deux interfaces, l'une avec les EDP autour des équations de diffusion, et l'autre avec les statistiques, issues des grands projets autour du génome. On citera Benoît Perthame comme initiateur de la première, et, pour la seconde, Bernard Prum ainsi que les nombreux médecins avec lesquels il a collaboré. Aujourd'hui, les deux approches, statistiques et analytiques, sont nettement moins séparées et contribuent au développement de nouvelles mathématiques. En effet, une spécificité des phénomènes du vivant est que la mise en équation fait intervenir des paramètres qui ne sont pas toujours connus et qui peuvent même dépendre de chaque individu, s'agissant de constantes physiologiques. L'utilisation de la description en termes d'équations aux dérivées partielles doit alors être mariée avec les statistiques pour estimer ces constantes à partir de données cliniques ou d'expérience. Cette approche conjointe EDP et statistique est une des directions prometteuses de la recherche en EDP.

2.2.8 LES SCIENCES DE LA PLANÈTE TERRE

Le domaine des sciences de la planète terre regroupe la météorologie, la climatologie et l'ensemble des géosciences. Dans ce domaine, en pleine expansion, on voit, là-aussi, la modélisation mathématique conduire à des équations aux dérivées partielles dont l'étude emploie analyse théorique, analyse numérique et approche aléatoire. La notion d'incertitude y est très présente et les problèmes inverses sont essentiels pour accéder à la connaissance de paramètres physiques non mesurables autrement, comme par exemple les propriétés mécaniques du sous-sol. Au cœur de ces interactions, la mécanique des fluides prend une grande place, notamment celle des équations de Navier-Stokes qui sont le sujet de l'un des problèmes du millénaire proposés par l'Institut Clay.

2.2.9 LA CHIMIE QUANTIQUE ET SES APPLICATIONS, L'ORDINATEUR QUANTIQUE

La chimie théorique par son approche quantique mobilise une expertise mathématique sur le traitement théorique et numérique des équations de Schrödinger, qu'il s'agisse d'aspects statiques sur la structure électronique de la matière, ou de questions de dynamiques moléculaires. Un enjeu, important par ses retombées technologiques, est la modélisation et l'analyse des phénomènes liés aux matériaux organiques, comme le graphène. Ces matériaux carbonés ont de remarquables propriétés de conductivité et de stockage de l'énergie, ouvrant ainsi des perspectives technologiques, que ce soit pour l'industrie photovoltaïque ou pour celle des composants électroniques innovants, notamment pour l'ordinateur quantique. La recherche dans cette dernière direction a l'originalité de mobiliser des disciplines variées, allant des sciences de l'ingénieur aux mathématiques, en passant par la chimie expérimentale et théorique, ainsi que la physique. Les spécialistes des EDP sont concernés à la fois comme acteurs de développement et comme utilisateurs. En effet, la modélisation des mécanismes intervenant dans l'ordinateur quantique fait intervenir des équations aux dérivées partielles (de type Schrödinger et Lindblad) et interroge l'analyse des EDP avec différentes questions, à commencer par le contrôle, puisqu'il s'agit de contrôler le système quantique utilisé. Par ailleurs, les questions technologiques liées à la réalisation des hardwares nécessaires pour la technologie quantique mobilisent également les expertises en simulation de modèles à base d'EDP. Il s'agit alors de comprendre la structure fine des matériaux innovants utilisés ici (matériaux organiques comme le graphène), qu'il s'agisse de leur structure électronique ou de leur dynamique quantique. Enfin, les possibilités ouvertes par ces ordinateurs quantiques stimulent la recherche autour de l'utilisation d'algorithmes quantiques, à des fins de résolution de systèmes d'EDP en très grande dimension.

2.2.10 LES SCIENCES DE L'INGÉNIEUR ET LES GRANDS PROJETS INDUSTRIELS

Il s'agit d'un domaine extrêmement vaste (voir Chapitre 10) sur lequel nous ne donnons ici qu'un exemple archétypique concernant le dialogue entre mathématiques et applications industrielles. L'intérêt particulier des mathématiciens français pour les équations cinétiques, en particulier l'équation de Boltzmann, a été suscité par le projet de navette spatiale européenne Hermès lancé par le Centre national d'études spatiales (Cnes) au milieu des années 1970. Le développement d'une navette spatiale met en jeu les questions du retour de la navette dans l'atmosphère qui, dans ses couches élevées, est un gaz très raréfié pour lequel les modèles classiques de la dynamique des gaz, comme les équations d'Euler, ne sont plus valides. Le modèle adéquat correspond à l'équation de Boltzmann qui avait été peu étudiée auparavant, sauf en ce qui concerne sa version linéaire qui est le modèle de base de la neutronique, autre spécialité française, motivée par le programme électronucléaire français. L'étude de ce type de modèles a conduit à deux médailles Fields françaises, celle de P.-L. Lions en 1994 et celle de Villani en 2010, ainsi qu'à de nombreuses autres contributions fondamentales notamment de la part de Bardos et de ses élèves.

2.3 LE CALCUL SCIENTIFIQUE POUR LES EDP : NOUVELLES PROBLÉMATIQUES ET NOUVEAUX ENJEUX

Lié à l'augmentation des capacités informatiques, le calcul scientifique a pris un très grand essor. Il est nécessaire pour calculer les solutions des modèles continus que sont les EDP. Par ailleurs, des problèmes qui étaient de nature « discrète », à cause de la limitation de leur taille imposée par les ordinateurs, deviennent « continus » et donc des EDP. C'est ce qui s'est passé en imagerie et on peut penser qu'il va en être de même pour les réseaux de neurones. Le besoin croissant en algorithmes de l'industrie (énergie, transport, communications et réseaux, etc.), des services (banque, internet, santé, etc.), des grands organismes publics (CEA, Cnes, Ifpen, Onera, etc.) et des autres sciences (mécanique des fluides et des solides, physique des plasmas, physique nucléaire, mécanique quantique, chimie théorique, etc.) pour des raisons de modélisation et de simulation a été et reste encore un formidable moteur pour le développement du calcul scientifique.

2.3.1 MODÉLISATION ET SIMULATION

Les EDP sont indissociables de la modélisation (voir aussi le Chapitre 10 et le Chapitre 12). De nouveaux modèles apparaissent régulièrement et le couplage de modèles que l'on voit de plus en plus émerger (multi-physiques, multi-échelles, etc.) nécessite une très bonne connaissance de l'analyse des EDP et de leur résolution numérique.

La simulation numérique est devenue un pilier scientifique majeur dans de nombreux domaines d'application, notamment en mécanique, physique ou en chimie, mais plus récemment également dans les sciences du vivant pour ne citer qu'elles. Elle est basée la plupart du temps sur des modèles mathématiques comme les EDP ou les équations différentielles ordinaires (EDO). La construction de modèles réalistes est complexe. Elle repose en général sur les principes fondamentaux de la physique en incluant les effets nécessaires pour la compréhension du problème étudié. L'étude mathématique, en particulier l'existence et l'unicité de solutions, des équations utilisées pour la simulation de problèmes réalistes n'est en général pas abordable. Par contre, des propriétés fondamentales, comme l'existence d'invariants, les effets dissipatifs ou certaines particularités structurelles des équations, jouent un rôle fondamental pour obtenir des résultats fiables dans ces simulations. La collaboration entre mathématiciens et experts de l'application visée est souvent très bénéfique pour obtenir des modèles à la fois réalistes et ayant de bonnes propriétés mathématiques. Ces modèles peuvent être construits en couplant des modèles bien posés plus simples. On peut aussi construire, à partir d'un modèle de base complexe, des modèles approchés dérivés comme modèles limites quand certains paramètres sont petits, en faisant une analyse asymptotique.

Après l'étape de modélisation, des méthodes de discrétisation stables, convergentes et robustes doivent être construites, ce qui est une tâche nécessitant souvent des connaissances mathématiques avancées, allant de l'étude de la propagation des erreurs d'arrondi, de la théorie de l'approximation aux méthodes numériques pour les EDP comme les différences finies, les éléments finis, les volumes finis ou les méthodes spectrales. L'étude de convergence de ces méthodes est en général basée sur l'analyse fonctionnelle, mais beaucoup de travaux récents destinés à préserver la structure du problème initial, comme des invariants ou la structure hamiltonienne ou dissipative, utilisent également des techniques de géométrie différentielle ou de topologie algébrique.

Un autre aspect important du calcul scientifique où les mathématiques jouent un rôle essentiel, mais qui est relativement peu représenté dans les laboratoires de mathématiques en France, est le développement de logiciels génériques et *open source*, permettant à un large public de réaliser des simulations numériques au meilleur niveau. Un exemple sont les logiciels ou librairies utilisant des méthodes d'éléments finis, comme XLIFE++, Feel++, ou FreeFEM++, qui permettent de réaliser des simulations parallèles complexes basées sur des techniques d'éléments finis sur maillages non structurés.

2.3.2 OPTIMISATION, CONTRÔLE, PROBLÈMES INVERSES

Ces trois champs disciplinaires ne sont pas spécifiques aux EDP. En particulier, l'optimisation a une longue histoire propre et apparaît dans d'autres domaines mathématiques comme les probabilités (Chapitre 6), la statistique ou l'intelligence artificielle (Chapitre 7), sans parler de ses interactions avec d'autres sciences telles que l'informatique (Chapitre 9) ou l'économie. De même, la théorie du contrôle s'est d'abord développée pour des systèmes dynamiques et a nourri le domaine de l'automatique en sciences de l'ingénieur. Ces domaines font l'objet d'autres parties de ce rapport. Néanmoins, l'optimisation, le contrôle et la théorie des problèmes inverses jouent un rôle de plus en plus important en EDP et nous nous concentrons sur cet aspect ici. En effet, du point de vue applicatif, après avoir modélisé un système par des EDP et après avoir réalisé sa simulation numérique, on veut souvent améliorer son fonctionnement : c'est précisément le rôle de l'optimisation et du contrôle. Par ailleurs certains paramètres des modèles sont souvent inconnus et le but des problèmes inverses est de les déterminer à partir de mesures redondantes sur les données accessibles. Ces techniques sont nécessaires en géosciences pour connaître les propriétés du sous-sol ou bien en météorologie pour estimer les conditions initiales d'une prédiction du temps à venir. Les techniques d'inversion sont aussi à la base de toutes les méthodes d'imagerie médicale modernes.

L'optimisation et le contrôle des EDP sont des domaines en plein essor, sous l'effet conjugué de l'augmentation continue de la puissance des ordinateurs et du développement de nouvelles approches mathématiques et algorithmiques. Les besoins sont immenses pour les applications. Le lent travail de conception de nouveaux systèmes (un avion, une machine, un procédé) peut être considérablement accéléré par l'utilisation d'outils automatiques d'optimisation dans les logiciels de simulation. De ce point de vue, l'apparition de l'optimisation topologique en mécanique des structures, qui a été une petite révolution conceptuelle dans les années 1990, est exemplaire de l'intrusion de l'optimisation dans le monde de la simulation numérique et de la modélisation par les EDP. L'interaction entre optimisation et contrôle, d'une part, et discrétisation des modèles et leur simulation numérique, d'autre part, est extrêmement profonde car il est très inefficace d'optimiser un modèle complexe comme une boîte noire. Ainsi, les algorithmes les plus performants recourent à la notion d'état adjoint, qui doit être incorporé dans les logiciels de simulation le plus tôt possible lors de leur développement. Les liens avec l'informatique sont aussi très profonds, à travers, par exemple, les logiciels de différentiation automatique, ou l'optimisation combinatoire, qui mélange les outils mathématiques et informatiques. Dans une discipline comme celle de la recherche opérationnelle, les frontières sont particulièrement difficiles à tracer. Bien évidemment, les progrès récents en apprentissage machine et en réseaux de neurones profonds motivent des développements très importants de la théorie et de la pratique de l'optimisation et du contrôle, comme par exemple l'analyse récente de problèmes d'optimisation dans les espaces de Wasserstein de mesures de probabilités, ou bien la conception d'algorithmes liés à l'analyse convexe non lisse qui se révèlent très efficaces en apprentissage machine.

2.3.3 LES MAISONS DE LA MODÉLISATION ET DE LA SIMULATION

Les collaborations entre universités et grandes entreprises se sont développées relativement facilement dès les années 70. Le lien avec les PME s'est avéré plus délicat : difficulté pour la PME d'identifier le partenaire adéquat, difficulté pour le chercheur ou la chercheuse de cadrer administrativement sa collaboration. Les dix dernières années ont vu se développer des Maisons de la modélisation et de la simulation dont l'objectif est de fluidifier au niveau régional les relations entre PME, d'une part, chercheurs et chercheuses, d'autre part. Au niveau national, ces efforts sont coordonnés par l'Agence pour les mathématiques en interactions avec les entreprises et la société (AMIES) dont il est question dans le volume 1 de cette synthèse.

2.3.4 QUELQUES ENJEUX LIÉS À LA PRODUCTION DE CODES

La communauté du calcul scientifique a été pionnière dans la recherche d'autres systèmes de publication que celui en vigueur dans les années 50. La production de codes, et surtout la préservation de leur utilisabilité, a conduit à la publication en *open source* des codes et au développement de journaux favorisant la reproduction des expériences numériques et le partage des programmes informatiques. En parallèle de ce mouvement, la reconnaissance de l'activité de production de codes s'est améliorée puisqu'il est devenu simple de voir si un code est utilisé, ou non, et donc de juger de son impact. La valorisation de l'activité de développement de codes dans les carrières en France est néanmoins toujours un enjeu.

2.35 CONCLUSION

Les EDP, l'analyse numérique, l'optimisation et le calcul scientifique sont des domaines d'excellence de l'école mathématique française. Situés aux interfaces avec les autres sciences, la société, l'industrie et avec les autres domaines des mathématiques où ils trouvent de nouveaux problèmes nécessitant de nouvelles méthodes, ces domaines sont en perpétuelle évolution. L'explosion des activités de recherche dans ces domaines lors des dernières décennies est liée à leur flexibilité et leur adaptabilité aux questions nouvelles. Leur dynamisme ne devrait pas s'atténuer dans le futur, tant les nouveaux problèmes à modéliser dans notre société numérique sont nombreux. Parmi ces nouveaux problèmes, il y a bien sûr certaines questions liées à la compréhension des algorithmes de l'intelligence artificielle, mais également ceux issus de leur développement dans les différents domaines en interaction (chimie quantique, physique, biologie, etc.).

Il est important, sur ce sujet des interactions, de promouvoir une vision inclusive des mathématiques et que les laboratoires de mathématiques accueillent des chercheurs et des chercheuses à la périphérie du cœur de métier. En effet, c'est dans le dialogue avec ces personnes issues d'autres sciences que naissent les idées nouvelles. Ce sont aussi elles qui sont souvent le plus à même de saisir l'importance de questions émergentes dans d'autres domaines scientifiques ou dans l'industrie.

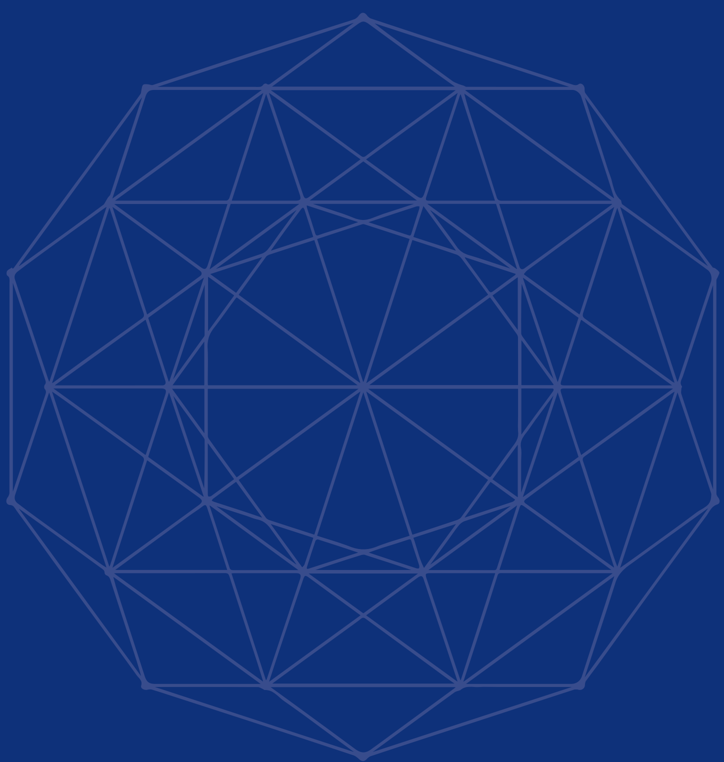
Les EDP théoriques et numériques sont un terrain d'épanouissement pour les carrières interdisciplinaires avec les difficultés que l'on connaît. Cette question n'est pas nouvelle et reste d'actualité : il faut veiller à la reconnaissance d'une activité scientifique qui, par son positionnement à l'interface entre deux ou plusieurs champs disciplinaires, est parfois mal évaluée par les instances d'évaluations de chacun de ces champs.

Un atout des domaines présentés dans ce chapitre réside dans leur activité de formation et leur adéquation au marché de l'emploi scientifique. Il est important de continuer à proposer des formations dont le spectre soit suffisamment large pour favoriser des débouchés dans de nombreux secteurs, de l'enseignement supérieur et la recherche publique et privée jusqu'aux secteurs du développement, de l'innovation, des bureaux d'études et des services.

Une vigilance doit néanmoins être apportée au maintien, dans la recherche publique, de profils à haut potentiel. Le développement de passerelles entre recherche publique et recherche industrielle doit donc être encouragé, par exemple selon le dispositif des labcom du CNRS, du CEA ou de l'Inrae, laboratoires communs avec tutelle industrielle sur une ou plusieurs équipes de l'unité ou des équipes-projet communes de l'Inria en partenariat avec une entreprise. Ces dispositifs sont rares dans les laboratoires de mathématiques et mériteraient d'être développés : ce problème est abordé dans le volume 1 de cette synthèse.

CHAPITRE 3

GÉOMÉTRIE, TOPOLOGIE ET SYSTÈMES DYNAMIQUES



3.1 INTRODUCTION

La géométrie développe l'étude des formes et de leurs représentations, qualitatives ou quantitatives (géométrie analytique). Elle est connue de tous par ses origines remontant à l'antiquité avec quelques noms célèbres qui ont plus ou moins fait souffrir des générations d'élèves, Euclide, Pythagore, Thalès ou plus récemment Descartes, Euler, Poncelet, etc.

On pense souvent qu'il s'agit d'un domaine tellement ancien que tout est connu. En fait, il n'en est rien. Après avoir servi l'astronomie comme l'architecture et la perspective, elle a ouvert la voie à des modèles de plus en plus élaborés, dont l'un des plus spectaculaires est la théorie de la relativité d'Einstein. Ses vocables les plus usités : géométrie descriptive analytique, algébrique, euclidienne, affine, projective etc. n'ont cessé de s'enrichir au cours des derniers siècles : géométrie différentielle, géométrie non-euclidienne, topologie différentielle, géométrie spectrale, géométrie algorithmique, géométrie discrète, géométrie tropicale, etc.

La géométrie a engendré la topologie – sous-entendu « l'étude des formes[5] » – et, rejoignant la physique, elle a élargi la mécanique en une vaste théorie des systèmes dynamiques.

La topologie étudie les formes sans recours à une métrique : une sphère *cabossée* ressemble bien à une sphère ronde. Pourtant, la classification des surfaces topologiques est restée plus ardue qu'il n'y paraissait *a priori* (Tibor Radó 1925).

Les systèmes dynamiques étudient les évolutions de systèmes gérées par des équations différentielles en dimension finie ainsi que leurs analogues en temps discret – progression par sauts, cascades.

Cette large branche a été pourvoyeuse de nombreux prix depuis 70 ans en France. Citons notamment les médailles Fields de Jean-Pierre Serre en 1954, René Thom en 1958, Jean-Christophe Yoccoz en 2014, Maxim Kontsevitch en 1998, Artur Avila en 2014 et les prix Abel de Jean-Pierre Serre en 2003, Jacques Tits en 2008, Mikhail Gromov en 2009 et Yves Meyer en 2017.

5. Nous distinguons la topologie à caractère géométrique de celle qui est l'outil premier de l'analyse.

3.2 QUELQUES PHARES DE L'ÉCOLE FRANÇAISE

3.2.1 HENRI POINCARÉ (1854-1912)

À l'aube du vingtième siècle, physique théorique et géométrie se sont mutuellement fabuleusement enrichies. Les travaux de Bernhard Riemann (1826-1866) avec son mémoire de 1854 ont permis de s'affranchir de la géométrie euclidienne. Géométrie métrique et espaces courbes étaient prêts pour les travaux d'Einstein sur la relativité restreinte puis générale. Henri Poincaré, l'un des derniers grands savants universels, a non seulement contribué à la théorie de la relativité restreinte, mais a découvert (un peu grâce à ses erreurs initiales) la richesse du chaos en étudiant le problème des trois corps (1888 - concours Mittag-Leffler). En introduisant les notions d'orbites homoclines, hétéroclines et l'application de premier retour de Poincaré, il a fondé la théorie des systèmes dynamiques, devenue extraordinairement riche aujourd'hui. Il a aussi fondé la topologie algébrique dans sa fameuse série d'articles *Analysis Situs* et ses cinq compléments. Poincaré y tente une caractérisation homologique de S^3, la sphère de dimension 3. Lui-même montre que l'homologie est insuffisante et finit ce long travail avec une question : la nullité du groupe fondamental caractérise-t-elle S^3 parmi toutes les variétés closes de dimension 3 ? Cette question, transformée en « conjecture de Poincaré », sera prouvée un siècle plus tard par Gregory Perelman (St-Pétersbourg) ; l'école française a apporté sa pierre à cette avancée historique, dans la compréhension et la rédaction détaillée de la preuve proposée par Perelman, qui s'inscrit dans le programme de Richard Streit Hamilton (Cincinnati, Columbia).

3.2.2 ÉLIE CARTAN (1869-1951)

Il peut être considéré comme un des fondateurs de la géométrie différentielle moderne, ce qui l'a conduit à étudier les équations différentielles et à mélanger subtilement géométrie et algèbre pour contribuer à la théorie des groupes de Lie. Ses travaux ont rencontré les préoccupations de la physique mathématique. Sa correspondance et ses collaborations avec Einstein sont nombreuses. Il a aussi établi de grands résultats en géométrie riemannienne, notamment la classification des espaces symétriques et le rôle de la courbure. Ses contributions à la mécanique quantique, avec l'introduction du spin, sont remarquables.

3.2.3 RENÉ THOM (1923-2002)

Ses premiers travaux (récompensés de la médaille Fields en 1958) fondent la théorie du cobordisme qui permet de comprendre la relation entre la topologie algébrique de Poincaré (et de ses successeurs) et la topologie différentielle (courbes, surfaces, variétés de toutes dimensions). La clé initiale en est que la transversalité (le moins de contact possible entre deux sous-variétés d'un même espace ambiant) est une propriété générique (*i.e.* presque toujours satisfaite). Puis, très rapidement, Thom est passé à l'étude des singularités d'applications différentiables et de leur stabilité. Ceci l'a naturellement rapproché des systèmes dynamiques, au travers de la théorie des catastrophes érigée comme un « art des modèles » et dont il a fait un des thèmes principaux de son séminaire à l'IHES. Cette approche a eu une influence décisive sur le développement de ce thème en France avec le souci de leur application à d'autres disciplines (physique, linguistique, embryologie).

3.2.4 JEAN-PIERRE SERRE (1926-)

Ses premiers travaux, récompensés par la médaille Fields 1954, font de lui un topologue. Il généralise la suite spectrale de Leray aux fibrés dits aujourd'hui de Serre. En l'appliquant aux sphères S^n de dimension quelconque et à leurs espaces de lacets, il prouve que dans la suite presque totalement inconnue des groupes d'homotopie seulement deux groupes sont d'ordre infini. Puis, très vite, Serre est attiré par l'arithmétique (théorie des nombres) et la géométrie algébrique.

3.2.5 JEAN-CHRISTOPHE YOCCOZ (1957-2016)

Ses travaux s'inscrivent dans la lignée de ceux fondateurs de Vladimir Arnol'd et Michaël Herman, son directeur de thèse. Il a étudié notamment deux grandes catégories de systèmes dynamiques, les prédictibles et les chaotiques, s'intéressant à leur importance dans le paysage des systèmes dynamiques, au passage d'une catégorie à l'autre et à la compréhension des bifurcations lorsqu'un phénomène prédictible devient chaotique. Ses contributions ont également une influence marquante pour l'étude du flot de Teichmüller et des échanges d'intervalles.

3.3 UNE ÉCOLE SOLIDE ET OUVERTE

Durant la seconde moitié du XXe siècle, en partie grâce aux enseignements prodigués dans les ENS et à l'école Polytechnique, l'école française est restée attractive pour les talents mathématiques étrangers. L'arrivée en France de plusieurs mathématiciens de l'ex-monde soviétique a encore augmenté le rayonnement de l'école française[6].

Nous ne nous attarderons que sur Gromov, mathématicien russe, naturalisé français puis américain, qui a rejoint l'IHES comme professeur permanent dès 1982. Le prix Abel lui a été décerné pour ses « contributions révolutionnaires à la géométrie ». Son influence a été immense et très bénéfique pour plusieurs groupes en France travaillant en géométrie métrique et en géométrie symplectique. Il est connu pour ses importantes contributions dans différents domaines de la géométrie, en particulier la géométrie métrique (en introduisant la notion d'« hyperbolicité au sens de Gromov ») et la théorie géométrique des groupes. Ses travaux sur les espaces et les groupes hyperboliques ont ouvert une voie extrêmement fructueuse. Gromov est aussi connu pour sa contribution fondamentale à la géométrie symplectique, en introduisant la théorie des courbes pseudo-holomorphes. Ses travaux ont montré leur pertinence par leurs applications en biologie pour la modélisation des structures génétiques et biomoléculaires. Nous reviendrons plus loin sur les contributions de Gromov.

L'intégration convexe de Gromov pour aborder certaines équations aux dérivées partielles – par exemple, celles du plongement isométrique d'un espace courbe dans un espace euclidien – a déconcerté les spécialistes à ses débuts. Pourtant, en développant des outils de calculs *ad hoc,* Vincent Borrelli a réalisé, à Lyon, l'impression 3D d'un plongement isométrique de la sphère ronde de rayon 1 dans la boule de rayon moitié. Un article très récent, dans *Bull. Amer. Math. Soc.,* décrit l'état de l'art en intégration convexe ; en 30 ans, la situation a bien changé.

L'effervescence n'est pas retombée et plusieurs des élèves de Gromov suivent ses traces avec succès et originalité, comme Pierre Pansu[7] en géométrie non-euclidienne, géométrie fractale, groupes de Carnot ; François Labourie[8] en géométrie des courbes pseudo-holomorphes, théorie des représentations et systèmes d'Anosov.

3.4 GÉOMÉTRIE

Le XIXe siècle a vu exploser la division traditionnelle des mathématiques en arithmétique, algèbre, analyse, et géométrie, notamment avec le

6. Précisons que par « école française » nous entendons toutes les mathématiques développées dans les centres de recherche installés en France ou gérés par la France.
7. Prix Georges Charpak de l'Académie des sciences 2013.
8. Prix de la Société Mathématique Européenne 1992.

développement extraordinaire de la géométrie différentielle sous l'impulsion de Gauss et Riemann. Depuis, la puissance du calcul différentiel et intégral a irrigué fortement la géométrie et noué de nombreuses interactions avec la physique (relativité générale, théorie des cordes, membranes, pour n'en citer que quelques-unes). Les autres champs des mathématiques irriguent aussi pleinement la géométrie et ont fait émerger de nouvelles quantités – citons par exemple les diverses notions d'entropie – qui apportent un éclairage nouveau et riche sur les structures étudiées.

3.4.1 ANALYSE SUR LES VARIÉTÉS : UN CHAMP AUX MULTIPLES FACETTES

La longue tradition de l'analyse en France a permis de développer des liens fructueux avec la géométrie. Voici quelques thèmes phares abordés dans le cadre de cette interaction : l'étude des surfaces minimales (formes des bulles, des cheminées d'usine, etc.), surfaces dont le nombre a singulièrement augmenté depuis quelques décennies ; l'analyse spectrale sur les variétés, qui décrit les contraintes que la connaissance du spectre du Laplacien induit sur la géométrie d'une variété ; l'analyse harmonique avec le Laplacien et la théorie de Hodge. Les liens avec la physique théorique sont multiples et entrent dans le champ de l'analyse sur les variétés également, avec l'étude des équations d›Einstein en théorie de la relativité ou celles de Seiberg-Witten issues de questions de supersymétrie en physique quantique.

Le Laplacien hypoelliptique de Jean-Michel Bismut[9] représente une découverte majeure. Voici la citation[10] : "*In recent years, his work has been changing the way we think about the Selberg trace formula, a fundamental tool in representation theory and modern number theory*." L'application la plus récente est une formule de Riemann-Roch-Grothendieck en cohomologie de Bott et Chern. L'école de Bismut est très active aujourd'hui.

3.4.2 DE BERNHARD RIEMANN À PAUL FINSLER EN PASSANT PAR DAVID HILBERT

Dans la lignée de Poincaré et avec le développement de la géométrie différentielle intrinsèque, le groupe Arthur Besse (né en 1975), regroupant plusieurs géomètres, a contribué à développer la géométrie riemannienne dans plusieurs directions encore d'actualité. Mêlant savamment analyse, géométrie et topologie, ce groupe est à l'origine de nombreux travaux, notamment dans l'étude des difféomorphismes et des flots hyperboliques et partiellement hyperboliques ; on y trouve des problèmes variés : description et dénombrement des géodésiques périodiques, rigidité des espaces symétriques, etc. Parmi les contributions importantes, on peut citer la résolution par Gérard Besson, Gilles Courtois et Sylvestre Gallot de la conjecture de l'entropie minimale de Katok-Gromov ; la méthode dite « du barycentre » qu'ils ont initiée est extrêmement puissante et flexible et a irrigué les travaux de nombreuses équipes, en France et dans le monde.

Les géométries de Hilbert, introduites comme exemples d'espaces dans lesquelles les droites sont des géodésiques, apparaissent de façon naturelle dans le cadre de la géométrie projective et peuvent être vues comme des généralisations de la géométrie hyperbolique. L'étude de leurs quotients est très riche et la notion de finitude géométrique est beaucoup plus délicate à analyser que dans le cas de la géométrie hyperbolique. Toutes ces géométries s'intègrent dans le cadre plus vaste des géométries de Finsler, qui explorent des questions où l'absence de symétrie est prégnante, par exemple des problèmes de navigation. Ce domaine est en pleine effervescence depuis une cinquantaine d'années et il fédère plusieurs équipes de géomètres, notamment en France, sous la houlette de Yves Benoist[11]: volume systolique, flot géodésique, entropie minimale, invariants divers, etc. Autant de sujets aux nombreuses perspectives de recherche.

3.4.3 LA GÉOMÉTRIE DE COURBURE NÉGATIVE ET LA NAISSANCE DE LA GÉOMÉTRIE ERGODIQUE

Les flots géodésiques des variétés à courbure négative constituent un exemple fondamental de ce qu'on appelle les flots d'Anosov : leurs trajectoires sont très sensibles aux conditions initiales. L'étude de ces flots a connu un essor spectaculaire depuis les années 60 avec, dans un premier temps, une implication forte de l'école russe, notamment Gregory Margulis[12] et Marina Ratner[13], puis de l'école française quelques années plus tard. S'en sont suivis des développements considérables dans plusieurs directions : théorie ergodique et mesures invariantes, entropie mesurée et entropie topologique, théorèmes de rigidité entropique, feuilletages stables et rigidité différentielle, groupe fondamental et

9. Prix Shaw 2021.
10. Communiqué de presse pour l'annonce du Prix Shaw, https://www.shawprize.org/prizes-and-laureates/mathematical-sciences/2021/press-release.

11. Prix Clay 2011.
12. Médaille Fields 1978, prix Abel 2020.
13. Conférencière invitée, ICM 1994.

orbites périodiques. Un champ nouveau est né, à la croisée de ces domaines, nommé aujourd'hui géométrie ergodique.

En France, la géométrie ergodique s'est fortement développée sous l'influence très importante de mathématiciennes et mathématiciens étrangers. Ainsi, Denis Sullivan[14] a été professeur permanent à l'IHES entre 1974 et 1997. Auteur de modèles algébriques pour les espaces topologiques, avec des applications innovantes en homotopie rationnelle, il est aussi le père, avec Samuel James Patterson, de la mesure de Patterson-Sullivan sur le bord à l'infini des variétés à courbure négative et plus généralement des espaces hyperboliques. Dans les années 90 et 2000, l'école française a repris avec succès cette approche puissante, initiant de nombreux développements, que ce soit en théorie géométrique des groupes ou en théorie ergodique.

Ce domaine a aussi bénéficié des travaux exceptionnels de Margulis sur les sous-groupes discrets des groupes de Lie et leurs actions, l'étude des réseaux dans les groupes algébriques et leurs liens avec l'arithmétique et la dynamique homogène. Les groupes discrets apparaissent dans tous les domaines des mathématiques, le fait de les faire agir sur des objets géométriques aide à leur compréhension et leurs propriétés sont particulièrement remarquables lorsque la courbure est négative. Cette thématique est aujourd'hui très active ; elle fédère de nombreux groupes en France (Orsay, Rennes, Nantes, etc.), avec une série de contributions majeures allant de la géométrie à courbure négative à l'étude des adhérences d'orbites de sous-groupes discrets sur des espaces de volume fini et des mesures limites associées, en passant par les marches aléatoires sur les groupes ou la diffusion de la chaleur sur les variétés. On y trouve l'influence fédératrice de structures transverses comme le GDR Platon.

À noter, l'apport important pour toutes ces questions du formalisme thermodynamique, dans la lignée de Rufus Bowen et de David Ruelle (IHES) ; les liens avec les statistiques et la physique ne sont pas loin. Les opérateurs de transfert sont aujourd'hui un outil fondamental pour décrire le comportement chaotique des flots d'Anosov (théorème central limite, dimensions fractales, dénombrement d'orbites, etc.) ; leurs champs d'application s'élargissent encore aujourd'hui, notamment en géométrie des groupes, thème central de la géométrie ergodique.

À l'interface entre actions de groupes et calcul des probabilités, l'école française (à Rennes et Nancy notamment) a joué un rôle dominant à la fin du siècle dernier dans l'étude des marches aléatoires sur les groupes de matrices. Cette thématique a retrouvé un dynamisme fort depuis une dizaine d'années, avec quelques contributions importantes de l'école française : citons par exemple l'obtention récente d'un théorème central limite pour les produits de matrices aléatoires, sous la condition optimale de moments d'ordre 2, l'étude des fluctuations des normes de matrices aléatoires avec des applications à la dynamique de population en milieu aléatoire, etc. Dans un champ proche, sont apparus au XXI^{e} siècle les graphes expanseurs, avec des ramifications majeures en informatique théorique (codes correcteurs d'erreur, théorie de la complexité, ingénierie des réseaux, etc.).

3.4.4 THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES GROUPES DISCRETS

Les progrès dans l'étude des groupes discrets sont venus d'avancées novatrices et de l'apparition de nouveaux concepts profonds en géométrie. Tel est le cas avec Gromov qui, au début des années 80, a introduit une notion de courbure pour un groupe discret de type fini. Une nouvelle branche de la théorie des groupes est lancée avec une forte saveur géométrique. L'écho en France est formidable sur tout le territoire avec des publications du tout meilleur niveau.

L'action d'un groupe discret sur un espace hyperbolique renseigne sur sa structure algébrique. Ainsi, le groupe des transformations birationnelles du plan projectif (groupe de Cremona) contient-il une infinité de sous-groupes normaux (Serge Cantat[15], Stéphane Lamy et Yves Cornulier).

Plus récemment, fruit de plusieurs contributions de l'école française, a émergé un cadre très général qui permet de développer une théorie géométrique dite de la « petite simplification » dans des groupes agissant sur des espaces hyperboliques. La liste des groupes en question contient les groupes relativement hyperboliques, les groupes d'homéomorphismes à isotopie près des surfaces fermées, les groupes d'automorphismes extérieurs des groupes libres ou encore les groupes de Cremona, avec une entrée dans la géométrie algébrique (voir 1.4).

Les progrès sont aussi venus de nouvelles actions des groupes fondamentaux de surfaces dans la veine de William Goldman. Ainsi, Benoist a posé les bases de dynamique et de théorie des groupes pour les géométries de Hilbert, présentées plus haut. Ces exemples sont les premiers à nous donner des représentations des groupes de

14. Prix Wolf 2010, Prix Abel 2022.

15. Prix Paul Doistau-Émile Blutet 2012, Académie des sciences.

surfaces dans des groupes de matrices 3x3. Au même moment, Nigel Hitchin a introduit cet espace de représentations supérieures en toutes dimensions. On doit à Labourie et ses collaborateurs d'avoir compris leur géométrie à l'infini et d'avoir montré les liens profonds avec la théorie ergodique, ouvrant la voie à des nouvelles classes de sous-groupes discrets. Ces sujets sont aujourd'hui en plein développement et de nombreux jeunes mathématiciennes et mathématiciens français en sont des acteurs importants.

3.5 TOPOLOGIE

L'âge d'or de la topologie, celle qui s'occupe des variétés topologiques, linéaires par morceaux ou différentielles, s'étend sur deux décennies à partir de la fin des années 50. Le choc initial a été la découverte en 1957 des sphères exotiques par John Milnor[16]. Un résultat majeur est obtenu en France par Jean Cerf[17]: **«** tout difféomorphisme de la sphère S^n s'étend la boule D^{n+1} si n est distinct de 4 [18] **»**. Une école de topologues est née à Orsay (Université Paris-Saclay) dans ces années-là, elle a rapidement essaimé en France. Une variation thématique importante est apparue sous l'influence de Georges Reeb, à Strasbourg, avec les variétés *feuilletées*.

Par nature, la topologie intervient dans tous les problèmes géométriques, mais son champ d'interactions est plus vaste, au sein des mathématiques et aussi au-delà, par exemple récemment en informatique théorique. C'est une branche des mathématiques à maintenir vivante dans toute sa diversité. Même si de nombreux problèmes ouverts sont particulièrement difficiles, il reste toujours beaucoup à découvrir à portée de main. Il est crucial de continuer à promouvoir la discipline auprès des jeunes.

3.5.1 L'INFLUENCE DE WILLIAM THURSTON (1946-2012, MÉDAILLE FIELDS 1982)

Les mathématiques de Thurston, portant à la fois sur les feuilletages, la géométrie hyperbolique et la dynamique holomorphe, ont eu une influence marquée en France[19]. Thurston est venu à Paris puis Dijon juste après sa thèse (1972) et, en 1976, il fait circuler un texte20, signe de sa transition personnelle des feuilletages à la géométrie hyperbolique ; un exemplaire parvient aux collègues d'Orsay qui le transforment en sujet de séminaire. Ce séminaire vivra plus d'un an, avec un retentissement fulgurant sur les jeunes, d'Orsay à Dijon, Lille, Strasbourg et à l'international. Finalement, ces 14 pages de Thurston auront contribué à faire renaître la géométrie hyperbolique en France, avec la richesse des dynamiques qu'elle engendre. Quand on voit toutes les recherches menées sur ce sujet et des sujets voisins encore aujourd'hui, on a sous les yeux la manifestation d'un effet papillon en mathématiques.

Juste après, Thurston va jeter les bases de la géométrisation des variétés de dimension trois et l'énonce comme une conjecture. Il faut savoir que la conjecture de Thurston entraîne la fameuse « conjecture de Poincaré » de 1904 (considérée comme l'un des huit problèmes du millénaire identifiés par l'Institut Clay, et le seul résolu à ce jour). Cette conjecture a été résolue par Perelman (St-Pétersbourg, médaille Fields 2006) en déformant une métrique riemannienne par le flot de la courbure de Ricci. Cette résolution a été un moment important de rapprochement entre les topologues et les géomètres riemanniens en France. Les Français ont été très actifs notamment pour expliquer, sécuriser et certifier la preuve de Perelman. Finalement, cela a débouché sur une rédaction complète de la conjecture de Thurston[21] et une très bonne expertise internationale sur ces sujets.

Le thème des feuilletages, à la croisée de la topologie et des systèmes dynamiques, a été très vivant en France dans les années 70-80 en particulier autour d'Étienne Ghys[22] ; ce thème est aujourd'hui toujours présent dans quelques équipes, avec notamment des travaux de premier plan émanant de petits centres tels Vannes. La dynamique d'un feuilletage s'exprime dans son holonomie qui n'est pas un groupe mais un groupoïde[23]. Cela laisse entrevoir toute la richesse, mais aussi la difficulté du sujet des feuilletages qu'il faudra essayer de garder bien vivant.

3.5.2 STRUCTURES GÉOMÉTRIQUES À DEUX FACES : GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE ET GÉOMÉTRIE DE CONTACT

Les deux faces en question correspondent à la dichotomie flexibilité versus rigidité ; la première rappelle la topologie, qui est flexible par nature,

16. Médaille Fields 1962.
17. Prix Servant 1970.
18. Le résultat est encore inconnu en dimension 4.
19. F. Laudenbach & A. Papadopoulos, *W.P. Thurston and French mathematics, EMS Survey Math. Sci. 6 (2019), 33-81.*
20. Le texte en question, projet d'une Note au *Bulletin Amer.* Math. Soc., sera finalement publié en 1988, sous sa forme initiale, enrichie d'une préface.
21. G. Besson, L. Bessières, M. Boileau, S. Maillot, J. Porti *Geometrization of 3-manifolds*, EMS Tracts in Mathematics
22. Conférencier plénier, ICM 2006.
23. C-à-d. une *petite catégorie* en groupes.

et la seconde la géométrie métrique que la définition fait penser rigide[24]. La frontière précise est à découvrir. Ces deux géométries sont très présentes en mécanique classique. Les liens avec la physique remontent aux travaux de Lagrange et de Hamilton.

On reconnaît Arnol'd comme le fondateur de la topologie symplectique (face flexible). Plusieurs mathématiciens français ont exploré cette voie avec succès ; ils nous informent notamment sur les trajectoires périodiques des systèmes hamiltoniens et sur les intersections lagrangiennes.

À l'opposé, les diverses notions de capacité symplectique auxquelles ont contribué plusieurs français – dont Claude Viterbo[25] – mettent en évidence la face rigide de la géométrie symplectique. La théorie de Gromov des courbes pseudo-holomorphes enfonce le clou en apportant un outil puissant pour cerner cette rigidité.

À la suite des invariants spectraux découverts par Viterbo, un grand sujet en cours en France est celui de la géométrie symplectique C^0, celle où la structure différentielle ne joue plus de rôle. Voici un résultat longtemps cherché : « le groupe des homéomorphismes de la sphère de dimension 2 préservant l'aire n'est pas un groupe simple », ce qui signifie qu'il contient un sous-groupe distingué distinct du groupe entier et de l'élément neutre.

Le même résultat vaut pour le disque ouvert. L'homologie persistante joue ici le rôle que l'équation de Floer jouait dans la géométrie symplectique.

En parallèle, mais en dimension impaire, la géométrie de contact s'est énormément développée. Emmanuel Giroux[26] est le premier, en 1991, à déterminer la frontière flexible/rigide pour les structures de contact en dimension 3. Et son théorème sur les « livres ouverts », valable en toute dimension impaire, est une « percée » en géométrie de contact (citation de John Etnyre). Son école fait exploser le sujet.

3.5.3 HOMOLOGIE PERSISTANTE

Ce thème de recherche date d'une vingtaine d'années et s'attache à étudier la durée de la persistance de propriétés topologiques le long d'une filtration d'espaces. Il est issu de travaux de Serguei Barannikov, maintenant chercheur à l'Institut mathématique de Jussieu.

Il irrigue de nombreuses disciplines, comme l'informatique, et des domaines très appliqués, comme les neurosciences et les analyses d'images. Poincaré aurait-il imaginé de telles applications de l'homologie, sa découverte de la fin du XIXe siècle ?

3.5.4 DE LA TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE À LA GÉOMÉTRIE DÉRIVÉE

Comme déjà souligné, la topologie, et en particulier la topologie algébrique, a des lettres de noblesse en France depuis Poincaré, avec Serre et Thom sous la houlette de H. Cartan[27]. La topologie algébrique s'est renouvelée au cours des 30 dernières années, avec de nouvelles ouvertures vers la géométrie algébrique, la théorie des déformations, par exemple celle, à homotopie près, des algèbres ou encore, plus récemment, la théorie des fondements et l'informatique théorique, avec la théorie homotopique des types. Un certain nombre de ces sujets sont en relation avec le chapitre 1 et des thématiques transverses à plusieurs domaines comme l'algèbre homologique.

Prenons l'exemple de la géométrie dérivée, qui est une branche de la topologie algébrique, issue de la géométrie algébrique, et fondée sur les travaux de Daniel Quillen (médaille Fields 1974). Étant donné deux sous-variétés algébriques d'une variété ambiante, une formule de Serre donne la multiplicité d'intersection. La question qui donne naissance à la géométrie dérivée est de relever la formule de Serre au niveau géométrique à quasi-isomorphisme près. Vu de loin, cela consiste à faire entrer la théorie d'homotopie dans la géométrie algébrique.

La thèse de Jacob Lurie au MIT, en 2004, a été un événement qui a bousculé la communauté. Heureusement, l'école française a pu faire sienne cette avancée magistrale et rebondir. On peut, par exemple, donner un sens aux classes caractéristiques virtuelles qui interviennent dans les invariants de Gromov-Witten ; il est possible de bâtir une géométrie symplectique dérivée, travaux dans lesquels Bertrand Toën[28] s'est illustré ; la construction d'une théorie de déformation est en cours. Sur tous ces sujets, il s'agit, en un mot, et comme souvent en géométrie algébrique, de faire comme si les intersections de sous-variétés étaient toujours transverses.

24. Mais qui ne l'est pas toujours comme l'a montré le « flexaère » de J.H. Conway exposé dans le salon de l'IHES.
25. Conférencier invité, ICM 1994.
26. Conférencier invité, ICM 2002.
27. Henri Cartan est le fils d'Élie Cartan.
28. Conférencier invité, ICM 2014 et prix Sophie Germain, 2019.

3.5.5 DES SURFACES AUX SYSTÈMES DYNAMIQUES EN PASSANT PAR LA THÉORIE DE TEICHMÜLLER

Introduit dans les années 1930, l'espace de Teichmüller d'une surface de Riemann est un outil de base dans l'étude de son espace de modules de structures complexes et de son groupe de classes de correspondance (*mapping class group*). Si le cadre d'origine en était l'analyse complexe, les travaux de Thurston dans les années 70 ont ouvert la voie à une approche plus géométrique. L'étude des espaces de Teichmüller mobilise ainsi géométrie hyperbolique, topologie en basses dimensions, géométrie algébrique, arithmétique, équations aux dérivées partielles, systèmes dynamiques, théorie des représentations, géométrie symplectique, théorie des groupes géométriques et physique mathématique. Des développements combinatoires en direction de la physique des hautes énergies et en particulier de la théorie des cordes ont eu lieu dans les années 80.

L'étude de la dynamique des flots de billard et de leur renormalisation par le flot de Teichmuller, à la suite des travaux fondateurs de Howard Masur et William A. Veech en 1982, a connu des progrès considérables en France, notamment autour de Kontsevich, Yoccoz et Avila.

3.6 SYSTÈMES DYNAMIQUES

Les systèmes dynamiques se sont développés et spécialisés au cours du XIXe siècle. S'ils concernaient en premier lieu l'itération des applications continues et la stabilité des équations différentielles, ils se sont progressivement élargis, au fur et à mesure de la diversification des mathématiques. Ils intègrent aujourd'hui l'étude des actions continues de groupes, dont l'intérêt réside dans ses applications en géométrie, et la théorie ergodique, née de l'avènement de la théorie de la mesure et qui trouve des échos en probabilités.

Mis à part les travaux de Poincaré au tournant du XXe siècle et ceux de Pierre Fatou et Gaston Julia en dynamique holomorphe dans les années 30, les systèmes dynamiques sont quasi inexistants en France jusque dans les années 60. Thom, nommé professeur à l'IHES[29], ouvre un séminaire auquel il invite les dynamiciens américains, Stephen Smale (médaille Fields 1966) en tête[30]. Cette renaissance sera confirmée par les probabilistes, en particulier Jacques Neveu et, autour de lui, François Ledrappier (Prix Sophie Germain 2016) et Jean-Paul Thouvenot.

Plus tard, en 1979, les travaux de Herman sur les difféomorphismes du cercle, inspirés par ceux de Arnol'd et complétés par Yoccoz, vont contribuer grandement à finaliser cette renaissance qui aujourd'hui est avérée dans presque tous les centres de mathématiques en France.

3.6.1 LES SYSTÈMES DYNAMIQUES EN GÉNÉRAL

La question majeure est de comprendre où commence le chaos, c'est-à-dire quand une dynamique est imprévisible, comme le sont la naissance et la trajectoire des cyclones.

Le franco-brésilien Avila, avec plusieurs dynamiciens français, a montré qu'une dichotomie entre dynamique régulière et dynamique chaotique était vérifiée dans de nombreuses familles de systèmes. Il en va ainsi des applications de l'intervalle dans lui-même, des applications holomorphes du plan complexe, des cocycles de Schrödinger, qui nous viennent de la physique mathématique et aussi des surfaces de translation, ou de la dynamique de Teichmüller.

Les travaux d'Avila dans tous ces domaines, et notamment ses résultats de premier plan dans la théorie dite de renormalisation (regarder la dynamique de retour dans de tous petits domaines pour décrire la dynamique globale) ont profondément influencé notre vision d'ensemble des systèmes dynamiques.

3.6.2 COEXISTENCE DU CHAOS ET DE LA STABILITÉ

Pour le système solaire – ou système à N corps – la question est cruciale. Depuis longtemps les astronomes nous rassurent sur les temps longs par moyennisation. Ils continuent d'étudier, par exemple autour de Jacques Laskar à l'Institut de mécanique céleste et de calcul des éphémérides, les questions de la stabilité du mouvement des planètes du système solaire leur éventuel comportement chaotique.

On retrouve maintenant une école qui doit beaucoup à l'influence de Yoccoz et qui étudie notamment les propriétés de stabilité des difféomorphismes C^1 et de leurs mesures invariantes ergodiques (une trajectoire passe en moyenne un temps dans un sous-ensemble qui est égale à sa mesure relative). Le lien avec le chaos et la théorie de l'information se retrouve

29. Thom arrive à l'IHES en 1963.
30. Thom rencontre Smale en 1956 et fait connaître en France ses premiers travaux de topologie. Après les immenses succès du Smale topologue, Thom est impressionné par le virage de Smale vers les systèmes dynamiques.

dans les entropies associées. De nombreux résultats de robustesse avec une entropie positive ont été obtenus ; citons Christian Bonatti[31], Sylvain Crovisier[32].

Par une méthode venant de l'école de Shilnikov à Nizhny Novgorod, Pierre Berger[33] et Dmitry Turaev ont récemment montré que l'identité du disque pouvait être approchée par un difféomorphisme préservant l'aire et d'entropie positive.

3.6.3 FORMES NORMALES DE BIRKHOFF

Les formes normales de Birkhoff désignent un procédé d'approximation bienvenu pour les applications pratiques. Elles apparaissent à la fois en dimension infinie, *i.e.* concernant des EDP, et en dimension finie, pour des dynamiques de notre espace-temps. Dans le premier cas, une façon innovante de tronquer les séries conduit à des résultats surprenant de stabilité en temps long. Dans le second cas, c'est la divergence des séries de Birkhoff qui prévaut presque sûrement.

3.6.4 LES SYSTÈMES MESURÉS

À l'intersection de la théorie des systèmes dynamiques et des probabilités s'est développée la théorie ergodique mesurée, qui aborde l'étude des systèmes dynamiques du point de vue statistique. Les succès de la théorie de la classification des systèmes, dans le sillage de l'école russe, et de l'étude des propriétés de récurrence et leurs applications à la théorie additive des nombres, sous la houlette de Poincaré, Hillel Fürstenberg [34] et Jean Bourgain[35], ont animé de nombreux travaux de l'école française, à Rennes, Lyon, Paris, etc. Le résultat de Ben Green et Terence Tao[36] sur l'existence de progressions arithmétiques dans la suite des nombres premiers illustre de façon spectaculaire le pont qui existe entre la théorie ergodique et la théorie analytique des nombres.

3.6.5 PAVAGES ET QUASI-CRISTAUX

Sous l'influence fondatrice de Gérard Rauzy, une école active s'est également développée en France autour, entre autres, de l'étude des échanges d'intervalles et des substitutions (briques de base combinatoire pour la renormalisation). Pour la partie mathématique, cela fait appel à l'arithmétique et la dynamique symbolique, et du côté de l'informatique théorique, la combinatoire des mots et la théorie des pavages. Ces derniers thèmes ont des retombées particulièrement intéressantes avec l'irruption de la complexité comme élément de compréhension des pavages et de la dynamique symbolique multidimensionnelle (à la suite des travaux de Mike Hochman[37]). Les systèmes dynamiques substitutifs jouent également un rôle fondamental dans la modélisation mathématique des quasi-cristaux (après les travaux de Yves Meyer) dans le cadre de l'ordre apériodique.

3.6.6 DYNAMIQUE HOLOMORPHE

Les systèmes dynamiques quadratiques dans le plan complexe ont été étudiés avec succès en France en lien avec la géométrie fractale de l'ensemble de Mandelbrot. La dynamique complexe, à travers l'étude de l'itération d'applications holomorphes, se situe naturellement à la confluence de l'analyse complexe et des systèmes dynamiques.

Si les travaux fondateurs du domaine datent du début du XX^e siècle, autour de Gaston Julia et Pierre Fatou, le domaine a connu une explosion à partir des années 1980, en particulier grâce aux possibilités informatiques de représentation des ensembles de Julia, de Fatou et de Mandelbrot. Sous l'impulsion en France de Michaël Herman[38] et d'Adrien Douady, l'étude des propriétés topologiques et géométriques de ces ensembles a engendré une grande effervescence. Et l'on a vu surgir les « lapins de Douady », l'implosion parabolique, la chirurgie quasiconforme et bien d'autres concepts. De son côté, la théorie de la renormalisation a ouvert le domaine à de nombreux autres champs des systèmes dynamiques. L'école française a connu de très belles réussites : la connexité de l'ensemble de Mandelbrot, l'énoncé de la conjecture MLC[39] sur la connexité locale de cet ensemble, les travaux de Yoccoz sur la preuve de la connexité locale pour les paramètres qui ne sont pas infiniment renormalisables, etc. Citons aussi la preuve de l'existence d'ensembles de Julia quadratiques de mesure non nulle dans les années 90 – un très bel exemple de programme de recherche conduit sur le long terme, initié par Douady et réalisé par ses propres étudiants. L'histoire continue encore aujourd'hui.

31. Prix Servant 2000, Conférencier invité ICM 2002.
32. Conférencier invité ICM 2014.
33. Prix Zang Zifen de la Société Mathématique de Pékin.
34. Prix Abel 2020.
35. Médaille Fields 1994.
36. Médaille Fields 2006, entre autres.
37. *Einstein institute of mathematics*, Jerusalem, Israel.
38. Prix Jaffé 1987 de l'Institut de France, conférencier invité ICM 1998.
39. Pour : *the set M is locally connected.*

3.7 DES INTERACTIONS MULTIPLES ET PROMETTEUSES

3.7.1 DE LA GÉOMÉTRIE ET LA DYNAMIQUE À LA TOPOLOGIE

En voici un exemple emblématique à propos d'une conjecture de Fried. Pour un flot d'Anosov, en particulier pour toute perturbation du flot géodésique d'une variété à courbure négative, on dispose d'une fonction ∫ dynamique de Ruelle. La conjecture de Fried porte sur la valeur ∫(0) qui serait un invariant topologique, à savoir la torsion de Reidemeister ; elle est fondée sur sa véracité en courbure constante prouvée par David Fried[40]. Elle est maintenant prouvée dans des cas non analytiques à savoir, en dimension 3, pour le flot géodésique de n'importe quelle perturbation d'une métrique à courbure constante.

3.7.2 DE LA TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE À L'IMAGERIE

L'homologie est le premier outil créé par Poincaré pour distinguer l'un de l'autre deux objets topologiques. L'outil a bien sûr ses faiblesses, par exemple tous les espaces vectoriels sont homologues, mais si on leur retire le zéro, alors l'homologie reconnaît la dimension. Depuis une quinzaine d'années, l'homologie apparaît comme un nouvel outil de calcul dans le traitement d'images, en imagerie médicale principalement. Il n'est pas exclu que Poincaré l'ait espéré, il aura fallu plus d'un siècle pour que ce possible espoir se concrétise.

On peut étudier un objet représenté numériquement par un nuage fini de ses points et détecter en partie sa topologie en considérant les boules de rayons r centrées en chacun de ses points. En faisant varier r de 0 jusqu'au diamètre de l'objet étudié, on peut voir apparaître un cycle (au sens de Poincaré) pour un premier rayon r_0 puis sa disparition pour une valeur r_1 ; on retient cette information par une barre. En faisant cela pour toutes les paires apparition-disparition, on a un code-barre informant de façon combinatoire sur l'objet étudié. Cet outil est largement utilisé sous le nom d'analyse topologique de données, par exemple par une équipe de l'Inria autour de Frédéric Schazal.

40. Fried explique que cette égalité est une version dynamique de la formule du point fixe de Lefschetz.

CHAPITRE 4

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

4.1 HISTOIRE ET CONTEXTE

L'étude de l'histoire des mathématiques commence à se développer à l'échelle internationale dans les débuts du XXe siècle, en lien étroit avec les mathématiques et des maisons d'édition. En France, ce domaine se développe notamment autour des Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques (Irem), pour lesquels la création en 1975 de la Commission histoire et épistémologie des mathématiques a joué un rôle important.

Une autre particularité française réside dans la référence à l'histoire que l'on trouve chez les philosophes des mathématiques, de Léon Brunschvicg à Jean Cavaillès, puis chez Jules Vuillemin par exemple, par opposition à une tradition anglo-saxonne, plutôt logique et analytique. Enfin, il faut noter que le paysage de l'histoire des mathématiques françaises n'échappe pas au phénomène Bourbaki avec les notices historiques des Éléments de mathématiques.

Depuis les années 1980-90 le champ s'est institutionnalisé, un phénomène qui se retrouve en histoire des sciences et techniques ou en didactique et s'est accompagné d'une réflexion théorique et méthodologique sur la discipline.

4.2 AXES DE RECHERCHE

Il y a plusieurs approches dans l'étude de l'histoire des mathématiques. Parmi les plus classiques, on trouve l'établissement de corpus historiques et l'édition de textes. De nouvelles normes et attentes scientifiques y émergent, avec de nouvelles techniques liées aux humanités numériques et la possibilité d'apparats critiques plus riches et étendus, mais également le problème de la pérennité des éditions.

L'histoire des mathématiques se réalise parfois comme composante de l'histoire des sciences et des idées. Elle se développe également en lien avec les méthodes des sciences humaines, en s'attachant à l'analyse d'aspects contextuels, sociaux, culturels, ou institutionnels. Enfin, il existe aussi une histoire des mathématiques conceptuelle, avec une dimension épistémologique, réalisée parfois par des mathématiciens. Ces approches se recoupent et se complémentent. Parmi celles-ci, citons :

- l'étude des pratiques (banques, statistiques, etc.) et des mathématiques dans la société ;
- les méthodes et les techniques quantitatives liées aux humanités numériques ;
- l'intérêt pour les « petits » auteurs, les communautés et toutes les formes de mathématiques (y compris l'enseignement, la vulgarisation, l'ingénierie, etc.). On passe de la vision d'individus isolés et d'exception à une vision collective (institutions, journaux, circulation des savoirs, des techniques, des résultats, etc.).

4.3 STRUCTURATION ET ENJEUX

Le domaine de l'histoire des mathématiques est très bien représenté en France sur l'ensemble du territoire, mais avec une densité importante à Paris et souvent un certain isolement des chercheurs et chercheuses impliqués en province. Les travaux de la communauté française sont reconnus au niveau international, la notoriété de la *Revue d'histoire des mathématiques* (RHM), éditée par la Société mathématique de France (SMF), illustre ce positionnement. Cette reconnaissance se mesure aussi dans les bonnes statistiques de publications françaises dans les principaux journaux : *RHM*, *Historia mathematica* ou *Archive for history of exact sciences*.

Les rattachements institutionnels de ses acteurs et actrices sont par ailleurs variés. Le domaine de l'histoire des mathématiques fait partie des thématiques de la section 41 du CNRS, consacrée aux mathématiques et interactions des mathématiques et relève, en tant que domaine, de la section 25 du Conseil national des universités (CNU). En pratique, les historiennes et historiens des mathématiques sont néanmoins rattachés à plusieurs sections du CNU (72, 25, 17, 21 et 22), et on les trouve dans les différentes composantes des universités (facultés des sciences, facultés des sciences humaines et sociales, Instituts nationaux supérieurs du professorat et de l'éducation), en écoles d'ingénieurs. Elles et ils exercent dans des unités mixtes de recherche rattachées à l'Institut national des sciences mathématiques et de leurs interactions (Insmi du CNRS) ainsi que dans des unités rattachées à l'Institut des sciences humaines et sociales (INSHS du CNRS). Le groupement de recherche Histoire des Mathématiques, structure la communauté.

Récemment, les postes ont surtout été ouverts en INSPE, avec une coloration didactique. Il semble néanmoins important d'insister sur la nécessité de pouvoir affecter, lorsqu'ils le souhaitent, des historiens des mathématiques dans des laboratoires de mathématiques.

CHAPITRE 5

FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES ET MATHÉMATIQUES DISCRÈTES

Le concept de mathématiques discrètes recouvre des domaines variés. S'il est naturel d'y rattacher la théorie des graphes, la combinatoire et ses applications, on peut aussi y intégrer d'autres champs, présents dans des unités d'informatique théorique, et pour lesquels les termes « mathématiques discrètes » ne sont pas forcément les mieux adaptés. Nous avons ainsi choisi d'intégrer ici les aspects de la logique relevant tant des fondements des mathématiques que de leur déploiement en informatique fondamentale, afin de mettre en valeur leur proximité conceptuelle. Nous y intégrons aussi quelques aspects de la théorie des catégories, pour des raisons historiques mais aussi parce que, notamment en France, ces domaines nouent des liens étroits avec l'informatique théorique et la logique. Certaines des thématiques abordées dans ce texte sont donc assez proches de celles traitées dans le Chapitre 9 consacré aux relations entre mathématiques et informatique.

5.1 QUELQUES REPÈRES

Plusieurs figures fondatrices ont permis en France l'émergence des mathématiques discrètes, en particulier la combinatoire, qui s'est développée au milieu du siècle dernier sous l'influence déterminante de Marcel Paul Schützenberger. Médecin et biologiste à ses débuts, ce dernier est surtout connu aujourd'hui pour ses travaux en mathématiques et informatique théorique. Précurseur des développements à venir, il a travaillé dans de multiples directions : les groupes symétriques, la théorie des représentations en lien avec la combinatoire algébrique, les éléments fondateurs de la combinatoire des mots, les théories des codes et des langages formels. D'autres figures emblématiques ont aussi joué un rôle structurant. Il en est ainsi de Xavier Viennot pour la combinatoire énumérative et bijective ou encore de Philippe Flajolet, créateur avec Robert Sedgewick de la combinatoire analytique, qui conjugue combinatoire et analyse complexe, avec diverses applications informatiques pour l'analyse d'algorithmes et de structures de données.

On attribue en général la genèse de la théorie des graphes à Euler, avec, d'une part, la résolution du célèbre problème des « ponts de Königsberg » et, d'autre part, la notion clé de caractéristique d'Euler pour les polyèdres. Ces points de vue mêlés à une vision géométrique et topologique, qui préfigure la notion de genre, vont nourrir la théorie des graphes. Celle-ci a ensuite été popularisée au travers de questions dont l'énoncé est simple mais la résolution un défi longtemps resté ouvert, comme le problème des 4 couleurs de Francis Guthrie (1852). Les applications sont naturelles dans d'autres domaines des sciences (chimie, étude des réseaux, propagation de maladies contagieuses, etc.). Claude Berge a été l'un des fondateurs de la théorie moderne des graphes. Ce domaine reste moins développé dans les laboratoires de mathématiques français que dans ceux de nombreux autres pays, en dépit d'enjeux importants (communications, internet, analyse de réseaux, etc.). De façon générale, ce qu'on appelle parfois les « mathématiques à la hongroise » sont relativement peu développées en France : Timothy Gowers[41] le regrettait encore récemment dans sa leçon inaugurale au Collège de France[42].

Le domaine de la logique, dans un formidable mouvement de formalisation allant de la théorie des ensembles de Cantor à la vérification formelle par ordinateurs en passant par l'arithmétique de Peano, a été nourri en France par diverses influences fondatrices. Il faut citer Jacques Herbrand (logique propositionnelle, fonctions récursives et théorie des nombres) et, plus récemment Jean-Yves Girard et Pierre-Louis Curien qui, en logique linéaire, visent, avec des méthodes algébriques et topologiques, à une formalisation du fonctionnement d'un programme informatique et de la question de l'équivalence entre deux programmes. L'école française est aujourd'hui bien reconnue et a un spectre large de compétences. Sur le versant mathématique, la logique s'intéresse à la théorie des modèles et à la théorie des ensembles dans leurs aspects descriptifs, combinatoires – par exemple la théorie de Ramsey - et applicatifs[43]. Sur son versant informatique, la logique se déploie en direction de l'algorithmique et de l'étude des bases de données, de la théorie des automates, des langages ou encore de la théorie des jeux. La complexité joue un rôle majeur ici. L'étude des moyens effectifs à mettre en œuvre pour résoudre un problème de nature algorithmique s'étend alors, comme discipline mathématique, à l'étude des liens entre les mesures de complexité elles-mêmes, que celles-ci soient exprimées en termes algorithmiques (de temps, d'espace, etc.), logiques ou mêmes topologiques. Dans

41. Médaille Fields 1998.
42. T. Gowers, leçon inaugurale au Collège de France, https://www.college-de-france.fr/site/timothy-gowers/inaugural-lecture-2021-01-21-18h00.htm.
43. Reprenons ici les termes du rapport d'autoévaluation Hcéres de l'Institut de mathématiques de Jussieu-Paris rive gauche (IMJ-PRG) en 2019 : « La recherche en théorie des ensembles est motivée à la fois par des considérations philosophiques sur la nature du raisonnement mathématique et les axiomes nécessaires pour fonder les mathématiques et aussi par des questions techniques intrinsèques. Des idées sophistiquées provenant de la théorie des ensembles, comme par exemple la détermination des jeux, le forcing et la combinatoire infinie, ont été appliquées avec grand succès pour résoudre des problèmes importants en théorie des espaces de Banach, topologie, théorie de la mesure, théorie ergodique et dans d'autres domaines des mathématiques. »

ce qui suit, nous décrivons quelques directions fécondes : la théorie des graphes, celle des modèles et la sémantique des langages de programmation. Nous nous focalisons ensuite sur la combinatoire.

Pour leur développement en France, les mathématiques discrètes ont bénéficié de l'existence de laboratoires structurants, centrés thématiquement (citons par exemple le Laboratoire de mathématiques discrètes fondé par Gérard Rauzy à Marseille, qui était une unité propre du CNRS). Un mouvement général de fusions et de restructurations a fait que ces structures ont peu à peu rejoint de grands laboratoires généralistes. Les anciennes UMR « Équipe combinatoire et optimisation » et « Logique mathématique » ont ainsi été rattachées à l'Institut de mathématiques de Jussieu-Paris rive gauche, dans une dynamique qui a privilégié les interactions. Cette dynamique a permis d'accompagner le développement récent, dans ces équipes, des applications à d'autres champs des mathématiques, notamment en algèbre d'opérateurs, en théorie ergodique, en analyse fonctionnelle et en géométrie algébrique, mais elles restent ouvertes aux applications futures de la logique en mathématiques et en informatique fondamentale.

5.2 DES ENJEUX IMPORTANTS

Les mathématiques discrètes et les mathématiques des fondements (logique, catégories, etc.), comprises en un sens large, sont au centre d'enjeux importants, à la fois théoriques et technologiques. Elles présentent ainsi de nombreux points communs avec certains aspects à l'interface mathématiques-informatique, décrits dans le Chapitre 9 de ce volume.

Parmi ces enjeux, on peut citer les liens entre combinatoire et théorie du contrôle, l'analyse d'algorithmes, le calcul formel et l'optimisation combinatoire (en particulier pour les aspects géométriques), les liens entre graphes et réseaux (optimisation discrète, télécommunications, internet, réseaux sociaux et SHS), certains problèmes de certification d'algorithmes et de preuves, les assistants à la conception de preuve, ou encore toute une partie de la physique statistique et des probabilités (théorie des graphes aléatoires, algorithmes probabilistes, etc.). Les aspects mathématiques, informatiques et physiques de ces questions sont multiples et ne se réduisent pas aux thématiques abordées ici.

Un peu à la façon dont les probabilités ont été décriées en leur temps par une frange de la communauté mathématique française, les mathématiques discrètes ont longtemps été tenues à la marge. C'est l'une des raisons de leur grande absence au sein des laboratoires de mathématiques, compensée par une présence renforcée dans les laboratoires d'informatique, avec des effets positifs et dynamisants sur le domaine. Plusieurs thématiques, étroitement liées à l'informatique, sont ainsi fortement ancrées en mathématiques. La notion de complexité (avec les notions de problème P ou NP-complet) est devenue centrale et conduit à repenser en profondeur les mathématiques. Il en est de même pour la théorie de la démonstration, l'algorithmique, la calculabilité, les langages de programmation, ainsi que les techniques de vérification de programmes, la théorie des modèles et des ensembles : tous ces domaines ont fait profondément évoluer les mathématiques au cours des cinquante dernières années, notamment en France.

Les mathématiques discrètes font désormais partie de plein droit des domaines centraux des mathématiques. En 2021, Laszlo Lovász et Avi Wigderson ont ainsi reçu le prix Abel « pour leurs contributions fondamentales à l'informatique théorique et aux mathématiques discrètes, et pour leur rôle de premier plan dans leur transformation en domaines centraux des mathématiques modernes ». Leurs résultats, qui relèvent de la théorie de la complexité et de la théorie des graphes, balaient un spectre de *résultats fondamentaux* allant de la réduction des réseaux (avec l'algorithme LLL) à la sécurité informatique. Au niveau français, la création d'une chaire en combinatoire pour Gowers au Collège de France témoigne également d'un changement profond de paradigme.

5.3 QUELQUES DIRECTIONS MARQUANTES

Rendre compte de l'ensemble de l'activité en mathématiques discrètes, en logique et en fondements des mathématiques est impossible tant le champ d'activité est immense et tant les applications et les interactions sont nombreuses. Nous avons donc sélectionné quelques thématiques représentatives.

5.3.1 THÉORIE DES GRAPHES

La théorie des graphes est considérée comme une branche des mathématiques discrètes. La recherche dans ce domaine a connu un essor considérable avec l'avènement de l'informatique. De nombreux problèmes d'optimisation discrète sont modélisés avec des graphes et ont donné lieu à de nombreuses questions, théoriques et appliquées. Son spectre d'applications est très large, au cœur d'enjeux technologiques et sociétaux contemporains. On peut distinguer quatre grands sous-domaines : la théorie des graphes en combinatoire algébrique, analytique et énumérative ; la théorie des graphes en combinatoire extrémale et probabiliste (dont les graphes aléatoires) ; la théorie structurelle et géométrique ou topologique des graphes ; enfin, l'algorithmique des graphes et leurs liens avec la théorie de la complexité.

Quelques grands théorèmes peuvent être associés à ces champs. Citons le théorème des quatre couleurs et le théorème des graphes parfaits, liés au nom de Claude Berge, que l'on peut associer à la théorie structurelle ; citons aussi le théorème de Courcelle qui, liant logique, structure et algorithmique, a permis l'essor de la complexité paramétrée, théorème dont a découlé un foisonnement de travaux sur les largeurs arborescentes dans les graphes et la recherche d'algorithmes efficaces pour résoudre une grande variété de problèmes quand ces largeurs sont bornées ; citons encore, associé à la théorie extrémale, le théorème de Ramsey sur l'existence de sous-graphes complets monochromatiques de taille n de graphes complets coloriés et suffisamment grands, qui a donné naissance à la théorie extrémale.

Si les liens avec la combinatoire sont assez évidents, ils ne sont pas exclusifs. La géométrie et la topologie sont aussi interpellées lorsque, comme c'est le cas dans de nombreuses applications en informatique théorique, les graphes considérés sont plongés dans un espace métrique ambiant qu'il faut décrire et analyser. La théorie des graphes en combinatoire extrémale et en combinatoire probabiliste est une discipline très active, avec des outils puissants et sans cesse affinés. En théorie structurelle et géométrique ou topologique des graphes, plusieurs grandes conjectures servent de motivation à l'introduction de variantes plus accessibles, source d'approches nouvelles pour la résolution des conjectures originelles. Il en est de même pour certains problèmes d'optimisation dans les graphes, réputés hors de portée en général (au sens de la théorie de complexité).

Ces dernières années, on a ainsi constaté une activité intense en algorithmique des graphes, avec les algorithmes d'approximation (typiquement à facteur constant), qui offrent une réponse efficace au « problème du voyageur de commerce », en garantissant que le coût de la solution obtenue n'excède que d'un facteur α celui de la solution optimale, pour un certain α qu'on cherche à minimiser. Les techniques utilisent en général la programmation linéaire, les matroïdes et les probabilités. Se sont également développés les algorithmes à paramètre fixé dont le principe est d'identifier un paramètre qui mesure la difficulté du problème, de le fixer et de chercher à obtenir le meilleur algorithme possible, et enfin les algorithmes sous-exponentiels ou quasi-polynomiaux (suite au résultat fondamental obtenu par Laszlo Babai en 2015-2017 sur le problème de l'isomorphisme de graphes, qui entre dans ce cadre).

En théorie des graphes, si la recherche française est visible au niveau international dans plusieurs domaines, elle ne les couvre pas tous. La France possède des équipes en théorie structurelle, géométrique et algorithmique des graphes, avec des chercheurs et des chercheuses de premier plan. La recherche versant combinatoire est également particulièrement active. Toutefois, en dépit de quelques recrutements récents de chercheurs étrangers, on observe un manque criant de chercheurs en chercheuses en combinatoire extrémale : alors que cette thématique occupe une place centrale au Royaume-Uni et aux États-Unis, elle est un peu marginale en France.

Spécificité française déjà évoquée, les quatre sous-domaines de la théorie des graphes concernent majoritairement des chercheurs et des chercheuses en poste dans des laboratoires d'informatique, à la différence de ce qui se passe à l'étranger.

5.3.2 THÉORIE DES MODÈLES

En épistémologie, la notion de modèle se rattache au nom d'Alfred Tarski. Elle interroge la différence entre syntaxe et sémantique, en essayant de séparer les modèles formels, de type axiomatique, de leurs réalisations (on parle aussi, dans ce contexte, de « structures »). Cette problématique est centrale pour la logique mathématique et les questions de fondements, mais aussi en philosophie des sciences. Les débats, au tournant des années 1900, sur les géométries non euclidiennes ou sur les idées de Hilbert concernant l'axiomatisation de la géométrie euclidienne rentrent typiquement dans ce cadre. La théorie des modèles propose une approche logique et mathématique à ces questions.

Les théorèmes de compacité (en logique), les théorèmes de complétude et d'incomplétude de Gödel, le théorème de Löwenheim-Skolem sont parmi les résultats fondateurs du domaine. Celui-ci a connu un développement important dans les années 1950 - 1960, avec deux parties distinctes clairement identifiées. La première partie examine les modèles de façon tout à fait abstraite. La deuxième partie est tournée vers les applications et se concentre sur des exemples algébriques, des questions concrètes de décidabilité ou d'indécidabilité et participe au développement de la théorie de la stabilité, dans le but de dégager des critères de classification des modèles.

L'utilisation de la théorie des modèles est souvent citée comme exemple emblématique d'interactions fécondes au sein des mathématiques, des séries de Poincaré à l'intégration motivique, en passant récemment par l'étude des espaces de Berkovich. Nous prendrons donc ici l'algèbre comme fil conducteur. Depuis les résultats de Claude Chevalley et Tarski, la théorie des modèles des corps avec opérateurs a connu des avancées spectaculaires ; ont été étudiés tout d'abord les corps algébriquement clos, puis les corps réels clos ou différentiels, les corps p-adiques, les clôtures différentielles de corps, etc. Citons aussi la conjecture de Zilber-Pink en théorie des nombres et les travaux de B. Zilber sur les intersections atypiques et les corps algébriquement clos exponentiels. Ces approches ont conduit à de nombreuses applications, notamment en géométrie diophantienne, en géométrie algébrique et en algèbre différentielle ou de différence. L'o-minimalité, propriété importante du corps des réels, donne un autre exemple d'interactions avec les géomètres réels et analytiques et les théoriciens des nombres, notamment autour de la conjecture d'André-Oort. Les communautés de mathématiques et d'informatique théorique ont développé ainsi dans la durée des intérêts communs.

Dans une veine plus algorithmique, la théorie des modèles finis permet une approche logique de la théorie des bases de données. Méthodes combinatoires et théorie de la complexité y interviennent également, dans un mouvement plus global de la logique en informatique cherchant à combler le fossé entre sémantique et questions algorithmiques. Il s'agit de comparer des fragments logiques, considérés comme des langages d'interrogation généralisés, en termes d'expressivité. L'une des principales difficultés réside dans la recherche d'invariants suffisamment consistants pour montrer qu'une requête n'est pas exprimable dans une logique donnée.

5.3.3 SÉMANTIQUE DES LANGAGES DE PROGRAMMATION

La correspondance de Curry-Howard permet de relier preuves et programmes. Les types (ou « spécifications ») et les programmes correspondent respectivement aux formules et aux preuves dans les systèmes de logique formelle. Cette correspondance est le fondement d'une ligne de recherche vivante qui a contribué à des applications pertinentes, tant dans le contexte de la théorie et de la pratique de la programmation fonctionnelle que dans celui de la vérification formelle de preuve. Elle est entre autres liée à la sémantique dénotationnelle, qui, présentée de façon concise, analyse les programmes comme des fonctions. Le terme sémantique correspond au lien entre le programme et l'objet mathématique signifié par le programme : par exemple, dans le cadre fonctionnel, un programme est vu comme une fonction et le terme sémantique n'est autre que la suite des états de la machine qui exécute ce programme en sémantique opérationnelle. Ce domaine de la sémantique est lié à la logique linéaire, introduite par Jean-Yves Girard dans les années 80 et dont l'objectif est d'analyser finement la consommation des ressources lors de l'évaluation des programmes.

La théorie des catégories offre des outils pour reformuler de manière fructueuse certaines questions de sémantique dénotationnelle dans le prolongement de la correspondance de Curry-Howard. C'est le fil conducteur que nous avons choisi de suivre dans cette section. Le développement en France de la théorie des catégories est très intéressant, quoique paradoxal. Des mathématiciens français, comme Cartan, ont eu un rôle moteur dans l'utilisation des catégories (algèbre homologique, théorie des faisceaux, etc.) lors du développement de la topologie algébrique dans les années 50. Grothendieck, dont l'œuvre majeure est très largement organisée autour de principes catégoriques, a donné au sujet un nouvel essor dans le contexte de la géométrie algébrique : catégories abéliennes, schémas, topos, utilisation systématique des foncteurs adjoints, etc. La France a ainsi joué un rôle important dans le développement des catégories comme outil ; cependant, le développement de la théorie pour elle-même a dans l'ensemble été négligé au sein des laboratoires de mathématiques, avec des exceptions notables comme Charles Ehresmann.

En logique, le langage de la théorie des catégories permet de formaliser l'intuition de la dualité, dans le but de relier syntaxe et sémantique. La dualité de Stone, exemple paradigmatique de dualité entre espaces topologiques et structures ordonnées, se révèle être un outil puissant dans l'étude de la logique propositionnelle. La traduction d'une propriété de nature logique en un énoncé topologique permet ainsi d'exploiter les outils de la topologie générale. Le théorème de complétude de Gödel pour la logique du premier ordre devient une conséquence du théorème de Baire et de la dualité de Stone.

Dans les travaux des équipes de mathématiques et d'informatique impliquées, les catégories se retrouvent aujourd'hui tant du côté de la théorie des types que celui de la théorie des modèles. Revenons plus spécifiquement sur l'aspect catégories et sémantique. Une sémantique dénotationnelle pour une classe de programmes consiste donc à trouver des invariants appropriés pour les calculs dans un certain type de structure mathématique. Dans le contexte de Curry-Howard version catégorique, les programmes et les preuves correspondent alors à des morphismes dans les catégories appropriées. L'avatar le plus récent de la sémantique dénotationnelle est l'interprétation homotopique, où un type est un espace topologique. Afin de détecter quand deux démonstrations peuvent être équivalentes, une notion d'homotopie entre ces deux démonstrations est développée. L'idée est née en Allemagne avec Martin Hofmann et Thomas Streicher, mais s'est véritablement développée à partir de la fin de la décennie 2000 avec Vladimir Voevodsky et la théorie homotopique des types (HOTT). Cette approche est assez éloignée de la logique linéaire et a pour l'instant donné surtout des applications mathématiques comme le calcul effectif de groupes d'homotopie des sphères.

Ces développements, ainsi que ceux autour des démonstrations, des programmes et des « assistants de preuve » sont source d'idées novatrices. La théorie homotopique des types suggère de nouvelles manières d'aborder les fondements des mathématiques, en reconnaissant le rôle prépondérant de la notion d'égalité, puis celle d'égalité entre preuves d'égalité, etc. Dans un texte au nom évocateur (et un brin provocateur), *Formalisation mathématique, certification logicielle, même combat,* publié dans la gazette de la SMF en 2014, Pierre-Louis Curien considère qu'« il est raisonnable de penser que les assistants de preuve (ou plutôt leurs futures versions, mieux adaptées aux non spécialistes) seront très bientôt (dix, vingt ans ?) et dans de nombreux domaines des mathématiques des compagnons aussi naturels que (La)TeX. Non seulement pour des besoins de calculs (les logiciels de calcul formel offrent déjà pour cela une aide précieuse) ou des vérifications fastidieuses, mais aussi pour « circuler » dans le cœur d'une démonstration complexe au fur et à mesure de sa construction et s'assurer de sa correction globale. Ceci allant de pair avec la mise en place d'outils permettant de développer des environnements sûrs pour les développeurs et utilisateurs des logiciels les plus divers. »

Si l'équivalence des programmes est une notion fondamentale de la sémantique des langages de programmation, on voit également se développer la programmation probabiliste permettant de modéliser des informations statistiques ou incertaines, avec des applications à la sécurité et la confidentialité. Cela demande donc de comprendre la sémantique des langages de programmation probabiliste et de développer des méthodes formelles pour spécifier et vérifier les propriétés des programmes.

Sur le versant informatique, la logique joue un rôle central, à la fois comme outil et comme objet d'étude dans le domaine de la vérification automatique de systèmes informatiques, dont l'objet est d'établir des garanties formelles sur la fiabilité d'un système. Il s'agit dans un premier temps de développer des logiques permettant de formaliser des caractéristiques des systèmes, d'étudier des propriétés telles que la décidabilité, la complexité ou l'expressivité, puis de développer les méthodes formelles qui permettent d'élaborer les algorithmes de vérification pour ces logiques.

Pour conclure, l'effervescence théorique constatée avec la sémantique des langages de programmation peut s'observer dans plusieurs domaines à l'interface des mathématiques et de l'informatique : des idées d'origines très différentes se rencontrent et se fertilisent pour donner naissance à de nouveaux champs théoriques et de nouveaux paradigmes.

5.4 UN FOCUS SUR LA COMBINATOIRE

Nous l'avons dit au début de ce chapitre, la combinatoire a une longue tradition en France, qui se joue pour l'essentiel encore aujourd'hui dans les laboratoires d'informatique ou de mathématique/informatique. Sans remonter à Pascal, les français Marcel-Paul Schützenberger, Xavier Viennot ou Philippe Flajolet ont marqué la période récente. Grâce à un travail fécond de structuration, la France a joué un rôle moteur dans l'émergence de la combinatoire ; de grandes conférences y ont été initiées et jouent un rôle important dans le domaine. Ainsi, les deux premières éditions de la conférence *Formal Power Series and Algebraic Combinatorics* (FPSAC) ont été françaises ; dès la troisième édition, FPSAC est devenue une conférence internationale. Le même phénomène a eu lieu avec la conférence *Words* pour la combinatoire des mots. L'axe franco-québécois, avec en particulier l'UQAM côté québécois, a eu aussi un rôle structurant, qui s'est néanmoins atténué au fil des ans. Au niveau européen, le séminaire Lotharingien de combinatoire est une institution dans le domaine. Il existe donc aujourd'hui une forte tradition française en théorie combinatoire, sous ses multiples déclinaisons (algébrique, énumérative, etc., versions exacte ou asymptotique, etc.) et l'on peut dire que l'école combinatoire française est bien ancrée dans le paysage international.

L'étude des structures discrètes telles que les permutations, les mots, les arbres, les graphes, les cartes, les polyominos, est au cœur de la combinatoire ; on parle de structures de données en informatique. Il s'agit alors de les compter, de les classer, de les engendrer, de déterminer leurs propriétés moyennes, extrémales ou asymptotiques. La richesse de la combinatoire se lit dans les multiples formes et versions sous lesquelles elle se décline :

- la combinatoire énumérative et bijective établit des bijections explicites entre des familles permettant de les compter, de comprendre la structure d'un objet, de transporter les propriétés combinatoires, pouvant ainsi contribuer à leur engendrement aléatoire ;

- la combinatoire analytique et probabiliste étudie les propriétés asymptotiques et probabilistes des objets combinatoires, à l'aide de séries génératrices et de méthodes analytiques ;

- la combinatoire algébrique étudie les objets combinatoires à travers le prisme de leurs structures algébriques : monoïdes, groupes et leurs représentations, algèbres, treillis, algèbres de Hopf combinatoires, algèbres amassées ;

- enfin, la combinatoire géométrique associe à des objets combinatoires des réalisations géométriques et étudie les structures géométriques discrètes sous-jacentes : polyèdres, polytopes, associaèdres, permutoèdres, etc.

La combinatoire énumérative s'est tout d'abord intéressée au dénombrement exact. La décomposition symbolique des structures discrètes a permis d'établir un dictionnaire puissant entre suites de comptage de classes combinatoires et séries génératrices. Un exemple paradigmatique en est la transformation en équations fonctionnelles (ou différentielles) de la description récursive de structures de type arbres. Un autre exemple est donné par la théorie des espèces de structures de André Joyal, qui mélange des techniques de séries génératrices combinatoires à des idées provenant de l'algèbre universelle et de la théorie des catégories : une espèce de structure est un endofoncteur de la catégorie des ensembles avec bijections. La notion d'espèce généralise ainsi la notion de classe combinatoire étiquetée et la formalisation de Joyal, en termes catégoriques. Elle permet d'englober l'action du groupe symétrique dans l'objet lui-même, ce qui donne un outil puissant pour la calculer grâce à l'introduction de séries encodant les caractères de cette action.

Sous l'influence de Flajolet, grâce à des méthodes de séries analytiques et d'intégrales de contour, la combinatoire énumérative s'est intéressée au dénombrement, avec en point de mire l'étude de la complexité des algorithmes. Le mot « analytique » fait référence à l'analyse complexe : les valeurs des paramètres des fonctions génératrices sont étendues à des arguments complexes. Le livre de Flajolet et Robert Sedgewick, en posant les bases de la combinatoire analytique, a eu un rôle fondateur dans ces problématiques et les problèmes asymptotiques.

Un point de vue fécond qui s'est développé plus récemment a été de classer les problèmes de dénombrement au travers d'une hiérarchie entre séries génératrices. Les problèmes de dénombrement asymptotique se traduisant en l'étude asymptotique des coefficients de fonctions génératrices, la nature même des équations ou des systèmes d'équations fonctionnelles sous-jacents vérifiés par ces séries reflète celle des objets. Les travaux récents de Mireille Bousquet-Mélou sont une illustration de la vitalité du domaine.

Dans un cadre plus large, le GDR Équations fonctionnelles et interactions, créé en 2019, témoigne d'interactions fructueuses et pluridisciplinaires autour de ces questions puisqu'il considère ces équations simultanément selon des points de vue algébrique, algorithmique, arithmétique, combinatoire, logique, géométrique et physique. La combinatoire analytique s'est en effet révélée être particulièrement riche d'interactions avec d'autres domaines des mathématiques : physique statistique, probabilités, calcul formel, algèbre. Elle a ainsi permis aux combinatoriciens de se rapprocher des probabilistes : lorsque la taille d'un système aléatoire atteint l'infini, un objet discret peut se transformer en un objet continu. Les phénomènes limites continus sont souvent plus parlants que les phénomènes discrets et apportent des réponses universelles ; le mouvement brownien en est l'illustration. Les rapprochements avec le milieu de la physique statistique ont été tout particulièrement féconds autour de l'étude des chemins auto-évitants comme modèle de polymères, des cartes planaires, des exposants critiques.

Pour revenir à l'interface entre mathématiques et informatique, mentionnons que l'étude des paramètres caractéristiques d'objets aléatoires est, de plus, utile à l'analyse en moyenne des algorithmes ; les limites probabilistes permettent, elles, de comprendre les propriétés de grands objets tirés au hasard. La connaissance de distributions limites et de leurs facteurs d'échelle respectifs permet de décrire la forme des graphes aléatoires, d'étudier des problèmes de satisfiabilité des contraintes, et de séparer les comportements réguliers des comportements chaotiques.

L'étude des cartes aléatoires est un exemple marquant de ce mouvement d'aller-retour entre discret et continu. Une carte est un graphe dessiné sur une surface orientée. De par leur nature topologique, géométrique et combinatoire, l'étude des cartes se situe à la confluence de la combinatoire, des probabilités et de la physique (statistique, mathématique), avec une extrême diversité tant dans les problématiques que dans les méthodes mobilisées. Leur étude met en œuvre, en effet, toutes les facettes de la combinatoire, avec des approches variées, bijectives, algébriques, probabilistes, etc. Enfin, au centre de problématiques récentes, les cartes sont encore source de modèles pour la gravitation quantique, dont l'objet est de définir un espace-temps relativiste et quantique : les limites de cartes de grande taille décrivent la théorie quantique de Liouville.

De son côté, la combinatoire algébrique munit des structures combinatoires classiques (arbres, partitions, permutations, fonctions de parking) de structures algébriques. Un problème typique du domaine est le « problème des mots » : trouver des bases d'algèbres libres associées à une structure algébrique donnée (comme celle d'algèbre de Lie) et les utiliser dans un contexte algorithmique ou numérique (pour les algèbres de Lie : bases de Hall, problème de Baker-Campbell-Hausdorff). Cette approche permet de conforter les fondements de la combinatoire en enrichissant d'un point de vue structurel algébrique le calcul de séries génératrices pour l'énumération de structures. Nous avons eu l'occasion de mentionner le calcul des espèces, qui en est l'une des meilleures illustrations. La théorie algébrique des opérades et ses différentes variantes (symétriques, non symétriques, colorées, etc.) entre également dans ce cadre général. Signalons aussi la découverte par Alain Connes et Dirk Kreimer du rôle des algèbres de Hopf combinatoires en théorie quantique des champs perturbative, qui a joué un rôle important dans le développement récent de la thématique, présente également en analyse numérique, en théorie des systèmes dynamiques et en théorie des équations différentielles stochastiques. La création en 2013 d'une quatrième série des *Annales* de l'IHP, consacrée de façon plus générale à l'interface entre combinatoire et physique, illustre bien cette dynamique.

La combinatoire des mots s'intéresse quant à elle aux mots (finis ou infinis). Elle analyse les sous-mots et les répétitions de motifs, décrit les propriétés asymptotiques ou aléatoires des mots et entretient des liens étroits avec des domaines variés comme l'algorithmique du texte, la bio-informatique ou, au sein des mathématiques, les systèmes dynamiques symboliques, la théorie des nombres, la théorie des groupes et les probabilités. Elle a été particulièrement active en France et s'est nourrie de ses nombreuses interactions, à la convergence entre théorie des pavages, dynamique symbolique, combinatoire et théorie combinatoire des groupes. Cette confluence de points de vue a d'ailleurs permis d'établir que la compréhension des systèmes dynamiques multidimensionnels passe par la calculabilité. Ce constat a émergé dès les années 60, dans le cadre des pavages, avec l'introduction des tuiles de Hao Wang, formalisation des sous-décalages de type fini multidimensionnels introduite à l'origine en logique. Il s'est ensuite cristallisé 50 ans plus tard avec l'exemple frappant de la caractérisation des entropies des sous-décalages de type fini multidimensionnels comme nombres récursivement énumérables à droite.

5.5 UNE VITALITÉ À PRÉSERVER DANS UNE SITUATION DE PÉNURIE DE POSTES

La combinatoire en général, et plus particulièrement la théorie des graphes, a pu souffrir d'un manque de reconnaissance au sein de la communauté mathématique française, qui a eu tendance par le passé à considérer ce domaine comme un vivier de « petits » problèmes, sans « grande » théorie unificatrice derrière. Les choses évoluent aujourd'hui de manière plus favorable, en raison d'une connexion de plus en plus affirmée entre la combinatoire et les autres domaines des mathématiques et une visibilité accrue des combinatoriciens dans la communauté (médailles Fields, Prix Abel, présidence de l'IMU).

On observe aussi une évolution de certains pans des mathématiques discrètes qui sont désormais étudiés en lien avec d'autres thématiques. Ce mouvement a permis une irrigation mutuelle et la perméabilité entre domaines s'est fortement accrue. Des méthodes théoriques puissantes sont désormais reconnues : la théorie des modèles en est un exemple révélateur. Apparaît un arbre de plus en plus touffu : de nombreuses branches ont été créées, de nouvelles émergent, mais il faut veiller à ce que le tronc reste solide.

De plus en plus d'interactions entre combinatoire, théorie des graphes et informatique théorique sont à prévoir : usage du calcul intensif pour valider ou invalider des conjectures ou des approches possibles de preuves, formalisation des preuves par des assistants de preuve. La France est bien préparée à cette évolution à venir puisque chercheurs et chercheuses concernés sont majoritairement dans les laboratoires d'informatique. Il faut cependant veiller à renforcer la place des mathématiques discrètes au sein des mathématiques. L'enjeu est de taille, avec des applications multiples : calcul quantique, IA, télécommunications et réseaux, certification, cryptographie.

Plusieurs éléments de vigilance sont à noter. La communauté mathématique s'empare de plus en plus des problématiques des mathématiques discrètes : la partie optimisation continue des mathématiques françaises est ainsi bien intégrée dans la communauté recherche opérationnelle. Les liens avec la science des données et les statistiques sont de plus en plus forts. Pour la modélisation de problèmes pratiques, associée très souvent au génie industriel, l'intégration de la communauté des mathématiques discrètes semble moins claire, en dépit d'enjeux technologiques et industriels et de débouchés potentiels. Ceci s'observe déjà sur le front de la formation où les mathématiques discrètes sont enseignées essentiellement dans les filières en informatique : les étudiants de mathématiques fondamentales tendent à méconnaître la théorie des graphes par exemple.

Par ailleurs, on l'a vu, pour leur développement en France, logique et mathématiques discrètes ont bénéficié de l'existence de laboratoires structurants. Ces équipes de mathématiques discrètes sont désormais intégrées à des laboratoires généralistes, renforçant l'intégration de ces thèmes au sein des mathématiques. La reconnaissance de ces thèmes, en matière de fléchages de poste dans ces laboratoires généralistes et dans un contexte de pénurie de poste, est à surveiller.

Le développement des mathématiques discrètes en France doit en effet beaucoup à la communauté informatique en termes de postes. Malheureusement, pointe en informatique une tendance à privilégier pour les premiers recrutements les thématiques prioritaires pour l'enseignement au détriment de thématiques théoriques. De son côté, le faible contingent de postes en mathématiques fragilise encore plus les possibilités d'ouvertures vers les mathématiques discrètes ; en temps de pénurie de postes, les disciplines ont tendance à se replier sur leur cœur de métier et les sujets un peu à la marge des grands domaines en pâtissent tout particulièrement. Il en est ainsi de la logique mathématique et de la théorie des modèles.

CHAPITRE 6

LES PROBABILITÉS

6.1 HISTORIQUE ET CONTEXTE

La France et les probabilités ont une longue histoire en commun. Il est universellement admis que ce sont Pascal et Fermat qui, dans la première moitié du XVII^{e} siècle ont fondé le calcul des probabilités. À la fin du XVIII^{e} siècle et au début du XIX^{e}, les traités de Laplace traitent tout autant des aspects analytiques que du rôle des probabilités dans les sciences physiques, sociales ou économiques. Son *Essai philosophique sur les probabilités*, issu d'une conférence faite lors de l'inauguration de l'École normale supérieure en 1795, contient déjà les prémices de ce qu'on appelle aujourd'hui la modélisation aléatoire. Dans la première moitié du XX^{e} siècle, Émile Borel puis Paul Lévy ont imprimé leur marque, le second pouvant être considéré comme un des pères fondateurs de la théorie des processus stochastiques.

Malgré l'intérêt porté par de nombreux mathématiciens renommés et leurs apports à la théorie, les probabilités, jusque dans les années 1980, n'ont pas eu la reconnaissance accordée à d'autres domaines des mathématiques. La situation a radicalement changé depuis, et les médailles Fields de Wendelin Werner (2006), Stanislav Smirnov (2010), Martin Hairer (2014) ou Hugo Duminil-Copin (2022) en sont une des expressions visibles (parmi d'autres). Les probabilités françaises ont très largement contribué à cette évolution. Par exemple, six des 14 récipiendaires du prix Loeve, créé en 1993 pour honorer des probabilistes remarquables, sont français. Tout aussi important, 18 des 76 récipiendaires du prix Rollo Davidson, créé en 1976 pour récompenser de jeunes talents probabilistes, sont français, exerçant tous sauf deux en France au moment de l'attribution du prix. L'école de probabilités française s'exporte également très bien et un grand nombre de ses talents est parti chercher ailleurs (Suisse, États-Unis, Royaume-Uni) des conditions de travail et un environnement qu'ils estiment plus favorables : dans certains couloirs de laboratoires de probabilités aux États-Unis ou en Suisse allemande on parle beaucoup français.

L'école moderne de probabilités française est née à Strasbourg sous l'impulsion de Paul André Meyer, grand nom de la théorie des processus stochastiques et fondateur du fameux « *Séminaire de probabilités* » dont les volumes ornent les étagères de tous les grands noms des probabilités des années 1980-2000 ; et à Paris sous l›impulsion de Jacques Neveu, directeur emblématique du laboratoire de probabilités (de Sorbonne Université) devenu le LPSM, et de Marc Yor. La fin des années 80 et le début des années 90 ont vu l'explosion d'une génération dorée de probabilistes français au meilleur niveau mondial, dont Jean-François Le Gall pour n'en citer qu'un. Cette génération a obtenu, de 86 à 96, sept prix Rollo Davidson et a tracé la voie pour les générations suivantes. Un fait marquant est en effet que le niveau et la reconnaissance de l'école française sont restés au plus haut, avec un renouvellement constant des générations. Un autre fait marquant est que les probabilités de haut niveau sont désormais présentes dans de nombreux laboratoires de mathématiques, à Paris et en Île-de-France mais aussi dans les centres de province (Lyon, Marseille, Nancy, Rennes, Toulouse, entre autres). Enfin, comme autre fait marquant, notons que les probabilités interviennent comme outil majeur dans de nombreux domaines d'interaction des mathématiques (physique, informatique, biologie), ce qui en retour les dynamise par les questionnements extérieurs qu'ils suscitent.

6.2 LES GRANDS AXES DE RECHERCHE

Mondialement connues pour ses spécialistes en théorie des processus et en calcul stochastique jusqu'aux années 2000, les probabilités françaises se sont grandement diversifiées, apportant des contributions essentielles dans de nombreux domaines. En voici une liste non exhaustive :

6.2.1 PHYSIQUE STATISTIQUE : PERCOLATION, SLE, SYSTÈMES DE PARTICULES, GÉOMÉTRIE BROWNIENNE, CARTES ALÉATOIRES ET DOMAINES CONNEXES

Introduite en France dans les années 80 par un petit groupe issu de l'école S. R. Srinivasa Varadhan, la mécanique statistique alliait l'étude de dynamiques stochastiques (Ising, processus d'exclusion, etc.) et de leurs mesures d'équilibre (mesures de Gibbs) avec un focus sur les problèmes de transition de phase (non unicité des mesures de Gibbs). Les idées de Oded Schramm (SLE[44]) ont apporté une évolution majeure en reliant en particulier les modèles planaires de mécanique statistique après renormalisation au calcul stochastique d'Itô. Les liens avec les modèles de percolation et la théorie conforme des champs ont été ensuite mis en évidence. Quoique issus de problématiques différentes (gravité quantique de Liouville), les modèles de triangulation ou quadrangulation du plan ou de la sphère sont également reliés après renormalisation à des objets stochastiques introduits par l'école française, et par ailleurs, sous une forme plus analytique, au chaos multiplicatif de Jean-Pierre Kahane.

Développement du calcul stochastique et partageant avec l'item précédent l'idée du passage du discret au continu après renormalisation, la géométrie brownienne a également fourni ces dernières années un vaste programme d'étude et de problèmes, dont l'objectif est sans doute (comme précédemment) de montrer l'universalité de l'objet limite, tout comme la loi gaussienne est universelle dans le théorème central limite.

Ces thèmes, dont les développements vont bien entendu au-delà de ces quelques lignes introductives, sont aujourd'hui au cœur des probabilités. Les probabilistes nationaux y brillent particulièrement.

6.2.2 MILIEU ALÉATOIRE : VERRES DE SPIN, MARCHES EN MILIEU ALÉATOIRE, MATRICES ALÉATOIRES ET DOMAINES CONNEXES

Initié par l'étude des verres de spins, le monde du milieu aléatoire est une composante à part entière du paysage probabiliste. Si le thème des matrices aléatoires (qui résonne également en statistique et motive le développement des probabilités libres) est en pointe en France avec des représentantes et représentants de tout premier plan, les dynamiques (marches, processus de branchement, etc.) en milieu aléatoire sont un champ d'étude important dont les applications en physique et en biologie restent en grande partie à explorer. Les liens de ce thème avec l'algèbre, la géométrie et l'analyse complexe se révèlent féconds.

Le souci d'universalité est également au centre des préoccupations sur les matrices, tandis que les phénomènes de ralentissement (vieillissement), d'extinction ou de renforcement dus au milieu sont centraux pour les dynamiques en milieu aléatoire.

6.2.3 INTERACTION AVEC LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES : DU MICROSCOPIQUE AU MACROSCOPIQUE

Également confidentiels dans les années 80, les liens entre équations stochastiques et les EDP se sont renforcés dans le monde académique. En commençant par l'interprétation microscopique (système de particules en champ moyen) de modèles macroscopiques non linéaires (McKean-Vlasov) et le phénomène de propagation du chaos, le domaine n'a cessé de se développer.

On peut noter, en particulier, les travaux récents identifiant le mouvement brownien comme l'objet limite naturel de systèmes déterministes de sphères dures ; ces travaux sont en lien étroit avec la géométrie brownienne évoquée précédemment.

Le thème mélange aujourd'hui, à travers différents projets (GDR, ANR, ERC) et de nombreuses collaborations, des membres des deux communautés.

Au-delà d'un intérêt commun pour des problèmes, les deux communautés développent indifféremment les outils pertinents (inégalités fonctionnelles et concentration de la mesure, méthodes de transport optimal, grandes déviations, etc.). Une des nouveautés importantes des dix dernières années est l'accent mis sur les contrôles quantitatifs, y compris pour les comportements limites (vitesses de convergence).

Cet aspect rebondit en direction des méthodes numériques (discrétisation, simulation de processus, algorithmes de Monte-Carlo), et tout récemment d'une partie de la statistique.

6.2.4 EDP STOCHASTIQUES, THÉORIE DE LA RÉGULARITÉ ET CHEMINS RUGUEUX

Le thème, très présent au niveau international, était moins représenté en France, mais connaît un essor récent, notamment à la suite des travaux de Martin Hairer. Introduits puis développés dans les années 1990, les chemins rugueux présentent une alternative au calcul stochastique d'Itô permettant de s'affranchir de certaines contraintes probabilistes. La construction de solutions pour des EDP stochastiques singulières (comme KPZ) donnée par Hairer repose en partie

44. Acronyme de *Schramm-Loewner Evolution ou Stochastic-Loewner-Evolution.*

sur leur utilisation. Une autre approche utilisant le calcul paradifférentiel a vu une forte contribution du monde académique français.

6.2.5 THÉORIE ERGODIQUE, SYSTÈMES DYNAMIQUES, PROBABILITÉS ET STRUCTURES ALGÉBRIQUES

Très présente dans les années 70-80, la théorie ergodique a poursuivi son développement autour de directions variées, allant des propriétés de récurrence multiple à la combinatoire des mots, dans un dialogue fécond avec la dynamique symbolique et la dynamique homogène, en lien avec des questions issues de la théorie des nombres. Elle s'est principalement orientée vers les systèmes dynamiques présents en mathématiques fondamentales, en s'attaquant à des systèmes dynamiques concrets issus de la physique, de la géométrie, de l'algèbre ou de la théorie des nombres.

L'étude des applications intermittentes et des événements rares trouve ses racines dans les travaux de physiciens qui cherchaient à modéliser les séismes (au sens large, dont notamment des interactions avec la santé autour de la modélisation de l'épilepsie). Les résultats récents sur la réponse linéaire trouvent leur origine dans des questions de David Ruelle motivées par de la physique ; l'aléa, dans ces questions de dynamique aléatoire, est censé représenter le bruit physique. L'étude du billard de Sinaï, comme modèle du gaz de Lorentz, s'inscrit aussi dans ces interactions fructueuses avec la physique.

À l'instar des résultats des années 80 permettant de comprendre la structure de certaines variétés en étudiant le comportement asymptotique du mouvement brownien construit sur celles-ci et de divers flots (géodésiques, de Teichmüller, etc.), le comportement de dynamiques stochastiques construites sur des structures algébriques (marches sur les groupes par exemple) permet de récupérer un certain nombre de propriétés de celles-ci. Tout autant porté par des algébristes que par des probabilistes, ce domaine connaît depuis quelques années une expansion croissante.

6.2.6 PROBABILITÉS DISCRÈTES, COMBINATOIRE

Née dans les années 70 à l'initiative de Maurice Nivat et sous l'influence des travaux fondateurs de Marcel Paul Schützenberger, développée encore par Philippe Flajolet et d'autres dans les décennies suivantes, une partie de l'informatique mathématique s'est structurée depuis autour des probabilités et de l'étude de l'aléa discret (voir le Chapitre 9). A mi-chemin entre mathématiques et informatique théorique, elle regroupe probabilités discrètes, combinatoire, algorithmique et a des liens forts avec les systèmes dynamiques, l'analyse complexe, la théorie des représentations, la physique statistique, etc. Disposant d'une revue internationale de premier plan, *Random Structures and Algorithms*, le domaine connaît également un fort développement, peut-être plus au sein des laboratoires d'informatique où la combinatoire est majoritairement développée, avec succès.

6.2.7 MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES, PROBABILITÉS NUMÉRIQUES

Les mathématiques financières ont connu à la fin des années 90 un développement spectaculaire en lien avec les nouvelles méthodes de *trading*. La communauté française a mis en place des formations de master mondialement reconnues à l'égal des meilleures formations américaines, en particulier sous l'impulsion de Nicole El Karoui. Prenant racine dans le calcul stochastique classique (dont elles sont aujourd'hui un des derniers représentants), elles ont évolué en incorporant petit à petit des aspects numériques, statistiques et d'optimisation. Le domaine, soumis aux fluctuations du marché, reste très présent en France.

Les méthodes numériques (schémas d'approximation des équations stochastiques) déjà présentes auparavant, sont développées, de manière indépendante ou pas, souvent par des mathématiciennes et des mathématiciens travaillant également en probabilités financières. Historiquement, c'est par ailleurs en bonne partie dans le contexte des mathématiques financières que le contrôle stochastique (la branche du contrôle prenant en compte l'aléa des observations ou de la dynamique) s'est développé.

6.2.8 MODÉLISATION ALÉATOIRE POUR LA BIOLOGIE, EN LIEN AVEC LA MODÉLISATION DÉTERMINISTE

Alors que la physique a depuis plusieurs siècles fourni son lot de problèmes et d'interactions avec les mathématiques, le domaine de la biologie en est resté longtemps éloigné (si l'on excepte quelques événements rares comme les lois de Mendel ou les observations de Brown). Si certains modèles ont été proposés et étudiés depuis les années 50, ce n'est qu'à la fin du siècle dernier que les mathématiques pour la biologie ont amorcé leur essor spectaculaire. En commençant par la modélisation, le domaine couvre de nombreux champs : génétique des populations, dynamique des populations, écologie et biodiversité, théorie de l'évolution, neurosciences, déplacements collectifs, etc. Les outils probabilistes y sont nombreux : processus de branchement, dynamiques de particules en interaction, processus de sauts et modèles de diffusions, etc. Ce thème en expansion intense est développé par ailleurs dans le Chapitre 11 de ce volume.

6.3 ORGANISATION ET FONCTIONNEMENT DES PROBABILITÉS EN FRANCE

La communauté probabiliste française s'est très vite organisée autour de rencontres régulières, dont voici quelques-unes parmi les plus représentatives :

L'école de probabilités de Saint-Flour, qui a lieu tous les ans depuis 1971, est organisée autour de trois cours sur des thématiques de pointe (publiés dans un ouvrage spécifique chaque année), complétés par des exposés de participants. Sa renommée est internationale, son impact a été grand sur les jeunes mathématiciens qui forment une des cibles privilégiées de l'événement.

Les journées de probabilités, à taille humaine (de 70 à 80 participants), émanation du Séminaire de probabilités (Strasbourg), lui-même devenu une publication régulière, sont organisées chaque année depuis les années 70 également. Elles ont adopté depuis l'origine une règle de fonctionnement égalitaire voulue par Paul-André Meyer : chaque orateur a le même temps de parole et il n'y a pas de sessions en parallèle. Elles restent un moment de rencontre intéressant, notamment pour les jeunes chercheurs.

Les journées du groupe MAS (Modélisation aléatoire et statistique) de la Société de mathématiques appliquées et industrielles, ont lieu tous les deux ans depuis 1996 (le groupe a été créé en 1991 par Neveu) et sont un congrès de taille importante (250 participants environ). Elles sont devenues la vitrine de la communauté française de l'aléatoire.

Les journées des jeunes probabilistes et statisticiens, sont un événement également bisannuel depuis 1994. Également organisées par le groupe MAS, elles sont consacrées, comme leur nom l'indique en partie, aux doctorants de seconde et troisième année dans le domaine de l'aléatoire. Organisées et encadrées par une poignée de chercheurs senior, elles ont vocation à faire se rencontrer les nouvelles générations dans un cadre informel et agréable, hors de la présence de spécialistes plus aguerris.

Depuis une quinzaine d'années, la communauté s'est également organisée en réseaux : groupements de recherche (six GDR en cours), projets soutenus par l'ANR, colloques ou trimestres thématiques à l'IHP et au CIRM. Certaines thématiques organisent (au-delà des séminaires) des événements réguliers : mécanique statistique hors d'équilibre à l'IHP, journées Aléa au CIRM, rencontres EDP-Probabilités à l'IHP par exemple. L'ensemble des thématiques listées précédemment a su créer son propre maillage national et international, un point particulier étant le fort niveau de travail collaboratif au plan national.

L'attractivité des probabilités auprès des étudiants souhaitant s'engager dans une thèse a fortement progressé depuis la fin du siècle dernier. S'il n'existe que très peu de masters deuxième année (ou de parcours en leur sein) consacrés aux probabilités, pour beaucoup situés en Île-de-France, ceux-ci essaiment sur l'ensemble du territoire. Les formations franciliennes en finance par exemple sont recherchées et reconnues pour leur excellence. Mentionnons d'ailleurs que dans un contexte où les débouchés en termes d'emplois académiques sont rares, les étudiants en probabilités qui ne sont pas issus d'institutions franciliennes prestigieuses peinent parfois à trouver de tels emplois.

Si, pendant longtemps, probabilités et statistiques étaient le plus souvent accolées au sein des laboratoires de mathématiques, l'évolution de chaque discipline rend désormais souvent ce mariage un peu artificiel, et dans plusieurs laboratoires les probabilités sont autonomes ou se rapprochent davantage de l'analyse ou de l'algèbre. Cette évolution n'est pas irréversible, et les développements récents dans certains domaines (matrices aléatoires, algorithmes stochastiques par exemple) ont déjà posé les jalons d'interactions nouvelles.

6.4 PERSPECTIVES

Après avoir su prendre toute leur place au sein des mathématiques, les probabilités sont désormais devenues un domaine mathématique de base, à l'interface avec de nombreux autres domaines des mathématiques qui font de plus en plus appel à l'intuition et à l'outil probabiliste. Réciproquement, les probabilités modernes ne peuvent plus se passer d'une vision algébrique ou géométrique et les liens avec l'analyse, allant de l'analyse réelle à l'analyse convexe, de l'analyse fonctionnelle aux EDP non linéaires, sont de plus en plus forts. Comme autre exemple, mentionnons que si l'aventure commune entre les probabilités et la théorie géométrique des groupes commence dans les années 50-60 avec l'étude des marches aléatoires, les probabilités interviennent désormais pour résoudre des problèmes internes à la discipline. Les probabilités parlent désormais avec presque tous les domaines des mathématiques. Elles ont également pris une grande importance dans de nouveaux champs, de la physique théorique notamment, sans parler des interactions avec le monde du calcul (méthodes de Monte-Carlo) et des développements algorithmiques. Elles jouent ainsi un rôle crucial en informatique dont elles constituent un des outils principaux, que ce soit dans des aspects classiques algorithmiques (optimisation, image, quantification d'incertitudes, etc.) que dans les plus récents développements (données, IA, apprentissage automatique, etc.).

Les probabilités françaises sont performantes et structurées. Elles connaissent depuis une dizaine d'années une évolution qui les rapproche des mathématiques qualifiées de fondamentales, et sont reconnues pour leur niveau d'excellence dans tous les domaines principaux qu'elles couvrent.

Néanmoins, en dehors des deux domaines de la finance et des mathématiques appliquées à la biologie, les probabilités françaises, en dépit de quelques exceptions notables, souffrent d'une relative faiblesse dans les domaines appliqués, par exemple l'ingénierie où les développements de l'aléatoire sont faits par les automaticiens ou les roboticiens (voir Chapitre 10).

Les évolutions et les événements mondiaux récents ont montré combien les besoins en modélisation vont bien au-delà des quelques simulations rapides d'un passé récent. Tout comme le monde numérique a besoin de statistique mathématique forte, le monde industriel, celui de la biologie ou celui de la santé ont besoin de modélisation mathématique solide permettant de proposer des prévisions étayées par des études fondamentales. La modélisation devant prendre en compte les incertitudes, les probabilités y ont une part importante.

CHAPITRE 7

STATISTIQUE ET MATHÉMATIQUES DE L'INTELLIGENCE ARTIFICIELLE

7.1 HISTORIQUE

Au sortir de la Grande Guerre, le mathématicien et homme politique français Émile Borel prend conscience de la nécessité de mener une réflexion à la fois théorique et pratique autour des questions de hasard et de mesure des risques. Titulaire, à partir de 1920, de la Chaire de calcul des probabilités et physique mathématique de la Faculté des sciences de Paris, Borel consacre alors une partie importante de ses travaux scientifiques au calcul des probabilités, repris dans le Traité du calcul des probabilités et applications, et use de son influence pour la création de l'Institut Henri Poincaré en 1928[45], au sein duquel il impose une composante probabiliste d'importance égale à la composante physique.

Borel est également conscient du retard français sur les autres pays européens dans l'enseignement des statistiques mathématiques et dans la réflexion sur leur articulation avec la théorie des probabilités. Alors que dans les pays voisins, en Allemagne et en Grande-Bretagne notamment, ces problèmes sont au centre de recherches académiques variées (autour de la démographie, la biométrie, l'économie, l'astronomie et l'actuariat), et qu'un enseignement de pointe est offert à des étudiants appelés à devenir les cadres d'une administration moderne et performante, la France accuse en la matière un retard considérable qu'il devient urgent de combler. Face à ce constat préoccupant, Borel, en compagnie de l'ancien directeur de la Statistique générale de la France Lucien March et de l'économiste et homme politique Fernand Faure, crée en 1922 l'ISUP (Institut de statistique de l'université de Paris). La fonction de cet institut indépendant, articulé sur les trois facultés des sciences, de droit et de médecine, consistait alors à couvrir l'enseignement et la recherche en statistique au sens large. Le but déclaré était d'enseigner « la méthode statistique et ses applications ». Là où March avait plutôt défendu l'idée de méthodes mathématiques non probabilistes, Borel impose un socle probabiliste, demandant à Georges Darmois d'étudier ce qui se fait ailleurs afin que l'ISUP propose, à l'instar de ses homologues à l'étranger, un enseignement de premier plan.

Le premier véritable manuel français de statistique s'appuyant sur le calcul des probabilités, intitulé *Statistique mathématique*, fut publié par Darmois en 1928 sur la base du cours qu'il donnait alors à l'ISUP. Les effectifs de l'ISUP restèrent faibles entre 1925 (la première année où des diplômes furent délivrés) et 1939. Ce n'est qu'après la deuxième Guerre mondiale que l'institut prit son essor, inspirant notamment la création d'autres lieux d'approfondissement de la statistique, au premier rang desquels l'Insee (Institut national de la statistique et des études économiques) et l'Ensae (École nationale de la statistique et de l'action économique), qui commençaient enfin à offrir des carrières intéressantes de statisticiens à des étudiants scientifiques.

C'est encore à l'Institut Henri Poincaré que, sous l'impulsion de Maurice Fréchet puis de Jacques Neveu, se développe dans les années 1960 une intense activité autour des travaux de Paul Lévy, de la théorie des martingales et des processus stochastiques, attirant vers le calcul des probabilités de jeunes normaliens dont une partie d'entre eux devaient un peu plus tard créer une équipe de statistique au sein du département de mathématiques d'Orsay. Il s'agissait alors d'installer la statistique mathématique comme une branche des mathématiques à part entière et de créer une école de pensée s'inspirant des travaux fondateurs de Lucien Le Cam ou encore d'Ildar Ibragimov, certes fortement assise sur la théorie des probabilités mais s'ouvrant aussi sur la théorie de l'information ou encore l'analyse harmonique. Il s'agissait en outre de maintenir cette approche théorique au contact des applications, avec la biométrie notamment, démarche facilitée par la création du centre de recherche de l'Inra à Jouy-en-Josas, en bordure du plateau de Saclay, déjà. Parallèlement à ce mouvement, une chaire de statistique fut créée à l'université de Paris en 1965 pour Jean-Paul Benzécri. Le nom de Benzécri est indissociable de l'essor dans la décennie 1970-1980 de l'analyse des données, approche qui relève davantage de la statistique descriptive que de la statistique inférentielle et dont le fondement mathématique

45. Voir également le Chapitre 1 du Volume 1 de cette synthèse pour une bref aperçu historique de l'essor des mathématiques au début du XX^e^ siècle et du rôle d'Émile Borel.

concerne plus la géométrie euclidienne que la modélisation stochastique. C'est aussi à cette époque que plusieurs centres de recherche en statistique voient le jour sur le territoire national, avec une inflexion plus ou moins marquée, selon les cas, vers l'analyse de données ou la statistique mathématique, en particulier à Toulouse, Montpellier ou Grenoble. Ce premier essor préfigurait l'explosion des années 1990-2000, avec l'arrivée en force des méthodes d'apprentissage statistique, qui gomma progressivement la frontière entre l'analyse des données très descriptive des premiers temps et la statistique mathématique, offrant de nouvelles possibilités d'application de la discipline à des domaines de plus en plus variés, et favorisant ainsi la création d'équipes dans presque tous les établissements d'enseignement supérieur.

7.2 POINT SUR LA FORMATION

Le positionnement original de la statistique, tout à la fois branche des mathématiques, science autonome, méthode et ensemble de techniques, se reflète dans la diversité des parcours de master au sein desquels elle est impliquée. Il convient ici de rappeler que, depuis 2014, les mentions de master françaises sont réglementées au niveau national. Ces mentions, qui doivent être choisies parmi une liste de 253 possibilités, se déclinent ensuite en parcours que chaque université peut fixer librement selon ses orientations. Alors que seulement deux mentions incluent la dénomination « statistique » (« Mathématiques appliquées, statistique », d'une part et, « Économétrie, statistiques », d'autre part), il est intéressant de constater que le mot « statistique » se retrouve dans au moins 49 parcours spécialisés, répartis au sein des différentes mentions. Loin d'être paradoxal, cet état de fait illustre la pénétration de la statistique dans de très nombreux champs scientifiques, depuis les aspects les plus fondamentaux en lien avec les mathématiques (on dénombre environ 30 parcours spécialisés en statistique dans les trois mentions de master « Mathématiques et applications », « Mathématiques appliquées, statistique » et « Mathématiques et informatique appliquées aux sciences humaines ») jusqu'à des domaines plus spécialisés (il y a par exemple trois parcours formant à la modélisation statistique au sein de la mention « Santé publique »).

Cette présence affirmée de la statistique dans le système de formation français au niveau master est une force, dans la mesure où elle traduit son caractère profondément vivant et interdisciplinaire, indispensable au socle des connaissances scientifiques propres à des champs scientifiques variés. Elle induit néanmoins plusieurs points de vigilance sur lesquels il convient d'être particulièrement attentif.

Le succès croissant des méthodes d'apprentissage statistique, de l'apprentissage machine (*machine learning*) et de l'intelligence artificielle expose de façon croissante la statistique au très vaste champ de l'informatique. Ce rapprochement, positif sur le fond, impose cependant un effort de collaboration pédagogique accru entre mathématiciennes et mathématiciens, d'une part, et informaticiennes et informaticiens, d'autre part, pour décloisonner les savoirs et proposer des parcours adaptés aux nouveaux enjeux liés au traitement des données massives. Plusieurs formations à l'interface entre mathématiques, statistique et informatique ont vu le jour ces dernières années, inspirées par le succès du parcours Master mathématiques, vision et apprentissage (MVA) de l'université Paris Saclay, qui fut précurseur en la matière. Il n'en demeure pas moins que le mouvement est encore timide et doit être accéléré. L'enjeu pour les statisticiens est de taille puisqu'il consiste à promouvoir et entretenir le savoir-faire de la modélisation mathématique et statistique, tout en l'adaptant aux techniques modernes de traitement des données. On dénombre à ce jour une vingtaine de parcours spécialisés en sciences des données ou en *data science* proposés par des mentions de master liées à l'informatique. C'est une excellente chose en soi mais il convient que ces thématiques soient également présentes dans des formations de master où les fondements mathématiques de la modélisation statistique sont enseignés.

Ensuite, la demande accrue d'enseignements en statistique, qui concerne tous les niveaux universitaires (licence, master et doctorat) et au-delà la formation tout au long de la vie des cadres des entreprises et des administrations, fait peser sur les enseignantes-chercheuses et les enseignants-chercheurs des établissements d'enseignement supérieur des charges de service toujours plus importantes, contraignant hélas bon nombre de collègues, souvent en début de carrière, à s'éloigner de la recherche. À ce propos, il est d'ailleurs frappant de constater que presque tous les rapports d'évaluation du Hcéres[46] font état de ce constat alarmant, indépendamment de la taille des équipes concernées, de l'établissement ou de sa localisation. Cette situation doit être prise au sérieux car elle est selon nous, parmi bien d'autres, l'une des causes de la désaffection des jeunes talents spécialistes du traitement des données pour l'enseignement supérieur français.

Enfin, la très grande diversité des champs disciplinaires au sein desquels la statistique

46. Le comité a eu accès aux rapports d'évaluation Hcéres des unités de recherche de 2011 à 2022.

est amenée à intervenir impose un effort de formation doctorale soutenu et de haut niveau, pour préparer de jeunes statisticiennes et statisticiens à travailler à l'interface de plusieurs disciplines. On constate par exemple un besoin important de former des doctorants armés d'une solide culture mathématique dans le domaine du traitement des données spatio-temporelles, de l'économétrie ou de la biostatistique.

7.3 POINT SUR LA RECHERCHE

Dans la majorité des cas, les probabilistes et les statisticiens sont regroupés au sein d'une même équipe, elle-même composante d'un laboratoire de mathématiques. On peut néanmoins noter le positionnement original de Sorbonne Université, qui possède un laboratoire entièrement consacré aux sciences de l'aléatoire, le Laboratoire de probabilités, statistique et modélisation (LPSM), unique en son genre dans le paysage de l'enseignement supérieur et de la recherche français.

Même s'il est impossible d'établir une cartographie précise de l'ensemble des domaines couverts par la recherche statistique en France, plusieurs points méritent néanmoins d'être soulignés. Il convient tout d'abord de noter l'étendue et la richesse de ces domaines, depuis les aspects les plus fondamentaux de la discipline (statistique mathématique) jusqu'à des thématiques plus finalisées, comme par exemple la modélisation du vivant. Loin d'être cloisonnés, ces domaines sont perméables et dialoguent. L'exemple le plus frappant est peut-être l'émergence de la statistique en grande dimension, qui s'est développée de façon spectaculaire avec l'avènement des données d'expression de gènes dans les années 2000. Ce courant de recherche s'est traduit par des avancées méthodologiques importantes, comme par exemple les tests multiples, la sélection de modèles et les principes de régularisation convexe.

Cependant, au-delà de tel ou tel autre champ de recherche bien précis, ce qui frappe, à la lecture des rapports Hcéres, c'est avant tout le bénéfice que la statistique française a su tirer de sa proximité historique avec les mathématiques, initialement avec les probabilités, puis avec l'optimisation et, plus généralement, avec les mathématiques considérées comme fondamentales. Ce positionnement de la statistique française vis-à-vis des mathématiques – au demeurant source de nombreux débats souvent passionnés entre collègues : fallait-il créer des laboratoires de statistique indépendants ? – est désormais devenu une force incontestable dans le paysage de la science moderne, traversé par des bouleversements profonds liés à l'utilisation massive des données. Il n'est en effet aujourd'hui pratiquement plus un seul domaine scientifique (physique, chimie, biologie, médecine, sciences des matériaux, sciences humaines, etc.) qui ne soit amené à repenser ses fondamentaux à la lumière des données, que l'on peut désormais collecter, stocker, croiser et interroger avec toujours plus de facilité. Ce changement de paradigme est porté par les développements spectaculaires du *machine learning* et de l'intelligence artificielle.

7.4 MATHÉMATIQUES DE L'INTELLIGENCE ARTIFICIELLE

Toujours plus impressionnants, les progrès de l'intelligence artificielle et du *machine learning* concernent désormais l'ensemble des disciplines scientifiques et des activités économiques, au premier rang desquelles la médecine et la santé. Ces avancées inimaginables il y a seulement quelques années s'accompagnent de questionnements mathématiques nouveaux à la croisée de très nombreux domaines. Il s'agit désormais de faire progresser les fondements théoriques de l'intelligence artificielle, dont les racines sont mathématiques.

Les algorithmes modernes d'intelligence artificielle mobilisent des domaines variés des mathématiques. Citons par exemple la théorie de l'approximation (pour les réseaux neuronaux profonds), l'optimisation (cœur battant du *machine learning*), la théorie des graphes, celle des équations aux dérivées partielles (à l'origine du *neural learning*, point de rencontre fécond entre les équations d'évolution et le *machine learning*), ou encore la géométrie et la topologie algébrique, avec l'analyse topologique des données.

Ainsi, les mathématiques dans leur ensemble doivent se mettre en mouvement pour mieux comprendre les forces en action derrière les progrès de l'intelligence artificielle et pour participer à la conception de stratégies innovantes. Pour ce faire, il convient de mobiliser la communauté des mathématiciens bien au-delà des statistiques et d'impliquer beaucoup plus étroitement l'ensemble des champs disciplinaires, depuis la géométrie et la cryptographie jusqu'aux équations différentielles en passant par l'optimisation et la théorie des graphes.

Cette (r)évolution autour des données, qui redessine les frontières des mathématiques, fait jouer à la statistique un rôle central, entre les mathématiques dont elle se nourrit et les techniques d'analyse du risque dont elle est issue. Encore une fois, le raisonnement statistique reste essentiel pour prendre en compte et modéliser de façon pertinente la variabilité des données. Pour positive qu'elle soit, il convient néanmoins d'accompagner cette exposition croissante de la statistique à l'ensemble des champs disciplinaires en formant davantage de doctorants à l'interface et en mettant en œuvre une politique de recrutement ambitieuse.

7.5 POINT SUR LE LIEN AVEC LE MONDE SOCIO-ÉCONOMIQUE

Des liens forts unissent la statistique universitaire et le monde de l'entreprise, moteurs puissants de son développement et de sa réussite. L'essor des nouvelles technologies, conjugué à l'explosion du volume des données et des moyens de calcul, a donné une place toujours plus grande à l'expérience et à la simulation, conférant ainsi un attrait renouvelé à la statistique et aux outils qui en sont issus. Il faut néanmoins se garder de penser que la statistique intervient comme une discipline de service dans ses relations avec l'industrie. Ce sont au contraire bien souvent des questions de nature fondamentale qui se dégagent des travaux à l'interface, venant ainsi renouveler et irriguer non seulement la statistique mais aussi l'ensemble des mathématiques. S'il fallait donner un seul exemple, on citerait la question très actuelle des réseaux neuronaux profonds, dont l'analyse fait appel à des outils de statistique et, plus généralement, à la modélisation aléatoire, à l'optimisation, à la théorie de l'approximation ou encore à la théorie des graphes.

CHAPITRE 8

DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

8.1 HISTORIQUE ET CONTEXTE

Les besoins en formation continue liés à la réforme des mathématiques modernes ont poussé à la création des premiers Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques (Irem) en 1969 et ont fait émerger des besoins en recherche fondamentale. Institutionnellement, la didactique des mathématiques s'est ainsi constituée scientifiquement comme champ de recherche à partir des années 1970. Les premiers Diplômes d'étude approfondie (DEA, devenus masters de deuxième année) dans la thématique ont été créés en 1975, permettant la structuration académique du champ et l'émergence de formations doctorales.

La France a joué un rôle moteur, internationalement reconnu, dans le domaine, avec en particulier quatre figures clés: Michèle Artigue, Guy Brousseau, Yves Chevallard et Gérard Vergnaud. Artigue et Brousseau ont reçu la médaille F. Klein et Chevallard le prix Hans-Freudenthal de la Commission internationale de l'enseignement mathématique (CIEM).

8.2 AXES DE RECHERCHE

Compte tenu du contexte de ce rapport, on se limitera ici au cas spécifique de l'enseignement supérieur. Historiquement, les travaux de recherche se sont d'abord concentrés sur le supérieur et la transition secondaire vers supérieur; avec la création des Instituts universitaires de formation des maîtres (IUFM, précurseurs des Instituts nationaux supérieurs du professorat et de l'éducation, INSPE) en 1990, l'accent a ensuite été surtout mis sur le primaire et le secondaire, niveaux sur lesquels se concentrent encore une grande partie des recherches aujourd'hui. Cela a provoqué un isolement des recherches en cours sur le supérieur et induit un besoin de structuration nationale; la création récente d'un groupement de recherche (GDR) dépendant de l'Insmi, Didactique et épistémologie des mathématiques, liens avec l'informatique et la physique, dans le Supérieur (DEMIPS), ambitionne de combler ce vide.

Parmi les axes de recherche de ce GDR, on trouve des problématiques liées aux domaines disciplinaires classiques, ainsi que des thématiques transversales liées à la logique, au langage, au raisonnement, et aux notions de preuve et de modélisation. On trouve également l'étude des pratiques enseignantes, ainsi qu'une approche transdisciplinaire.

Dans les axes en développement, on peut signaler: l'enseignement des probabilités et de la statistique, de l'informatique et des mathématiques discrètes, avec des besoins émergents, en biologie par exemple; le développement d'une épistémologie contemporaine, qui se rapproche de la philosophie de la pratique mathématique et s'appuie sur un ancrage épistémologique fort et traditionnel de la discipline; l'étude de la dimension institutionnelle enfin, liée au fait que tout enseignement se fait dans une institution. Les sujets abordés dans ce dernier axe concernent par exemple les particularités de l'enseignement dans les nouvelles institutions, l'histoire de l'enseignement ou les manuels universitaires.

8.3 STRUCTURATION ET ENJEUX

L'activité de recherche se répartit entre les INSPE, les Irem, plutôt orientés vers la recherche-action (en prise directe sur le système éducatif), avec des interactions et quelques postes dans les laboratoires de mathématiques. L'essentiel des postes d'enseignants-chercheurs en didactique des mathématiques se concentre dans les INSPE.

La plupart des membres du GDR DEMIPS sont en section CNU 26 (Mathématiques appliquées et applications des mathématiques), à laquelle la didactique des mathématiques est rattachée. Viennent ensuite les sections 28 et 25.

Avec les problématiques de la transition entre le lycée et l'université, des différentes réformes des contenus, du recrutement des enseignants, de l'attractivité des mathématiques, et de la faiblesse des résultats français aux évaluations internationales, l'enseignement des mathématiques pose des problèmes conceptuels, sociétaux et stratégiques qui interpellent toute la communauté mathématique.

Deux recommandations émergent: le contact direct avec les pratiques de l'enseignement supérieur des mathématiques étant nécessaire, il convient de favoriser institutionnellement les collaborations avec les laboratoires de mathématiques, voire l'insertion dans ces laboratoires. Par ailleurs, la didactique étant structurellement et historiquement liée à l'histoire et à la philosophie des mathématiques, il conviendrait également d'encourager institutionnellement l'articulation des trois champs. Toujours d'un point de vue institutionnel, il faut noter que la didactique ne figure pas au sein des descripteurs délimitant le périmètre de la section 41 du comité national du CNRS.

CHAPITRE 9

MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

9.1 QUELQUES REPÈRES HISTORIQUES

Ces dernières décennies ont vu à la fois une explosion des moyens de calcul et de la puissance des ordinateurs et un développement spectaculaire de l'informatique théorique, dans une proximité féconde avec les mathématiques. L'école française, tant en mathématiques qu'en informatique, y a joué un rôle moteur avec des figures majeures. Citons par exemple Marcel Paul Schützenberger et ses travaux autour de la combinatoire et des aspects algébriques de l'informatique théorique, Philippe Flajolet avec l'analyse d'algorithmes, ou encore Maurice Nivat avec ses contributions à l'algorithmique et à la sémantique formelle – domaine qui cherche à définir et analyser précisément les langages de programmation (voir également le Chapitre 5 et le Chapitre 6 de ce volume).

Notons que Nivat a joué un rôle fondamental pour la promotion de l'informatique théorique, et ce dès la fondation de l'Iria en 1967, qui deviendra Inria (Institut national de recherche en informatique et en automatique) en 1979, avec un « n » pour national. Ce développement a pu se faire grâce à un investissement institutionnel fort et une communauté informatique bien structurée qui ont su accompagner avec succès l'émergence de domaines désormais bien installés.

Comme nous l'avons déjà indiqué dans le Chapitre 5, les frontières entre disciplines scientifiques ne sont pas aisées à définir et varient souvent d'un pays à l'autre en fonction de traditions locales. C'est peut-être encore plus vrai pour ce qui touche à l'informatique, structurellement liée aux autres disciplines et sous des formes diverses. Par exemple, en France, la ligne de partage est particulièrement délicate à établir avec les mathématiques discrètes (combinatoire, théorie des graphes) et la logique puisque ces domaines, intrinsèquement transverses, y sont très souvent représentés dans des laboratoires d'informatique théorique.

Compte tenu de la quantité très importante de matériaux disponibles sur ces questions, nous avons choisi – de façon sans doute un peu arbitraire – de décrire dans un rapport séparé le domaine des mathématiques discrètes, de la logique, dont certains aspects de la sémantique des langages de programmation. Nous ne traitons pas ici non plus la recherche opérationnelle et le contrôle, en dépit de liens historiques avec l'informatique, que ce soit sur le plan théorique ou institutionnel. Ils sont analysés plus en profondeur dans le Chapitre 2 (EDP, analyse numérique, optimisation et calcul scientifique) et le Chapitre 10 (Mathématiques et Ingénierie). Nous ne nous interdirons pas toutefois d'évoquer ces domaines aux moments opportuns de ce rapport.

9.2 UN IMPACT CROISSANT DE L'INFORMATIQUE SUR LES MATHÉMATIQUES

Dans les aspects mathématiques de l'informatique, les mathématiques interviennent souvent comme outils permettant des preuves rigoureuses. Mais ces interactions se jouent aussi à un niveau plus fondamental : la cryptographie est par exemple pourvoyeuse de problèmes mathématiques algorithmiquement difficiles à résoudre.

Dans un mouvement inverse, nous analyserons dans cette section l'impact de l'informatique sur les mathématiques. Les développements de l'informatique ont modifié la manière de faire des mathématiques dans plusieurs domaines où l'expérimentation joue un rôle essentiel. Ce mouvement devrait s'amplifier dans les années à venir car de nouveaux questionnements émergent dans de nombreux domaines. On peut citer :

- les outils de calcul comme le calcul formel, le calcul numérique ou l'arithmétique des ordinateurs qui développent les possibilités d'expérimentation et de simulation ;

- les mathématiques effectives : les aspects constructifs traversent aujourd'hui la théorie des nombres et la géométrie algébrique ;

- une réflexion sur les fondements des mathématiques qui s'accompagne d'outils de certification et de nouveaux types de preuves assistées par ordinateur, dans un continuum fécond allant des aspects les plus fondamentaux aux aspects implémentation ;

- une évolution culturelle profonde dans la manière d'aborder des objets communs (par exemple les graphes, les réseaux, les pavages).

Les assistants de preuve ont déjà joué et vont continuer à jouer un rôle essentiel dans la transition qui s'opère vers une ère de garanties formelles en mathématiques. Un assistant de preuve permet de décrire des définitions mathématiques et donne des outils pour vérifier formellement des algorithmes ou des théorèmes, si nécessaire de manière interactive. Il permet ainsi d'aider à la recherche de preuves formelles, et également de synthétiser des programmes certifiés à partir de preuves constructives et de leurs spécifications. Soulignons la réussite de l'assistant de preuve Coq, qui est le résultat de plus de 30 ans de recherche, récompensé en

2013 par le *Programming languages software award* de l'ACM SIGPLAN (*Special interest group on programming languages*, de l'*Association for computing machinery*). Coq a par exemple permis la validation du théorème des quatre couleurs ainsi que, en théorie des groupes, celle du théorème de Feit-Thompson.

On observe par ailleurs une intégration réussie du savoir-faire informatique dans des équipes de théorie des nombres (voir aussi la Section 1.3 de ce volume sur ce sujet). Un exemple en est donné avec la maintenance et le développement du système de calcul formel PARI/GP (intégré dans SageMath). Largement utilisé (il affiche plus de 25 000 utilisateurs), il est conçu pour les calculs rapides en théorie des nombres (factorisations, théorie algébrique des nombres, courbes elliptiques, formes modulaires, fonctions L). Un fait notable est que l'on n'hésite plus aujourd'hui à chercher et mettre en œuvre des algorithmes pour calculer des objets de plus en plus sophistiqués. Les méthodes cohomologiques ont ainsi longtemps été considérées comme de beaux outils théoriques complètement ineffectifs : ce n'est plus le cas aujourd'hui, et le calcul effectif de cohomologies fait l'objet de nombreux travaux. On dispose ainsi d'algorithmes efficaces et de logiciels de calcul formel qui intègrent des quantités extraordinaires de fonctionnalités, et qui sont accessibles à des dizaines de milliers d'utilisateurs. On notera, de plus, un point très positif en France : les différents champs mobilisés par ces enjeux – calcul formel, arithmétique des ordinateurs, algorithmique des nombres – sont menés par des groupes structurés et bien intégrés dans la communauté mathématique.

Le développement spectaculaire des outils informatiques a également profondément impacté les approches tant analytiques que statistiques. La production d'estimateurs statistiques ne se conçoit plus sans un algorithme effectif et optimisé, avec une évaluation de la complexité ou des vitesses de convergence. La stabilisation vers l'équilibre de plusieurs types de dynamiques (EDP, stochastiques, systèmes dynamiques, etc.) se regarde dorénavant en temps grand, mais fini, et non plus dans l'asymptotique du temps infini. Ce changement de paradigme nécessite le développement d'une culture en programmation et calcul, et induit des changements dans les cursus fondamentaux.

9.3 DES CHANGEMENTS DE PARADIGME PROFONDS

Le paysage scientifique à l'interface entre mathématiques et informatique est en perpétuelle recomposition. Illustrons ce propos avec le calcul formel qui se situe maintenant au carrefour de l'informatique, des mathématiques discrètes (impliquant algèbre ou arithmétique) et des mathématiques continues (comme celles liées au calcul numérique), les aspects symboliques, numériques et statistiques s'entremêlant de plus en plus. Le calcul numérique est a priori consacré à la modélisation d'un exemple, à la différence du calcul algébrique qui intervient dans le temps de conception, mais pas dans le temps réel, le symbolique amenant quant à lui une certification. Par exemple, dessiner de façon certifiée la courbe des singularités d'une variété donne des indications numériques et peut permettre de donner ainsi la main sur l'aspect numérique pour les zones régulières ; on peut de cette manière certifier une méthode numérique par du symbolique en étudiant un indicateur topologique. Il faut aussi parfois développer une approche intégrée spécifique à l'objet considéré, pour, par exemple, produire des contre-exemples, dessiner ou conforter l'intuition, comme outil d'aide à la compréhension. Ce mouvement ne s'observe d'ailleurs pas seulement au niveau de la recherche fondamentale, mais également dans les applications industrielles et la médiation scientifique.

On l'aura compris : l'évolution des rapports entre mathématiques et informatique accompagne un changement de paradigme, engagé depuis longtemps mais qui s'accélère singulièrement. Historiquement, la physique a joué un rôle d'apport d'idées, d'intuitions et de résultats, et il en est de même aujourd'hui pour l'informatique qui permet de développer une approche pragmatique et heuristique dans plusieurs domaines des mathématiques (par exemple l'apprentissage automatique ou le quantique), et est accompagné de l'émergence de questionnements théoriques et de nouvelles problématiques supportant ces heuristiques.

L'informatique accompagne aussi les mathématiques dans d'autres interactions fécondes. Si la physique est un monde de symétries et d'invariances pour lequel le langage mathématique est parfaitement adapté, la biologie amène des questionnements de natures différentes que les EDP seules ne peuvent traiter. L'informatique propose des réponses qui ont désormais fait leurs preuves. Elle fait évoluer l'étape cruciale de la modélisation, avec l'étude d'algorithmes dits « naturels » (par exemple pour la modélisation des vols d'oiseaux) ou d'algorithmes distribués issus de systèmes biologiques, qui combinent aspects probabilistes et algorithmiques.

Ces évolutions déplacent ainsi les frontières. De nouveaux domaines, comme la bio-informatique ou les algorithmes naturels – dans lesquels on retrouve Cucker-Smale ou ceux liés aux problèmes de consensus – viennent concurrencer la modélisation mathématique en sciences du vivant et en sciences sociales. On retrouve ici une question fréquemment posée à propos de l'intelligence artificielle : une simulation est-elle suffisante pour valider un modèle, ou bien la compréhension analytique de ce dernier est-elle nécessaire ? La formidable efficacité des méthodes computationnelles permet d'obtenir des réponses rapides, là où le temps de la réflexion mathématique est souvent en décalage avec le désir d'immédiateté qui, partant de la société civile, a envahi la recherche scientifique.

9.4 QUELQUES DIRECTIONS MARQUANTES

Parmi ceux développés à l'interface entre mathématiques et informatique, on trouve les thèmes suivants :

- algorithmique et complexité ;
- calcul arithmétique et formel (arithmétique des ordinateurs, calcul formel, calcul certifié, arithmétique effective) ;
- calculabilités ;
- codage et cryptographie (sécurité informatique, codage, cryptologie, protection de la vie privée) ;
- géométries computationnelle, algorithmique, énumérative, discrète, algébrique réelle ;
- graphes ;
- informatique quantique ;
- langages formels, modèles de calcul et vérification (automates, logique, jeux et algèbre).

Un certain nombre d'autres sujets (mathématiques discrètes, logique, contrôle, automatique, etc.) sont traités dans d'autres chapitres de ce volume.

Il est évidemment hors de question de couvrir ici extensivement tous ces domaines, dont chacun nécessiterait un rapport spécifique. Nous nous contenterons d'indications, en sélectionnant quelques champs et développements significatifs ou particulièrement d'actualité. Les interactions avec l'ingénierie sont présentées dans le Chapitre 10.

9.4.1 L'ALGORITHMIQUE

L'algorithmique est une composante majeure de l'informatique. Les principaux outils de mathématiques qui y sont déployés viennent de la géométrie, du calcul des probabilités, de la combinatoire, en passant par l'algèbre. Les probabilités ont tendance à y prendre de plus en plus d'importance car l'analyse de nombreux modèles interroge très souvent ce champ des mathématiques. L'étude des graphes de contact épidémiques a par exemple fait émerger des questions sur les graphes de percolation. La révolution de l'IA et du *deep learning* a réorienté l'activité de recherche de nombreux informaticiens et algorithmiciens. On étudie par exemple de moins en moins le « pire cas » de données d'entrées pour se concentrer plutôt sur la problématique *Beyond worst case*. Si l'école française excelle en probabilités, son pôle IA et algorithmique est malheureusement trop peu développé, d'autant que les contacts entre probabilistes et informaticiens restent timides.

9.4.2 ARITHMÉTIQUE EFFECTIVE

Les résultats récents et spectaculaires[47] sur la multiplication de deux nombres de *n* chiffres en temps proportionnel à *n log n* donnent un exemple de la variété des mathématiques pouvant être mobilisées pour relever un tel défi. En transformant l'arithmétique entière par de l'arithmétique polynomiale, la démonstration de David Harvey et Joris van der Hoeven combine ainsi transformées de Fourier rapides discrètes multidimensionnelles et rééchantillonnage gaussien.

9.4.3 LES GROUPES AUTOMATIQUES

Ils fournissent un bel exemple d'utilisation d'un concept relevant de l'informatique théorique en théorie géométriques des groupes. À l'aide d'objets naturels en informatique théorique (automates de Mealy et transducteurs), il est possible d'exhiber des groupes (groupes d'automates et groupes automatiques) avec des comportements spécifiques. L'utilisation des groupes d'automates a ainsi permis d'exhiber des groupes finiment engendrés à croissance intermédiaire, avec l'exemple frappant du groupe de Rostislav Grigorchuk. Les travaux de Laurent Bartholdi et Anna G. Erschler en sont une illustration.

9.4.4 LE QUANTIQUE

Il faut distinguer ici au moins trois niveaux. La cryptographie quantique a fonctionné dès les années 90 avec des déploiements pratiques (comme un système de communication avec un chiffrement utilisant l'intrication quantique). L'ordinateur quantique repose sur une logique différente : on utilise les propriétés des systèmes quantiques pour construire de nouveaux opérateurs logiques. La cryptographie post-quantique est encore d'une autre nature puisqu'elle ambitionne de résister aux algorithmes implémentés sur l'ordinateur quantique. En arrière-plan, les grandes nations scientifiques,

47. David Harvey et Joris van der Hoeven : *Integer multiplication in time O(n log n), Annals of Math.*, 2021.

dont la France, s'engagent dans des plans quantiques, plutôt de nature technologique, avec des applications potentielles à court terme et de forts enjeux à long terme.

Il y a de nombreux aspects heuristiques, avec là aussi la nécessité de changer de paradigme. Les liens avec les mathématiques, avérés ou potentiels, sont multiples, de la logique à l'algorithmique, aux codes correcteurs en passant par les éléments de physique mathématique qui interviennent dans les aspects technologiques. Dans les mathématiques qui se développent, en liaison ou motivées par le quantique, on peut citer la simulation hamiltonienne, la recherche d'algorithmes, l'étude de leurs classes de complexité, etc. Le développement de l'algorithmique quantique a également un impact sur les mathématiques au travers de nouvelles approches de preuves.

9.5 UN FOCUS AUTOUR DE LA CRYPTOGRAPHIE

Nous mettons l'accent sur la cryptographie, domaine qui illustre parfaitement bien la dynamique que l'on peut qualifier de transdisciplinaire et qui sous-tend l'interaction entre mathématiques et informatique.

La théorie de la complexité a tout d'abord joué un rôle prépondérant en cryptographie avec une succession de grands résultats (*IP=PSPACE, PRIME is in P, SHORTEST VECTOR for the L2 norm is NP-HARD*, etc.). Progressivement, la cryptographie, même dans ses aspects théoriques, a développé des méthodes et un langage un peu plus spécifique que celui de la théorie générale de la complexité (pour les preuves de protocoles en particulier). Les méthodes formelles ont joué un rôle croissant, en bonne intelligence avec l'algorithmique. Il y a toutefois une tendance à la spécialisation ; même si les communautés cryptographie, informatique fondamentale et théorie algorithmique des nombres maintiennent des liens étroits, leurs trajectoires tendent à s'éloigner.

La cryptographie repose sur des problèmes difficiles – car coûteux en temps de calcul, avec un temps de résolution rédhibitoire pour des tailles acceptables – comme le logarithme discret ou la factorisation. Les problèmes mathématiques assurant la solidité des protocoles sont bien connus, et la taille des paramètres est choisie de sorte que la résolution des problèmes sous-jacents demande un temps de calcul trop important pour poser une réelle menace en termes de sécurité. Néanmoins, l'avènement de l'ordinateur quantique menace les cryptosystèmes à base de courbes elliptiques, ainsi que l'algorithme RSA. En effet, l'algorithme de Shor n'est pas réalisable avec les technologies actuelles, mais un ordinateur quantique pourrait l'exécuter et venir à bout de la sécurité des cryptosystèmes asymétriques actuels. L'industrie, les gouvernements et les universités du monde entier consacrent ainsi d'importantes ressources à la recherche sur l'informatique quantique. Face à cette menace, le *National institute of standards and technology* (NIST) a lancé en 2017 un concours de cryptographie « post-quantique ». Les cryptosystèmes dits post-quantiques doivent pouvoir être implémentés sur de l'électronique classique tout en résistant à la puissance de calcul des ordinateurs quantiques. L'appel à proposition du NIST pour des primitives cryptographiques post-quantiques est en train de s'achever ; cet appel est important et ce processus de standardisation a agi comme un catalyseur permettant une forte implication de la communauté internationale de recherche en cryptographie ; il devrait aboutir à la standardisation des mécanismes d'échange de clé et de signatures numériques appelés à être utilisés de manière ubiquitaire dans les décennies à venir. À noter que des équipes françaises et européennes sont bien placées parmi les finalistes, avec des aspects mathématiques prégnants dans les solutions proposées ; plus généralement, la communauté française participe activement à la conception et à l'analyse de sécurité des primitives mais aussi à leur cryptanalyse.

Dans la recherche de problèmes difficiles, l'accent a donc été mis successivement sur la factorisation et le logarithme discret, puis sur les courbes elliptiques, ensuite sur les *pairings* et, avec l'arrivée récente de la cryptographie post-quantique, s'est développée une cryptographie à base de codes correcteurs d'erreurs, de réseaux euclidiens, d'isogénies, de systèmes polynomiaux multivariés, ou encore de fonctions de hachages. Concernant la cryptographie à base de réseaux euclidiens, le principe repose sur l'utilisation de réseaux qui ne soient pas trop gros à représenter, par exemple des réseaux définis par des idéaux de corps de nombres. On obtient des algorithmes plus heuristiques, avec des calculs explicites dans les corps de nombres. Ces questions ont redynamisé leur étude avec un regard plus pragmatique. La recherche de générateurs pseudo-aléatoires pour la cryptographie, également cruciale pour l'implémentation de cryptosystèmes, a également suscité une recherche féconde en lien avec les mathématiques.

Les questions algorithmiques et effectives en mathématiques ont un effet (de bord) sur la cryptographie, en suggérant de revisiter des objets mathématiques qui pourraient lui servir. La recherche de systèmes de coordonnées pour l'étude des courbes est venue de motivations diophantiennes et son impact en cryptographie a été considérable. Quant au cas de la théorie des codes, il est intéressant : si elle a parfois été considérée comme perdant en pertinence à la fin des années 90, elle a confirmé de façon assez spectaculaire son importance depuis. Cet exemple des codes nous donne d'ailleurs l'occasion d'alerter sur le danger des grands mouvements d'opinion et des effets de mode, même en science. L'accent est mis aujourd'hui sur le quantique et les questions qui relèvent de la *blockchain*. Sans vouloir remettre en cause l'importance de ces innovations, ni diminuer ce qu'elles apportent de renouveau méthodologique et théorique, il faut garder à l'esprit l'importance des études fondamentales dans tous les modèles de calcul associés aux questions de complexité.

Nous avons déjà signalé un mouvement général autour de l'idée de passer de l'étude du « pire cas » à une perspective *beyond worst case* dont une motivation importante vient de l'intelligence artificielle et dont l'étude passe par l'utilisation de techniques probabilistes. Le même phénomène se retrouve en cryptographie. La prise en compte, dans l'analyse, de la résistance des cryptosystèmes à la différence entre le cas moyen et le cas le pire a aussi un impact important dans le domaine. Les hypothèses de sécurité sont devenues très claires : si l'on est face à un problème dur dans le cas moyen, alors le système est sûr. Les préoccupations de type complexité se sont donc déplacées vers une prise en compte d'aspects probabilistes.

La France est aujourd'hui un acteur majeur au niveau mondial en cryptographie. Depuis plusieurs années, les chercheurs et les chercheuses français sont présents de manière systématique et significative dans les conférences de référence. C'est aussi le cas dans les domaines qui relèvent de l'implémentation matérielle ou des contre-mesures et, notamment au CEA LETI, de l'analyse de la vulnérabilité logicielle et matérielle. On peut ainsi parler d'une école française en cryptographie, sous tous ses aspects. En revanche ce n'est pas le cas en cybersécurité, malgré une réelle expertise sur les méthodes formelles pour la certification. Dans les conférences qui font référence en cybersécurité, l'école française est peu présente et les acteurs majeurs viennent à l'international d'une formation d'ingénieurs généralistes. Plus on s'éloigne des mathématiques et de leurs fondements, moins le monde universitaire est présent. Il existe ainsi assez peu de cours avancés d'administration des systèmes sécurisés dans les universités françaises et c'est le monde des entreprises qui pallie ce manque. À noter, néanmoins, les efforts récemment déployés par le GDR Sécurité informatique, par le pôle d'excellence Cyber autour de Rennes et par le nouveau campus cyber de la Défense.

L'hémorragie générale des forces académiques dans les secteurs technologiques clés (par exemple en apprentissage) concerne aussi la cryptographie. Aujourd'hui, les forces se dirigent de plus en plus, d'une part, vers le privé où de grands groupes développent de la recherche fondamentale en cybersécurité et, d'autre part, à l'international en raison de salaires et conditions de travail plus attractifs.

9.6 UNE STRUCTURATION SOLIDE ET UNE INTERFACE DYNAMIQUE AVEC DES POINTS DE FRAGILITÉ

Il existe divers éléments solides de structuration pour la communauté impliquée dans l'interface mathématiques-informatique. Le GDR Informatique-mathématique est ainsi un outil majeur de structuration, qui regroupe environ 1 500 membres permanents, 720 doctorants, et 250 post-doctorants. Le positionnement de l'informatique mathématique est le suivant, comme décrit sur la page web de ce GDR : « Dans l'informatique mathématique, c'est l'informatique qui apporte en premier lieu ses problèmes, ses objets, ses motivations. Mais l'outil et les méthodes mathématiques s'avèrent essentiels dans la modélisation et la résolution de ces problèmes, souvent même incontournables ». Au niveau des établissements de recherche, les postes croisés entre les sections 41 et 6 du CNRS ont été des outils très efficaces de développement de cette interface. L'Inria a également joué un rôle moteur dans le développement de certaines thématiques, par exemple la cryptographie à base de courbes, malheureusement au détriment d'autres domaines comme la cryptographie post-quantique.

On l'a vu, l'interface entre les mathématiques et l'informatique est particulièrement développée : elle implique une grande variété et une grande richesse de notions mathématiques et nourrit les mathématiques tant par les questions, les nouvelles approches (effectivité, décidabilité, complexité) que par les objets et les méthodes. Néanmoins, il existe plusieurs points d'attention à souligner, en particulier en termes de formation, mais également de cloisonnement et de postes, points que nous détaillons ci-dessous.

Des besoins spécifiques en formation, voire même des déficits, apparaissent, et ce également dans le vivier des doctorants. La situation est préoccupante et nécessiterait des initiatives vigoureuses. La réforme des masters qui a supprimé la spécialité mathématiques-informatique a ainsi eu un impact notable, et l'on constate une difficulté générale pour les étudiants à comprendre le discours mathématique, ce qui induit des barrières à l'entrée de plusieurs domaines. On observe en particulier des déficits sur les thématiques algébriques, avec un mouvement qui s'est amorcé depuis la fin des années 90 ; ceci a un impact en cryptographie en particulier. On note, par ailleurs, en France mais aussi au niveau mondial, un déficit en formation en cybersécurité. À noter que des domaines émergents d'importance demandent une formation pluridisciplinaire : l'intelligence artificielle demande ainsi des compétences informatiques approfondies, savoir calculer et mener à bien des calculs numériques lourds (bien plus lourds que ceux qui relèvent des mathématiques du traitement du signal) et, concernant le quantique, la formation doit être nécessairement multidisciplinaire – mathématiques, physique, informatique. Il est également important de réfléchir à la formation, en combinant solidité et conditions d'émergence des personnalités scientifiques affirmées.

Des acteurs du domaine signalent un effritement de la culture bi-disciplinaire et des problèmes récurrents de cloisonnement qui persistent en France, en raison sans doute d'une tradition et du système de formation initiale. Des difficultés spécifiques se présentent, avec tout particulièrement le poids prépondérant donné aux problèmes d'enseignement dans les profilages de postes en informatique. Le poids mis sur certains thèmes d'enseignement (par exemple, les bases de données) tend à faire diminuer le nombre de postes en informatique théorique. Les postes académiques (universitaires et CNRS) attirent de très bons chercheurs étrangers (Italie, Allemagne, Europe centrale) qui cherchent un emploi stable. Toutefois, pour les jeunes, formés en France, il y a un vrai problème d'attractivité des filières publiques, face non seulement aux bas salaires mais aussi aux propositions du monde industriel.

Nous concluons avec deux recommandations générales propres au domaine :

- il faut veiller à ce que la mathématicienne ou le mathématicien de demain puisse avoir la capacité de s'appuyer sur des expérimentations et de les développer, de maîtriser les outils de certification et d'acquérir une culture algorithmique et combinatoire orientée vers l'effectivité ;

- le champ est complexe, multiforme, en évolution permanente. Il faut veiller à la flexibilité des financements et développer des espaces transdisciplinaires, des lieux et des modes de coopération, comme ceux adoptés par exemple lors de la mise en place de la plateforme Modcovid.

CHAPITRE 10

MATHÉMATIQUES ET INGÉNIERIE

10.1 INTRODUCTION

Les interactions entre mathématiques et ingénierie sont anciennes, riches et en perpétuelle évolution. De nouveaux thèmes en interface apparaissent continuellement. La formation des ingénieurs en France est particulièrement marquée par les mathématiques, ce qui apparaît comme une exception par rapport aux formations dans les pays anglo-saxons.

Historiquement, les interactions entre mathématiques et ingénierie ont commencé avec les disciplines classiques de l'ingénierie : mécanique, physique, informatique, gestion. Les aspects sciences de l'ingénieur de ces disciplines portent parfois des noms différents, plus indicateurs de leur vocation applicative, comme le calcul des structures, l'hydrodynamique, l'électromagnétisme, les sciences des matériaux, le signal, l'imagerie, les télécommunications, l'algorithmique, la fiabilité, l'automatique, la recherche opérationnelle, etc. Il est d'ailleurs impossible de dresser une liste exhaustive des disciplines de l'ingénierie qui utilisent et interagissent avec les mathématiques. Depuis quelques années, on assiste à une explosion du nombre des domaines de l'ingénierie qui s'ouvrent aux mathématiques. Citons le domaine des biotechnologies, de la santé, de l'industrie financière, du marketing et de la vente, d'internet et des réseaux sociaux, entre autres.

Ce qui est particulièrement frappant est l'ouverture soudaine et imprévue de domaines jusque-là étanches, non seulement aux mathématiques, mais à toute formation scientifique dans les profils recrutés, et qui se mettent à recruter massivement des mathématiciens. On peut penser aux banques et à la finance de marché à partir des années 90 et plus récemment à toutes les entreprises récoltant des grands volumes de données, par exemple sur internet, et qui ont massivement recruté des *data scientists* depuis une dizaine d'années. On peut aussi citer l'outil numérique qui vient en appui des psychologues cliniciens experts dans les troubles de l'apprentissage. Cet outil est développé par des mathématiciens et des informaticiens, et les psychologues en viennent à se former et à faire évoluer ces outils.

Un corollaire de ces nouvelles interactions est la grande diversité de spécialités mathématiques qui, tour à tour, ont les faveurs des ingénieurs : contrôle des systèmes dynamiques dans les années 60, calcul scientifique et modélisation à l'aide des équations aux dérivées partielles dans les années 80, probabilités et calcul stochastique plus tard, statistique, science des données et optimisation plus récemment, mais aussi calcul formel, cryptographie, analyse géométrique et topologique des données, etc. Aucun champ des mathématiques n'est à l'abri d'être un jour investi par les sciences de l'ingénieur. Évidemment, le développement de l'informatique et des moyens de calcul, qui rendent effectives les mathématiques, est à la base de l'accroissement de ces interactions.

Les interactions entre mathématiques et sciences de l'ingénieur sont souvent l'occasion d'un travail pluridisciplinaire et de collaborations fructueuses avec les entreprises. En mathématiques, comme dans d'autres domaines, ni les recherches pluridisciplinaires, ni les collaborations industrielles ne sont exclusivement du ressort de l'ingénierie. Un intérêt des interactions entre les mathématiques et l'ingénierie est bien sûr d'identifier des applications intéressantes aux outils et aux techniques mathématiques, de proposer des débouchés nombreux aux étudiantes et aux étudiants en mathématiques, mais aussi d'être une source inépuisable et constamment renouvelée de nouveaux problèmes mathématiques. Dans cette synthèse ont été évoqués les rôles cruciaux du programme de la navette spatiale Hermès pour les succès de l'école française sur la résolution de l'équation de Boltzmann des gaz raréfiés ou les questions de traitement des signaux et des images pour le développement de la théorie des ondelettes. Les exemples en ce sens abondent et démontrent amplement l'influence réciproque entre mathématiques et ingénierie. Nous consacrons un long paragraphe du volume 1 de cette synthèse (Chapitre 1. 3) aux interactions entre les mathématiques et le monde socio-économique.

10.2 INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUES POUR LES SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

De nombreux échanges entre mathématiques et sciences de l'ingénieur ont lieu aussi en interaction avec l'informatique et il est difficile dans ce cas de tracer des frontières nettes entre ces domaines. Rappelons qu'informatique et ingénierie étaient réunis au sein du même département du CNRS jusqu'à la création en 2009 de l'Institut des sciences de l'information et de leurs interactions (Ins2i), qui regroupe informatique, automatique, traitement du signal et des images, robotique et conception de systèmes sur puce. L'Institut des sciences et de l'ingénierie des systèmes (Insis) du CNRS coordonne quant à lui des recherches situées à l'interface des sciences, des technologies et des besoins de la société. Pour ces instituts, comme pour l'Insmi, les GDR sont des éléments structurants. Voici quelques exemples de ces interactions, qui complètent ceux détaillés dans le Chapitre 9 consacré aux interactions entre mathématiques et informatique.

L'imagerie est un domaine naturel de l'interaction entre les mathématiques et l'ingénierie allant bien au-delà des aspects classiques auxquels on pense naturellement (transformées de Fourier, convolutions, ondelettes, etc.) et qui mobilise un spectre très large de mathématiques, avec des aspects à la fois continus et discrets, mais aussi de l'algèbre, de la géométrie, ou de la topologie. Cette interaction se déploie aussi vers l'informatique principalement au sein de la section 7 du CNRS (signal et communications, images et vision, informatique graphique et géométrique). Notons que ce champ est probablement celui qui a été le plus bouleversé par l'apparition de l'apprentissage machine et des réseaux de neurones profonds qui surpassent les anciennes méthodes dans la plupart des applications de l'imagerie.

Le domaine du maillage est aussi un point de contact évident entre mathématiciens, informaticiens et ingénieurs. Les outils de maillage ont de très nombreuses applications, notamment en géométrie, vision et imagerie, mais c'est pour le calcul scientifique que l'interaction est la plus forte. Notons d'ailleurs que le maillage est souvent un verrou technologique crucial pour les entreprises désireuses de réaliser des simulations complexes.

Illustrons aussi cette richesse des échanges avec la géométrie discrète, tout particulièrement développée en France. La palette d'outils en géométrie discrète et en géométrie algorithmique contient de l'arithmétique, de la géométrie différentielle, de la topologie et fournit des problèmes variés en mathématique. La géométrie algorithmique mobilise un continuum continu-discret de notions mathématiques qui vont vers des problématiques variées et d'actualité (homologie persistante, données, intelligence artificielle).

Finalement, mentionnons qu'une interaction extrêmement développée depuis quelques années entre mathématiques, informatique et ingénierie est l'intelligence artificielle et la science des données. Le paragraphe 4 du chapitre 7 lui est consacré. De même, les questions de cybersécurité sont développées dans le chapitre 9 traitant des mathématiques et de l'informatique.

10.3 QUELQUES ÉLÉMENTS AUTOUR DE LA DIGITALISATION ET DES LOGICIELS LIBRES

La digitalisation des entreprises et de la société civile nécessite, en plus des compétences en informatique, des compétences spécifiques en mathématiques, qui pour certaines sont enseignées en écoles d'ingénieur, mais sont principalement acquises lors d'un travail de thèse en mathématiques. La recherche en mathématiques appliquées, en particulier en EDP, en calcul scientifique et en statistique, va de pair depuis de longues années avec le développement de logiciels souvent conséquents. Une des évolutions ces dernières années est la multiplication des logiciels *open source* aussi bien dans le monde universitaire que dans le monde industriel. Même pour une entreprise, il est souvent plus facile de développer et de tester de nouveaux algorithmes ou modèles dans un logiciel *open source* plutôt que dans un code commercial ou propriétaire. L'expérience acquise dans le développement d'un logiciel *open source* lors d'une thèse intéresse aussi les entreprises et peut être facilement valorisée.

L'existence, dans un certain nombre de laboratoires de mathématiques, de logiciels puissants suffisamment généralistes permet également de répondre rapidement à des demandes d'industriels. La maîtrise de ces logiciels facilite en particulier les thèses en entreprises et permet de mettre en place des contrats public-privé liés à des études spécifiques. Le rôle des maisons de la simulation et de l'optimisation (MSO) et de l'AMIES est essentiel pour ces échanges.

Au-delà des sciences de l'ingénieur, la digitalisation et l'existence d'outils logiciels libres a également favorisé le développement de la simulation numérique et de la modélisation dans les sciences du vivant et les sciences humaines. L'apprentissage machine permet de construire des modèles à partir des données ; aujourd'hui on assiste au développement de modèles mathématiques en tant que tels. On a vu en particulier récemment un nombre important de mathématiciens s'impliquant dans la modélisation autour de la Covid-19, en collaboration avec des virologues et des médecins.

Avec la digitalisation vient aussi le problème de la sécurité informatique qui est devenu un problème vital pour la plupart des entreprises. La théorie des nombres et l'algèbre sont à la base du développement d'outils de cryptographie plus efficaces.

Ces dix dernières années ont été marquées par le rapprochement entre, d'une part, la communauté des mathématiques de l'aléatoire (probabilités, statistique) et, d'autre part, celle de l'analyse numérique (EDP, simulation), au travers de la thématique du traitement des incertitudes et de l'exploration des codes numériques. Poussé par une forte demande de l'industrie, ce domaine des *computer experiments* repose sur une analyse des gros codes de calcul industriels par des méthodes statistiques ou des algorithmes d'apprentissage machine, avec un intérêt croissant porté à la quantification des incertitudes et à l'évaluation des risques. Il s'agit d'un champ de recherche et d'expérimentation désormais très actif, qui mobilise des outils mathématiques divers, depuis le calcul les probabilités en grande dimension jusqu'au réseaux neuronaux, en passant par les systèmes dynamiques et le calcul haute performance. Point de rencontre fructueux entre les monde académique et industriel, il est incarné en France par les activités du très dynamique GDR MASCOT-NUM.

10.4 SUR LA FORMATION DES INGÉNIEURS

Un enjeu important de l'interaction entre les mathématiques et l'ingénierie reste la formation des ingénieurs, qui ont souvent besoin de mathématiques de plus en plus avancées pour les aspects techniques de leurs métiers. De ce point de vue, la relative désaffection des jeunes pour les formations en mathématiques ou plus généralement scientifiques est inquiétante pour l'avenir des entreprises françaises qui peinent à recruter des profils pointus d'ingénieurs.

Il est, en outre, frappant de constater que de plus en plus d'élèves d'écoles d'ingénieurs complètent leurs études par un master, voire un doctorat, à coloration en mathématiques appliquées. Cette évolution est intéressante car elle traduit un véritable besoin de formation à l'interface entre les sciences de l'ingénieur et les mathématiques. De nombreux parcours de masters universitaires sont opérés en commun avec des écoles d'ingénieurs, l'association entre diplôme d'ingénieur et doctorat en mathématiques incarnant désormais la voie de la réussite pour les étudiantes et les étudiants les plus brillants. Ce constat est particulièrement vrai dans les domaines de la science des données, du *machine learning* ou de l'intelligence artificielle, qui proposent des carrières attractives et incitent les élèves des meilleures écoles à compléter leur formation par un master de haut niveau en mathématiques et un doctorat à l'université.

CHAPITRE 11

MATHÉMATIQUES ET BIOLOGIE-SANTÉ

11.1 CONTEXTE HISTORIQUE

Sciences du vivant et mathématiques se côtoient depuis fort longtemps. Du modèle discret de Malthus (et plus tard du modèle continu de Verhulst) en dynamique des populations au milieu du XIXe siècle, des lois de Mendel en génétique aux environs de 1850, des modèles probabilistes de branchement introduits par Galton et Watson dans le dernier quart du XIXe siècle aux processus de naissance et mort en dynamique des populations, nombre de modèles mathématiques ont été créés par des biologistes. La communauté des sciences du vivant a pourtant longtemps considéré les mathématiques avec circonspection et leur usage avec défiance. Claude Bernard dans *son Introduction à l'étude de la médecine expérimentale de 1865* résumait un point de vue encore très présent notamment en santé : « Une autre forme d'application très fréquente des mathématiques à la biologie se trouve dans l'usage des moyennes ou dans l'emploi de la statistique qui, en médecine et en physiologie, conduisent pour ainsi dire nécessairement à l'erreur. »

Le début du XXe siècle a vu se développer l'utilisation des mathématiques et l'émergence de ce que l'on peut appeler des biomathématiciens, un des tout premiers étant d'Arcy Wentworth Thompson qui dans son ouvrage *On growth and forms* de 1917 a mis en évidence la suite de Fibonacci dans la phyllotaxie. On peut mentionner également l'émergence de l'épidémiologie avec les modèles compartimentaux de Kermack-McKendrick en 1927, devenus célèbres durant la récente pandémie, ou l'introduction par Fisher des tests statistiques en biologie et en médecine.

La seconde moitié du XXe siècle a vu, d'une part, se multiplier les propositions de modélisation, et de l'autre, avec l'explosion des moyens techniques (en particulier de stockage), se construire de gigantesques bases de données, pour lesquelles informatique et mathématiques ont été mises à contribution. Néanmoins, hormis dans quelques domaines spécifiques, en particulier au sein du Département de mathématiques de l'Inrae, les interactions entre les mathématiques et la biologie en France sont restées (en nombre) à un niveau modeste. Ce n'est qu'à la toute fin du siècle dernier qu'ont émergé des noyaux de grande qualité, tant dans le monde déterministe que dans celui de l'aléatoire. Les quinze dernières années ont vu, quant à elles, un développement significatif des interactions entre mathématiques et biologie-santé : création d'enseignements spécifiques, émergence d'équipes de recherche dans la plupart des universités et dans beaucoup d'écoles, collaborations aux interfaces en nette augmentation, création du CID 51 au CNRS, programmes interdisciplinaires (Mathématiques de la planète terre, PEPR Mathématiques pour le vivant, l'environnement et la société).

Ce développement institutionnel en France résonne avec l'évolution de ces interactions au niveau mondial[48]. Le Congrès mondial des mathématiciens (ICM 2022) a incorporé une session consacrée à la modélisation mathématique, mettant en lumière Sylvie Méléard, oratrice française et leader dans le domaine. Cette reconnaissance de la qualité de la recherche française en mathématiques-biologie succède à l'obtention en 2016 d'un des prix de la société mathématique européenne (EMS) par Vincent Calvez, spécialiste français du domaine.

11.2 UN ENVIRONNEMENT INSTITUTIONNEL EN DÉVELOPPEMENT

Si elles sont en très nette augmentation et réparties sur l'ensemble du territoire, les interactions entre les mathématiciennes ou les mathématiciens et les biologistes ou les médecins procèdent cependant encore pour beaucoup de démarches individuelles. Un certain nombre de structures identifiées commencent à émerger : l'Institut Neuromod sur la côte d'Azur pour les neurosciences, la chaire MMB portée par l'école Polytechnique pour la biodiversité, l'Institut des mathématiques pour la planète terre porté par l'Insmi et les universités de la région Auvergne-Rhône-Alpes, la plateforme ModCov19 consacrée

48. Pour plus de détails sur les évolutions historiques et les points de vue, convergents ou divergents, on pourra consulter l'article *Considérations épistémologiques sur la modélisation mathématique en biologie* de Philippe Huneman (IHPST, Paris) et Sébastien Dutreuil (Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne).

à la pandémie due au SARS-CoV-2, etc. À cela devrait s'ajouter le PEPR Maths-Vives porté par le CNRS.

Les interactions entre les mathématiques et la biologie sont aujourd'hui présentes dans de nombreux laboratoires, souvent à partir de l'évolution des thématiques de recherche de certains membres mais désormais également à partir de recrutements d'enseignants-chercheurs ou de chercheurs sur des postes affichés sur cette thématique, dont ceux labélisés CID 51. De nombreux projets soutenus par l'ANR sont venus renforcer la visibilité du domaine en France. La thématique a donc acquis ses lettres de noblesse.

11.3 UNE ÉVOLUTION DES THÉMATIQUES ET DES PROGRÈS SCIENTIFIQUES NDÉNIABLES

Historiquement, les interactions entre les mathématiques et les sciences du vivant étaient scindées en deux parties distinctes, de poids inégal : d'une part, le traitement des données, relevant essentiellement de techniques statistiques ; de l'autre, la modélisation des phénomènes biologiques, elle-même clairement divisée en modèles déterministes et modèles aléatoires. Les dix dernières années ont considérablement rebattu les cartes : les modèles s'appuient de plus en plus sur les données, les frontières entre déterminisme et aléa sont tombées au profit d'une mise en commun des savoirs et des méthodes, et les poids respectifs se sont rééquilibrés. En même temps, l'évolution rapide des possibilités de stockage et de traitement automatique des données ont déplacé le centre de gravité de l'aspect purement données vers l'informatique et tout récemment vers les méthodes computationnelles de l'intelligence artificielle.

Il est sans doute inutile de dresser une liste à la Prévert de sujets sur lesquels les interactions récentes ont produit des résultats particulièrement intéressants dans les domaines des neurosciences (par exemple autour des modèles de FitzHugh-Nagumo, de Hodgkin-Huxley ou de Hawkes), de l'écologie ou de la génétique des populations (étude des processus de branchement, naissance et mort, des dynamiques proie-prédateur) de la biologie moléculaire et des déplacements cellulaires (*run and tumble*), de la géophysique, des mouvements de population (par exemple le modèle de Cucker-Smale, etc.), etc. Les *success stories* sont facilement identifiables. Si l'impact du côté de la biologie est difficile à mesurer au-delà de l'évolution des pratiques et de la méthodologie, les retombées mathématiques ne sont pas négligeables (par exemple tests multiples en statistique, quasi-stationnarité, EDP de type champ moyen avec singularités, etc.). Dans tous ces exemples, les techniques déterministes et les techniques aléatoires se répondent (lors de l'étude des équations différentielles couplées qui apparaissent, des équations cinétiques sous-jacentes ou des équations stochastiques décrivant le phénomène) et les spécialistes des deux domaines s'associent.

Si les exemples précédents traitent essentiellement de modélisation, des avancées tout aussi importantes ont été faites du côté de la donnée. Les sciences du vivant et de la santé sont grandes pourvoyeuses de données très diverses. Les moyens modernes de classification, d'ordonnancement et d'analyse sont donc particulièrement opportuns pour donner du sens à ces données. Ces aspects font désormais largement partie de la bio-informatique et ont quelque peu échappé aux équipes de statistique. Cependant, ces vingt dernières années ont apporté des avancées méthodologiques importantes en statistique, par exemple en génomique (co-expression des gènes) ou sur les tests multiples. Les nouveaux modèles d'apprentissage en statistique devraient trouver là un champ de développement.

Bien entendu on retrouve dans les problèmes mathématiques des sciences du vivant les mêmes « grands problèmes » que pour la modélisation en physique. Il s'agit, par exemple, de ceux liés aux différentes échelles tant temporelles que spatiales (microscopique, mésoscopique ou macroscopique) et au passage des unes aux autres, ou encore des problèmes liés aux comportements en temps des dynamiques évolutives et à l'opposition temps court-temps long. Sans doute encore plus que pour les interactions avec la physique, ces deux points induisent des intérêts contradictoires : un joli théorème asymptotique donnant des renseignements à l'horizon d'un millénaire n'aura pour le biologiste qu'un intérêt esthétique, une étude fine à horizon fini pas trop lointain contient des difficultés mathématiques pour l'instant souvent insurmontables.

À cela s'ajoute depuis peu la volonté de mieux prendre en compte les données. L'exemple de la chimiotaxie est représentatif : introduites en 1971 par Evelyn Keller et Lee Segel, les EDP du même nom ont longtemps été un modèle généralement accepté. Les difficultés mathématiques qu'elles contiennent (non linéarité avec singularités, possible explosion en temps fini, etc.) en ont fait un sujet d'étude mathématique décorrélé de son origine biologique et ont conduit à des modèles parfois très éloignés de l'original. L'évolution récente a remis en cause le modèle lui-même, d'une part, parce qu'il ne colle pas aux données qu'on peut désormais plus facilement collecter, mais aussi parce qu'il induit des conséquences mathématiques qui ne sont pas corroborées par les observations biologiques.

11.4 DES POSITIONNEMENTS À TROUVER

Au-delà des objectifs scientifiques parfois divergents, la difficulté majeure encore aujourd'hui réside dans le positionnement des différents acteurs. De la prestation de service à la collaboration d'égal à égal, le spectre des interactions entre biologistes et mathématiciens est large, et plus ou moins bien vécu. Si certains mathématiciens acceptent volontiers la prestation de service (sans apport recherche) afin de lancer des collaborations et de tisser des liens avec des équipes de biologie, la stagnation à ce niveau de collaboration en a désespéré d'autres.

Les *success stories* se bâtissent lentement et nécessitent de la part des deux parties une adaptabilité non négligeable. Au-delà du temps nécessaire à la compréhension mutuelle (du vocabulaire notamment), puis de celui nécessaire pour identifier un problème à étudier, les pratiques scientifiques des deux communautés diffèrent largement : évaluation d'une publication, temps nécessaire pour produire un résultat conforme aux usage de la communauté (la notion de résultat elle-même étant très différente dans les deux communautés), pratiques concernant la signature des travaux. Il apparaît clairement qu'au sein des collaborations réussies, les profils des scientifiques impliqués sont spécifiques, acceptant par exemple des durées de production scientifique anormales dans la communauté pour les biologistes, adoptant un positionnement à l'interface et déjà un peu en dehors des cadres classiques de la communauté pour les mathématiciennes et les mathématiciens.

Le mode de fonctionnement très disciplinaire du système français entraîne dès lors des biais en reconnaissant mal les apports de l'interdisciplinarité, ce dont pâtissent souvent ceux qui s'y lancent, y compris dans leur évolution de carrière. *A contrario* de la communauté physique théorique qui reconnaît les mathématiciens-physiciens, les mathématiciens de la sphère mathématiques-biologie ne sont pas toujours reconnus comme membres de la communauté biologie-santé, particulièrement coté santé. Cette situation doit inciter à réfléchir à la meilleure manière de structurer, le cas échéant, les interactions des mathématiques avec le monde de la biologie-santé.

Une autre tension dans les positionnements réciproques est le mode de compétition. Si les mathématiques sont encore une science ouverte où les résultats sont partagés par tous, la situation en biologie et encore plus en santé est très différente. Il y existe une véritable concurrence entre équipes, y compris travaillant sur le même thème au niveau national, qui du reste n'est pas étrangère au mode très rapide de publications, amenant à conserver par devers soi des éléments clés, dont tout particulièrement les données. Cette défiance intra-disciplinaire se répercute bien sûr au niveau de l'interdisciplinarité.

Entre les réussites et les échecs se trouvent des entre-deux fragiles. L'exemple le plus actuel est vraisemblablement celui de la plateforme ModCov19. Issue une fois encore d'actions individuelles locales au début de la pandémie du SARS Cov-2, cette plateforme, mise en place par l'Insmi, a dans un premier temps tenté de fédérer ces initiatives et de développer un réseau de mathématiciennes et de mathématiciens prêts à s'investir dans l'étude statistique et la modélisation de l'épidémie. L'effet structurant de ModCov19 au niveau de la communauté mathématique, puis sa capacité à intégrer des biologistes, des médecins, des épidémiologistes, sont une indéniable réussite en grande partie due à l'énergie de ses porteurs. Les retombées scientifiques ne sont pas encore mesurables. Cependant, les interactions créées entre mathématiciennes ou mathématiciens et épidémiologistes restent délicates, fragilisant une structure qui pourrait évoluer en un lieu de rencontre interdisciplinaire privilégié. D'autres exemples d'interactions fructueuses et pérennes existent néanmoins, dans le cadre, par exemple, d'études autour du cancer.

11.5 UN BILAN FRAGILE POUR UN DOMAINE EN DEVENIR

L'explosion récente de ce domaine interdisciplinaire et ses réussites marquantes ne doivent pas masquer une situation qui reste encore marquée par une défiance réciproque. La phrase de Claude Bernard citée en début de ce chapitre est encore d'actualité, même si les contre-exemples se multiplient et si l'on observe une demande croissante des biologistes ou des médecins pour une compréhension globale allant au-delà de la simulation.

Une première question majeure et systématique est la suivante : est-il nécessaire de développer et d'étudier un modèle mathématique ou suffit-il d'une simulation numérique pour en valider la pertinence ? Une partie de la communauté du vivant considère désormais que la réflexion en profondeur est nécessaire, une autre qu'elle est inutile. Devant la démultiplication des modèles et des analyses, parfois contradictoires, une structuration de la connaissance semble nécessaire.

Une seconde raison majeure tient dans l'interprétation du contenu de cette phrase : nombre de chercheurs en biologie et en santé reprochent aux mathématiques de ne pas fournir un modèle exact, et à ce titre de n'être que peu indicatives. En santé, un modèle exact peut aller jusqu'à un modèle adapté à chaque patient, en biologie un modèle adapté à chaque espèce. L'abstraction mathématique (tout autant que les moyennes de Claude Bernard) paraît inappropriée au domaine même de la biologie. De même, la statistique est perçue comme une vision globale négligeant l'individu. Discours paradoxal au moment où le monde médical communique de plus en plus sur les études statistiques. Alors que dans d'autres pays, notamment anglo-saxons, les méthodes quantitatives en biologie ont amorcé leur développement depuis longtemps, la France reste globalement en retrait.

Peut-être faut-il aller chercher une explication dans la formation qui sépare très vite sciences du vivant et sciences exactes (le système des classes préparatoires scientifiques est par exemple divisé en deux mondes étanches : « agro-véto » d'un côté, « maths-physique-Info-SI » de l'autre). La rupture précoce de ce contact entre les deux domaines ne facilite pas les relations de confiance et rend encore plus difficiles les échanges scientifiques en recherche : combien de docteurs en mathématiques savent encore ce qu'est un génome, combien de docteurs en biologie savent ce qu'est une équation différentielle ou un intervalle de confiance ? Il semble dès lors pertinent de développer des formations mixtes dans ce domaine et incluant un contenu spécifique de modélisation et de traitement de données.

Si la structuration institutionnelle du domaine est une piste, elle est peut-être prématurée en l'état. La communauté « maths-bio » est plus demandeuse de moyens et de structuration légère : création de lieux de rencontres, aide à la mise en place de séminaires et de colloques mixtes, bourses de thèses et de post-doctorats fléchées, support technique. Il apparaît également nécessaire que les chercheuses et les chercheurs interdisciplinaires restent ancrés dans leur discipline d'origine, d'une part, pour s'assurer un déroulement de carrière moins délicat, de l'autre, pour rester en contact avec les avancées de leur discipline et éventuellement pouvoir rebondir dans d'autres directions.

Le domaine des mathématiques de la biologie ou des mathématiques en biologie a su se créer une place dans le paysage scientifique. Il est crucial que cet espace soit respecté et soutenu. Les méthodes automatisées de traitement des données ne peuvent pas à elles seules construire le savoir. La France a des locomotives dans le domaine qui ne demandent qu'à être suivies.

CHAPITRE 12

MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

12.1 CONTEXTE

Jusqu'à une époque très récente, on ne sortait pas du lycée sans la conviction que la physique avait besoin des mathématiques, ne serait-ce que pour formuler ses lois. De fait, dans les siècles passés physique et mathématiques étaient intimement liées ; un mathématicien était physicien. Les métiers se sont séparés au début du XXe siècle en raison en particulier de la place prise par l'expérimentation. Mais la naissance des grandes théories – relativité générale pour la gravitation, mécanique quantique et quantique relativiste, théorie des champs pour les interactions élémentaires – a continué à donner lieu à des relations étroites entre physiciens et mathématiciens. De nombreux grands mathématiciens français ont été associés à l'avancée des idées, tels Élie Cartan, Henri Poincaré, Yvonne Choquet-Bruhat, Yves Meyer, Alain Connes et d'autres.

La relation entre mathématiques et physique n'est pourtant pas toujours allée sans heurts. Vers la fin des années 60, de grands physiciens comme Richard Feynman ou Freeman Dyson étaient sceptiques sur sa portée. Les choses ont changé dans les années 80, avec Michael Atiyah, Edward Witten, et d'autres, qui l'ont remise à l'ordre du jour. Aujourd'hui, les questions physico-mathématiques abordées sont si nombreuses et les contributions (en modélisation comme en simulation) sont si imbriquées qu'il est parfois difficile d'établir des frontières nettes entre les domaines. La résolution globale d'un même problème mobilise souvent plusieurs secteurs des mathématiques et la circulation d'idées entre mathématiques et physique se fait dans les deux sens. D'une façon générale, les questions issues des sciences engendrent de plus en plus souvent de nouveaux concepts et donnent parfois naissance à de grands sujets mathématiques tels, par exemple, les modèles SLE en physique statistique et les théories conformes, qui sont devenus des sujets en effervescence dans les mathématiques françaises.

12.2 DES LIENS ÉTROITS ET MULTIPLES ENTRE LES MATHÉMATIQUES ET LA PHYSIQUE

On retrouvera à plusieurs reprises dans ce chapitre de multiples interactions entre mathématiques et physique, riches de belles et nouvelles synergies et où se mêlent recherche fondamentale, ingénierie et innovation. Voici une liste non exhaustive de thèmes d'actualité traités par ailleurs dans le rapport :

- dynamique des fluides et théorie cinétique ;
- gaz peu denses et rentrée dans l'atmosphère de la navette spatiale Hermès ;
- limite thermodynamique ;
- ordinateur quantique-contrôle des états quantiques ;
- optimisation dans les espaces de mesures de Wasserstein ;
- physique statistique et percolation ;
- SLE et liens avec la théorie conforme des champs ;
- solutions en temps long ;
- systèmes de particules - modèles d'Ising ;
- turbulence ;
- verres de spin, milieux aléatoires.

Devant l'abondance des sujets possibles, nous avons choisi de nous concentrer sur quelques exemples d'interactions. Nous omettons en particulier des champs d'interactions historiques, comme ceux relevant de la physique statistique ou encore des systèmes dynamiques où il y aurait beaucoup à dire également.

Nous commençons par trois exemples emblématiques. Puis nous portons une attention particulière aux interactions qui mettent en jeu le calcul scientifique.

12.3 TROIS EXEMPLES EMBLÉMATIQUES

Commençons donc brièvement par trois exemples de succès, à des périodes différentes du passé assez récent. Ils sont suffisamment célèbres pour qu'il soit inutile de les détailler ici. Nous verrons que les interactions se font dans des sens variés.

12.3.1 PHYSIQUE DES PARTICULES

La particule élémentaire, qui fût prédite grâce aux représentations du groupe de symétries *SU(3)*, est finalement découverte[49] en 1964. Poursuivant dans cette veine, Murray Gell-Mann (prix Nobel de physique 1969) découvre les quarks.

12.3.2 THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS, RELATIVITÉ GÉNÉRALE

La première médaille Fields décernée à un physicien théoricien l'a été, en 1990, à Witten. Le début du rapport de Atiyah au Congrès international des mathématiciens à Tokyo donne le ton : « La dernière décennie a vu une renaissance remarquable de l'interaction entre

49. Gell-Mann a baptisé cette particule Ω^-.

les mathématiques et la physique »[50]. L'approche de la théorie de Morse par Witten a trouvé en France une formulation en analyse semiclassique dans les travaux de Bernard Helffer et Johannes Sjøstrand.

12.3.3 ONDES GRAVITATIONNELLES

La première détection d'ondes gravitationnelles a eu lieu le 14 septembre 2015, suite à la collision de deux trous noirs. Pour repérer les ondes annoncées par Einstein en 1915, il y a bien sûr la prouesse des deux interféromètres géants LIGO et VIRGO. Cependant, il faut des outils mathématiques en théorie du signal pour filtrer le bruit blanc et extraire un signal notable. Précisément, « un algorithme utilisant une technique de décomposition en ondelettes a détecté en premier le signal des ondes gravitationnelles »[51]. Ces outils ont d'abord été développés au laboratoire de l'ENS-Cachan, autour d'Yves Meyer (prix Abel 2017) et l'algorithme en question est basé sur les travaux mathématiques de Stéphane Jaffard.

12.4 UN FOCUS : LA SIMULATION NUMÉRIQUE

Les évolutions récentes dans la simulation numérique sont guidées par l'objectif de pouvoir faire prochainement des expériences *in silico*. Ceci nécessite des modèles mathématiques complexes intégrant tous les effets physiques importants. Ces modèles mettent en œuvre des échelles de temps et d'espace très étendues et couplent d'autres modèles aux structures étrangères les unes aux autres.

L'objectif de ces simulations est d´être prédictives et de pouvoir remplacer certaines expériences intermédiaires très coûteuses. Elles nécessitent une analyse rigoureuse des approximations numériques utilisées, sans oublier que ces approximations doivent être valides sur des échelles de temps très longues.

Ces simulations nécessiteront des ressources de calcul énormes qui seront disponibles prochainement avec les machines *exascale* permettant de réaliser 10^{18} opérations par seconde. Pour une utilisation efficace de ces machines, on devra recourir à des algorithmes plus complexes qui, dans cette optique, sont développés en particulier par des mathématiciennes et des mathématiciens. On peut citer notamment les méthodes d'ordre élevé en espace et en temps (*spectral deferred correction methods*) qui permettent d'utiliser plus efficacement les ordinateurs pour une précision donnée et proposent également une piste pour paralléliser les algorithmes en temps.

En outre, les méthodes dites géométriques préservant au niveau discret certaines propriétés structurelles des modèles continus (existence de symétries, d'invariants, de propriétés dissipatives) ont connu un essor considérable récemment pour toutes sortes de discrétisations. On peut citer en particulier les différences finies mimétiques, le calcul extérieur discret avec les éléments finis ou les techniques de dualité discrètes avec les volumes finis.

Un autre aspect important est l'obtention de modèles réduits. Ceux-ci permettent en particulier d'accélérer des processus d'optimisation et aussi d'accélérer les calculs en utilisant ces modèles couplés avec des modèles plus précis. Là encore une évolution récente est de construire de tels modèles qui préservent la structure du modèle de départ.

Un détail significatif sur la place de la France dans ce domaine est que les journaux de physique numérique, en particulier *Journal of Computational Physics*, sont depuis quelques années pilotés par des mathématiciens français (Pierre Degond puis Rémi Abgrall comme éditeurs en chef).

12.4.1 UN PREMIER EXEMPLE : LA SIMULATION MOLÉCULAIRE

Cette approche numérique a de nombreuses applications industrielles (équilibres multi-phases) et des applications en science des matériaux pour analyser et prédire l'évolution de défauts. Cette recherche, qui accusait en France un certain retard, trouve aujourd'hui un dynamisme prometteur s'articulant sur des projets innovants, qui ont reçu le soutien de l'ERC, portés par des laboratoires de calcul scientifique de la région parisienne.

Une originalité du premier projet est de promouvoir dans le sujet de la simulation numérique des méthodes markoviennes (*Markov State models*). Ces méthodes, basées sur le caractère aléatoire des erreurs d'approximation en temps long, permettent d'améliorer notablement la précision.

12.4.2 UN SECOND EXEMPLE : LA SÛRETÉ NUCLÉAIRE

On s'intéresse ici aux réacteurs à eau pressurisée et, particulièrement, à leur circuit primaire assurant le refroidissement de l'enceinte contenant les crayons de combustibles. Une fuite

50. M. Atiyah, *On the work of* Edward Witten, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Kyoto, Japan, 1990.
51. A. Cohen, Le *mathématicien Yves Meyer reçoit le prix Abel*. https://www.insmi.cnrs.fr/?article2111.

dans ce circuit pourrait entraîner une explosion et une rupture du confinement.

Dans les études d'accidents, les modèles d'écoulement privilégiés comportent deux phases. La phase de propagation des ondes de choc est décrite par les équations d'Euler compressibles, la phase de déflagration étant décrite par les équations de Navier-Stokes complétées de termes réactifs. Les processus de convection prédominent sur les mécanismes de turbulence. L'approximation numérique de ces modèles requiert des méthodes robustes, capables de décrire finement des phénomènes physiques avec des maillages 3D de domaines aux bords complexes.

Raphaèle Herbin (médaille de l'innovation 2017 du CNRS), en collaboration avec l'IRSN[52], a mis au point des calculs de mécanique des fluides très performants reposant sur des méthodes dites de « volumes finis à grilles décalées ». Une analyse fine des opérateurs de convection discrets assure la robustesse de la méthode numérique.

12.4.3 UN TROISIÈME EXEMPLE : LE PROJET ITER[53]

La fusion par confinement magnétique est destinée à contribuer dans les décennies à venir aux besoins énergétiques croissants de la population mondiale sans rejet de gaz à effet de serre, en complément des énergies renouvelables classiques (issues des éoliennes, des panneaux solaires, des usines hydroélectriques, etc.), avec l'avantage par rapport à celles-ci de pouvoir produire de l'électricité à la demande, indépendamment des conditions extérieures.

Il reste néanmoins des progrès scientifiques et technologiques importants à accomplir dans ce but. Le réacteur expérimental ITER, en fin de construction à Cadarache dans le sud de la France, devrait permettre de répondre à de nombreuses questions scientifiques encore ouvertes. ITER est un projet international rassemblant sept partenaires dont l'Union européenne auquel la France, en tant que pays d'accueil, contribue de manière significative. De ce fait, un effort particulier est apporté pour que la communauté scientifique française ait un impact important dans ce domaine. Ces travaux sont centralisés autour de l'Institut de recherche sur la fusion magnétique du CEA à Cadarache, mais impliquent également de nombreux laboratoires de mathématiques, en particulier à Aix-Marseille et Nice, mais aussi à Paris, Toulouse, Rennes, Strasbourg, etc. Ils sont regroupés au sein de la fédération de recherche sur la fusion par confinement magnétique (FR-FCM).

La fusion magnétique repose sur le confinement d'un plasma (gaz de particules chargées) à une température dix fois supérieure à la température au centre du soleil pendant une durée la plus longue possible. Par l'effet des collisions et de la turbulence, les pertes de particules et d'énergie peuvent être importantes et doivent être minimisées, ce qui pose de nombreuses questions mathématiques difficiles.

On peut citer la question de l'existence et la stabilité d'équilibres 3D d'un plasma dans un champ magnétique et sa configuration, dans l'optique d'avoir un bilan énergétique positif. Des réponses peuvent être apportées aussi bien sur le plan théorique que par la simulation numérique. Les efforts des mathématiciennes et des mathématiciens français dans ce domaine sont principalement axés sur la modélisation (en magnétohydrodynamique ou par équations cinétiques) et sur le calcul scientifique. Le caractère intrinsèquement multi-échelle, à la fois en temps et en espace, des plasmas de fusion rend leur simulation particulièrement difficile et consommatrice en ressources de calcul. Les codes de modélisation de la fusion consomment une partie importante du temps de calcul sur les très grands calculateurs et font partie des projets phares des grands centres de calcul. Le développement d'algorithmes efficaces pour ces codes, nécessitant en particulier un très fort parallélisme, est une des questions importantes dans la recherche actuelle en calcul scientifique.

12.4.4 QUELS ENJEUX POUR CES INTERACTIONS AVEC LE CALCUL SCIENTIFIQUE ?

Dans de nombreux domaines de la physique, des méthodes numériques simples, développées au début de l'ère de la simulation numérique, sont toujours utilisées bien que des méthodes bien plus puissantes et robustes aient été développées depuis. Un défi important pour les mathématiciennes et les mathématiciens est d'accélérer l'adoption des méthodes modernes dans les codes de production physique[54]. Ceci nécessite des interactions fortes avec les

52. Acronyme pour Institut de radioprotection et de sûreté nucléaire.
53. Acronyme pour *International thermonuclear experimental reactor.*

54. Plusieurs méthodes ont été développées pour résoudre l'équation de Boltzmann de manière approchée. La première est une méthode statistique de Monte-Carlo, les principaux codes utilisant cette méthode sont MCNP, Tripoli-42 et SERPENT3. La seconde est une méthode déterministe qui consiste à discrétiser l'équation spatialement et énergétiquement. Les codes utilisant cette méthode sont souvent séparés entre :
(a) les codes de réseau (par ex. APOLLO-2), pour résoudre l'équation de Boltzmann à l'échelle d'un assemblage nucléaire ;
(b) les codes de cœur (par ex. CRONOS ou COCCINELLE) qui utilisent les résultats issus d'un code de réseau pour résoudre l'équation de Boltzmann à l'échelle d'un réacteur entier.

physiciens et notamment une implication de mathématiciennes et de mathématiciens dans le développement des codes de production physique, ce qui est différent de l'activité plus standard d'écriture de codes prototypes permettant de vérifier une nouvelle méthode numérique.

Le développement de « jumeaux digitaux » amène de nombreux problèmes auxquels les mathématiciens peuvent apporter des contributions essentielles : la vérification rigoureuse des modèles complexes, couplant plusieurs catégories classiques de modèles utilisés dans ces codes, soit par des techniques analytiques soit par des validations numériques. Ceci peut demander le développement de nouvelles classes de modèles d'EDP ou une reformulation des modèles permettant d'exhiber une structure mathématique, hamiltonienne par exemple, ou un couplage de structures différentes discrétisées chacune avec une méthode adaptée.

Les simulations prédictives, permettant de remplacer en partie l'expérience, nécessiteront le couplage d'échelles de temps et d'espace très différentes ; des méthodes numériques devront être adaptées, comme les méthodes AP (*asymptotic preserving*) et leurs variantes.

Un autre défi important sera le couplage de méthodes déterministes et probabilistes ainsi que la prise en compte de données expérimentales par l'intermédiaire notamment de l'apprentissage machine.

12.4.5 LA FRANCE EST-ELLE BIEN PLACÉE POUR RÉPONDRE À CES ENJEUX ?

L'école française de mathématiques appliquées a joué un rôle important dans le développement de la simulation numérique en physique. Des équipes françaises ont eu des contributions substantielles dans la plupart des enjeux mentionnés. Des structures ont été mises en place pour intensifier les interactions entre mathématiciens et physiciens pour le développement de codes de simulations. Celles-ci ont vocation à être développées.

La France est également compétitive en ce qui concerne les moyens de calcul (très grand centre de calcul, TGCC du CEA), mais c'est au niveau de l'Union européenne que les développements dans ce domaine vont se faire, grâce aux centres d'excellence HPC et aux nouveaux moyens de calculs. Le CEA est moteur en France sur le sujet.

12.5 LIEUX D'INTERFACES

Revenons à la question générale des interactions mathématiques-physique, en nous concentrant sur la physique théorique. La proximité des idées, avec des approches parfois très différentes, se retrouve parfois dans une proximité géographique. Les laboratoires de physique théorique sont souvent voisins des centres de mathématiques mais, contrairement à ce qui se passe dans d'autres pays, les laboratoires mixtes sont peu nombreux. Citons, par exemple, à l'étranger le prestigieux département de mathématiques appliquées et physique théorique[55] (DAMTP) à Cambridge, qui a accueilli des membres célèbres tels que Paul Dirac ou Stephen Hawking.

Quelques lieux privilégiés favorisent toutefois les échanges et les interactions. L'IHP et l'IHES, deux centres mondialement connus de rencontres mathématiques, accueillent des physiciens-mathématiciens. Les conférences communes sont aussi très fréquentes au CIRM. La fédération de recherche en mathématiques de Marseille[56] inclut un laboratoire de physique théorique (CPT). Signalons un laboratoire un peu singulier en France, l'Institut Denis Poisson[57] (site de Tours), qui mêle mathématiciens et physiciens théoriciens dans la même entité. L'ancien Institut non linéaire de Nice (INLN), qui a fusionné assez récemment avec un autre laboratoire au sein de l'Institut de physique de Nice (INPHYNI), présentait la même singularité.

Il s'agit de singularités à l'échelle française car de telles entités sont courantes à l'international et on peut sans doute regretter qu'il n'y en ait pas plus d'exemples en France, tant des domaines comme les systèmes dynamiques, les systèmes complexes, la théorie des champs, la physique combinatoire (et de nombreux autres) se prêteraient bien à de telles initiatives. ●

55. https://www.damtp.cam.ac.uk.
56. http://frumam.cnrs-mrs.fr.
57. https://www.idpoisson.fr.

CHAPITRE 13

PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES

13.1 HISTORIQUE ET CONTEXTE

La France est forte d'une tradition en philosophie des mathématiques, que l'on peut faire remonter à Descartes et Pascal. Cette tradition joue un rôle important dans la place qu'occupent les mathématiques à la fois dans notre imaginaire collectif et, de façon plus concrète, dans l'enseignement, y compris aux niveaux les plus élémentaires, les mathématiques étant pensées comme méthode tout autant que comme contenu. L'excellence française en mathématiques trouve en partie ses racines dans cette tradition cartésienne.

Il en a résulté l'émergence d'une communauté de philosophes des mathématiques, traditionnellement importante dans le panorama scientifique français. On peut citer, au début du XXe siècle, dans des directions et avec des styles différents, Henri Poincaré (sur la méthode, la découverte, les probabilités, la physique, etc.), Léon Brunschvicg (sur la philosophie mathématique) ou Louis Couturat (porte-parole en France du logicisme et de la méthode axiomatique). Plus tard, le dialogue de Jean Cavaillès et Albert Lautman avec le premier groupe Bourbaki a joué un rôle important dans l'évolution de la philosophie mathématique, mais sans doute aussi dans la constitution de la pensée structuraliste en mathématiques.

13.2 AXES DE RECHERCHE

La tradition française en philosophie des mathématiques est marquée par plusieurs traits caractéristiques, que l'on retrouve dans les recherches actuelles et qui la distinguent d'approches dites analytiques, plus orientées sur la logique, l'ontologie et le langage : une attention portée à l'historicité du savoir ; un intérêt pour les contenus mathématiques mêmes ; l'idée que la philosophie des mathématiques et l'épistémologie font partie intégrante de la philosophie générale. On observe cependant un mouvement général au niveau international de dialogue et de rapprochements entre les différentes traditions, mouvement qui n'est pas spécifique à la philosophie des mathématiques.

Les axes de recherche actuels regroupent des thématiques comme l'histoire de la philosophie mathématique et de ses grands auteurs ; l'édition de textes ; la logique et les fondements ; les études de concepts ; et des axes plus récents, en partie liés à ces rapprochements, et qui s'intéressent à des pratiques comme l'usage des diagrammes ou les styles d'écriture.

13.3 STRUCTURATION ET ENJEUX

Le CNRS a travaillé à la structuration de la communauté avec la création d'un Groupement de recherche (GDR), PhilMath, dont la mission est de promouvoir et de fédérer les recherches en philosophie des mathématiques en France. Sans être exhaustif, il donne une bonne image de l'état institutionnel de la discipline. Un phénomène intéressant est qu'outre des unités de l'Institut des sciences humaines et sociales (INSHS) y figurent quatre unités relevant de l'Institut national des sciences mathématiques et de leurs interactions (Insmi) à Montpellier, Nice, Paris-Saclay et Toulouse.

Un enjeu actuel est de favoriser les recherches sur les mathématiques contemporaines, à l'image de ce qui s'est passé au début du XXe siècle. L'école française est bien placée de ce point de vue, du fait de son intérêt traditionnel pour les contenus mathématiques et les dynamiques conceptuelles.

Il conviendrait donc d'encourager plus systématiquement les interactions entre philosophes et mathématiciens et de faire émerger une discussion sur les méthodes des mathématiques d'aujourd'hui, ainsi que sur leurs avancées. Outre les champs thématiques classiques et les problématiques associées, comme l'unité des mathématiques, sont concernés : le développement de nouvelles interactions avec les sciences de l'homme et de la nature ; la transformation des pratiques (rôle de l'expérimentation par ordinateur, logiciels d'assistance à la création ou la vérification de preuves, etc.) ; l'intelligence artificielle et problèmes afférents. Un tel débat devrait être diffusé au-delà de la seule communauté mathématique et permettre de repenser le positionnement des mathématiques vis-à-vis des autres sciences ainsi que leur rôle dans la société contemporaine.

Signalons, dans une direction complémentaire, l'existence de liens entre épistémologie et didactique qui ont pu se manifester à l'occasion de la réforme des mathématiques modernes et dans les activités des Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques (Irem). On en trouve la reprise dans l'intitulé du GDR DEMIPS de constitution récente : Didactique et épistémologie des mathématiques, liens avec l'informatique et la physique, dans le supérieur.

CHAPITRE 14

MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES ET SOCIALES

14.1 DES INTERFACES TRADITIONNELLES

Outre les volets didactique, histoire et philosophie des sciences qui sont traités dans les chapitres précédents, les mathématiques entretiennent deux interfaces historiques et importantes avec les sciences humaines et sociales, l'une autour de la sociologie, et l'autre autour de l'économie. Ces interfaces doivent beaucoup aux intuitions de Borel qui vit, dans le développement des probabilités et des statistiques dans la première partie du XXe siècle, une opportunité pour analyser la société ainsi qu'un outil pour la prise de décision politique. On lui doit la création de l'Institut de statistiques qu'est l'Isup et l'installation de la statistique au sein des sciences mathématiques, du moins dans le paysage scientifique français.

Datant elles aussi du début du XXe siècle avec les travaux de Louis Bachelier, les mathématiques financières se sont considérablement développées à la fin du siècle dernier. Il est intéressant de noter que ce développement s'est largement effectué dans des laboratoires de sciences humaines et sociales. Ces disciplines se retrouvent ainsi, avec la théorie des jeux et l'économie mathématique, dans des unités au spectre plus large, incluant par exemple de l'économie théorique. Parmi ces lieux féconds d'interface, il y a les UMR Crest et Lem pour les statistiques et les méthodes mathématiques (thème relevant de la section 37 du CNRS), l'UMR CES pour l'économie mathématique, l'UMR Thema, TSE-R, GREGHEC pour la finance et les UMR PjSE, CREST, TSE-R pour la théorie des jeux. Certaines de ces UMR ont d'ailleurs un rattachement secondaire à la section 41 du CNRS (TSE-R, CES, CREST, LEM).

L'interface avec les sciences sociales prend racine dans la célèbre polémique qui opposa Émile Borel et John Maynard Keynes sur le statut à donner à l'analyse probabiliste. Outre les probabilités, des disciplines mathématiques variées sont concernées : les mathématiques discrètes et la théorie des graphes pour l'analyse et la modélisation des réseaux de toutes sortes (on peut penser à des réseaux commerciaux historiques, mais aussi à nos réseaux sociaux bien modernes), l'analyse des équations aux dérivées partielles pour la modélisation de la propagation de phénomènes (transmission de la grippe, propagation de feux de forêts, propagation d'espèces invasives, etc.), les systèmes dynamiques pour la modélisation de l'évolution de populations, les probabilités, l'algorithmique, voire même la combinatoire topologique et l'analyse des systèmes complexes, aujourd'hui en plein développement. Il s'agit de recherches résolument tournées vers les applications. Cette approche interdisciplinaire s'incarne aujourd'hui dans des unités comme l'UMR CAMS[58] qui héberge des mathématiciennes, des mathématiciens et des chercheurs et chercheuses en sciences humaines et sociales, ou comme le Lisis[59] par exemple.

14.2 ÉMERGENCE DE NOUVELLES PROBLÉMATIQUES LIÉES AUX SCIENCES DU NUMÉRIQUE

L'explosion de l'utilisation des technologies numériques en sciences humaines, réunies sous le vocable « humanités numériques », a contribué au développement de l'interface entre mathématiques et sciences humaines autour de questions comme la visualisation de données de grande dimension ou de graphes et de réseaux complexes. L'Institut des systèmes complexes de Paris[60] est un bon exemple de ce type de collaboration où ingénierie mathématique, nouvelles technologies et méthodes innovantes sont développées dans une perspective de recherche pour les sciences humaines et sociales au sens large (histoire, archéologie, sociologie, etc.). Citons également le Liris qui travaille au développement d'une sociologie numérique en direction des sciences sociales computationnelles.

Dans ce contexte de développement des techniques d'analyse, l'utilisation de la statistique et de techniques d'intelligence artificielle (réseaux neuronaux et apprentissage) prennent une place accrue et se développent autour d'initiatives individuelles par des collaborations entre chercheurs et chercheuses de laboratoires de mathématiques, d'une part, et de laboratoires des sciences humaines et sociales, d'autre part (statistique et archéologie à Nantes par exemple, droit et apprentissage automatique, etc.).

14.3 DES INTERFACES À DÉVELOPPER

D'apparition plus récente, les sciences du territoire s'imposent aujourd'hui par l'importance sociétale des problèmes auxquelles elles s'intéressent. Du fait de l'importance qu'accorde leur approche à la simulation et la modélisation, les sciences du territoire sont une discipline en lien avec les mathématiques, située au carrefour de différentes sciences. Les sciences humaines et

58. http://cams.ehess.fr/.
59. http://umr-lisis.fr/.
60. https://iscpif.fr/.

sociales y sont en dialogue avec les sciences de la vie et de la terre, les sciences de la santé, les sciences de l'ingénieur (pour la modélisation et la visualisation des systèmes complexes), les sciences physiques (climatologie, géologie par exemple) et enfin les mathématiques. Il est important que cette interface se développe et la création de l'Institut des mathématiques pour la planète terre devrait fournir un outil puissant pour faire grandir les collaborations en devenir. L'étude d'un phénomène donné (climatique ou épidémiologique) nécessite en effet la construction d'un modèle, son analyse et la validation des simulations – et les mathématiques interviennent à ce niveau – tout autant que leur interprétation en termes d'impact sur le territoire et l'analyse des pratiques de développement territorial à mettre en œuvre pour y faire face. Afin d'identifier au mieux les observations et les simulations à mener et garantir une bonne interprétation, un dialogue profond est nécessaire entre, d'une part, les sciences humaines et sociales et, d'autre part, les mathématiques et l'informatique.

14.4 LA COMMUNAUTÉ MATHÉMATIQUE COMME SUJET D'ÉTUDE

Enfin, il faut noter que la communauté mathématique et ses caractéristiques propres sont elles-mêmes un sujet d'étude des sciences sociales et ont attiré et attirent encore l'attention des chercheurs et des chercheuses en sociologie. Des comportements liés à l'élitisme, aux disparités de genres, à la reproduction sociale, ont été analysés au sein de la communauté mathématique dans différentes études, notamment ces dernières années dans les laboratoires de Sciences-Po. Mentionnons également les différents enjeux éthiques de l'intelligence artificielle qui constituent un sujet tout aussi important pour les sciences humaines et sociales que pour les mathématiques.

NOTES

RETROUVEZ-NOUS
EN LIGNE

hceres.fr

Hcéres

@Hceres_

Hcéres