Réécriture et opérade

Bérénice Delcroix-Oger

Institut de Mathématiques de Toulouse

Journées des GTs LAC & GéoCal

Plan de l'exposé

Historique

- 1970s : Découverte des opérades en topologie algébrique par May, Boardman et Vogt
- 1990s : Renaissance des opérades et applications algébriques
- 2010s : Opérades et réécriture

Qu'est-ce qu'une espèce ?

Définition (Joyal)

Une espèce F *est un endofoncteur de la catégorie des ensembles finis et bijections. À un ensemble fini I, l'espèce* F *associe un ensemble fini* $\mathrm{F}(I)$ *indépendant de la nature de I.*

Qu'est-ce qu'une espèce ?

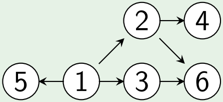
Définition (Joyal)

Une espèce F *est un endofoncteur de la catégorie des ensembles finis et bijections. À un ensemble fini* I*, l'espèce* F *associe un ensemble fini* $\mathrm{F}(I)$ *indépendant de la nature de* I*.*

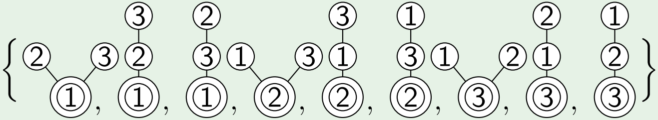
Contre-exemples

Les ensembles suivants ne peuvent pas être obtenus comme l'image d'un ensemble par une espèce :

- $\{(1,3),(1,2),(2,3)\}$(ensemble de paires (a,b), $a<b$, de $\{1,2,3\}$)
- (graphes de divisibilité de $\{1,2,3,4,5,6\}$)

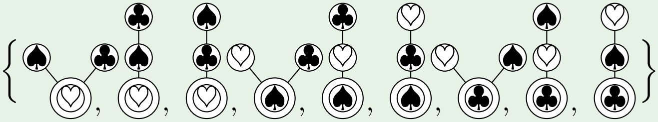


Exemples

- $\{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}$ (espèce $\mathbb{L}$ des listes sur $\{1,2,3\}$)
- $\{\{1,2,3\}\}$ (espèce des ensembles Comm)
- $\{\{\mathbf{1},2,3\},\{1,\mathbf{2},3\},\{1,2,\mathbf{3}\}\}$ (espèce des ensembles pointés $\mathbb{P}$)
-  (espèce des arbres enracinés $\mathbb{A}$)

Ces ensembles sont les images par des espèces de $\{1,2,3\}$.

Exemples

- $\{(\heartsuit,\spadesuit,\clubsuit),(\heartsuit,\clubsuit,\spadesuit),(\spadesuit,\heartsuit,\clubsuit),(\spadesuit,\clubsuit,\heartsuit),(\clubsuit,\heartsuit,\spadesuit),(\clubsuit,\spadesuit,\heartsuit)\}$ (espèce $\mathbb{L}$ des listes sur $\{\clubsuit,\heartsuit,\spadesuit\}$)
- $\{\{\heartsuit,\spadesuit,\clubsuit\}\}$ (espèce des ensembles Comm)
- $\{\{\underline{\heartsuit},\spadesuit,\clubsuit\},\{\heartsuit,\underline{\spadesuit},\clubsuit\},\{\heartsuit,\spadesuit,\underline{\clubsuit}\}\}$ (espèce des ensembles pointés $\mathbb{P}$)
-  (espèce des arborescences $\mathbb{A}$)

Ces ensembles sont les images par des espèces de $\{\heartsuit,\spadesuit,\clubsuit\}$.

Composition d'espèces

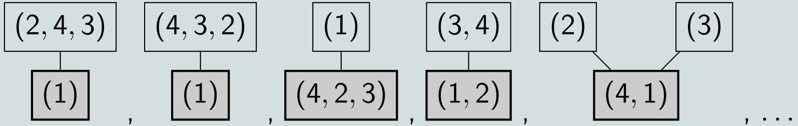
Proposition

Soient F et G, deux espèces.

$$(F \circ G)(I) = \bigcup_{\pi \in \mathcal{P}(I)} F(\pi) \times \prod_{J \in \pi} G(J),$$

où $\mathcal{P}(I)$ parcourt l'ensemble des partitions de I.

Exemple de composée : Arbres enracinés de listes sur $I = \{1, 2, 3, 4\}$



Retour sur la définition

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle

Définition (Joyal)

Une espèce F *est un foncteur de la catégorie des ensembles finis et bijections dans la catégorie des* $\mathfrak{S}$*-modules de dimension finie et isomorphismes (catégorie monoïdale symétrique). À un ensemble fini* I*, l'espèce* F *associe un* $\mathfrak{S}$*-module fini* $\mathrm{F}(I)$ *indépendant de la nature de* I*.*

Soient F et G, deux espèces.

$$(F \circ G)(I) = \mathrm{Vect}\left(F(\pi) \otimes \bigotimes_{J \in \pi} G(J), \pi \in \mathcal{P}(I) \right),$$

où $\mathcal{P}(I)$ parcourt l'ensemble des partitions de I.

Opérade

Définition (Boardman, Vogt, May)

Une opérade $\mathcal{P}$ est une structure algébrique modélisant les relations vérifiées par les produits d'une algèbre. Elle est donnée par :

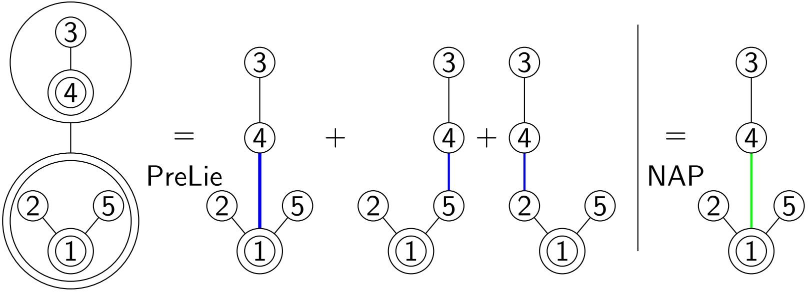
- *une espèce $\mathcal{P}$,*
- *une application $\gamma : \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \to \mathcal{P}$.*

Opérade

Définition (Boardman, Vogt, May)

Une opérade $\mathcal{P}$ est une structure algébrique modélisant les relations vérifiées par les produits d'une algèbre. Elle est donnée par :

- *une espèce $\mathcal{P}$,*
- *une application $\gamma : \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \to \mathcal{P}$.*



Exemple : l'opérade Comm

$$\mathrm{Comm}(V) = \{V\}$$

$$\mathrm{Comm} \circ \mathrm{Comm}(V) = \text{partitions de } V$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Comm} \circ \mathrm{Comm}(V) &\rightarrow \mathrm{Comm}(V) \\ \{\{1,2\},\{3\},\{4\}\} &\mapsto \{1,2,3,4\} \end{aligned}$$

Opérades et algèbres

Définition alternative d'une opérade :

Définition

Une opérade est une monade dans la catégorie des espaces vectoriels, via

$$\mathcal{P} : V \to \mathcal{P}(V) = \otimes_{n\geq 1}\mathcal{P}(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} V^n.$$

Soit $\mathcal{O}$, une opérade. Une *algèbre* A sur l'opérade $\mathcal{O}$ est :

- un espace vectoriel A
- une famille de morphismes $\mathcal{O}(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} A^n \to A$.

Comm

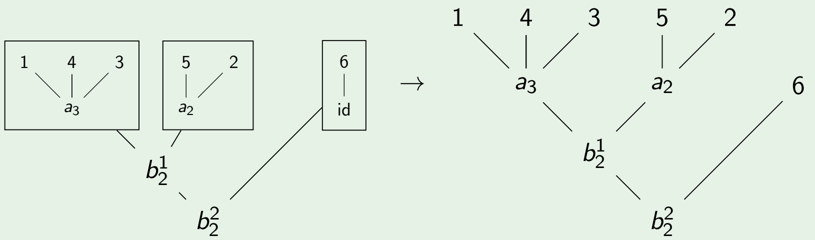
L'ensemble des algèbres sur l'opérade Comm est l'ensemble des algèbres commutatives.

Opérade libre

Définition

Étant donné un ensemble $E = (E_n)_{n \geq 2}$ d'opérations (indépendantes) d'arité n, l'opérade libre sur E, $\mathcal{F}(E)$, est donnée par :

- *$\mathcal{F}(E)(\{1, \ldots, n\})$ est l'ensemble des arbres plans aux sommets d'arité k étiquetés par un élément de E_k et aux feuilles étiquetées par $\{1, \ldots, n\}$*
- *La composition $\circ$ est donnée par la greffe d'arbres*



Présentation d'une opérade

$$\mathcal{P} = \mathcal{F}(E)/R =: \langle E; R \rangle$$

Définition

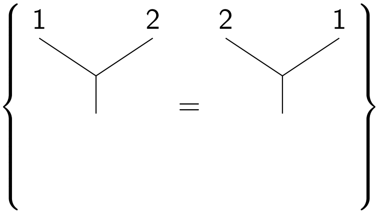
Une opérade quadratique est une opérade qui admet une présentation $\langle E; R \rangle$ avec

- $E_2 = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$, $E_n = \emptyset$, *pour tout* $n > 2$
- $R \subseteq \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j} \mu_i \circ \mu_j = 0$, *avec* $\alpha_{i,j} \in \mathbb{K}$

Présentation d'une opérade : cas Comm

$$E_2 = \{e\}, \quad E_n = 0, \forall n > 2$$

$R =$



Koszulité et réécriture

- Notion topologique sur les algèbres et les opérades associées à l'acyclicité d'un complexe appelé *complexe de Koszul*.

Koszulité et réécriture

- Notion topologique sur les algèbres et les opérades associées à l'acyclicité d'un complexe appelé *complexe de Koszul*.
- Soit $\mathcal{P} = \langle E; R \rangle$, une opérade quadratique,

Koszulité et réécriture

- Notion topologique sur les algèbres et les opérades associées à l'acyclicité d'un complexe appelé *complexe de Koszul*.
- Soit $\mathcal{P} = \langle E; R \rangle$, une opérade quadratique,

Theorème (Dotsenko, Khoroshkin ; Hoffbeck)

Si E admet une base ordonnée, les relations de R peuvent être orientées : on obtient un système de réécriture. Alors $\mathcal{P}$ est Koszul si et seulement si toutes les paires critiques confluent.

Bigèbres généralisées

Définition

Une bigèbre généralisée $\mathcal{H}$ est un espace vectoriel qui est une $\mathcal{A}$-algèbre et une $\mathcal{C}$-cogèbre et invariante par l'opération de réécriture (relation de compatibilité)

$$\mathcal{C} \circ \mathcal{A} \to \mathcal{A} \circ \mathcal{C}$$

$$\Delta \circ \mu \to \sum_{\substack{N=\mathrm{ar}(m_1)+\mathrm{ar}(m_2)=\mathrm{coar}(d_1)+\mathrm{coar}(d_2) \\ \sigma \in \mathfrak{S}_n}} (m_1 \otimes m_2) \circ \sigma \circ (d_1 \otimes d_2).$$

Exemple : l'algèbre des polynômes

Soit $\mathbb{C}$ un corps de caractéristique 0 et $(\mathbb{C}[X], \times)$ l'algèbre des polynômes en une variable (avec le produit usuel).
Cet algèbre munie du coproduit suivant forme une bigèbre (de Hopf) :

$$\Delta(X^k) = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} X^l \otimes X^{k-l}.$$

et

$$\Delta(P(X) \times Q(X)) = \Delta(P(X))(\times \otimes \times)\Delta(Q(X)). \quad \text{(Relation de Hopf)}$$

Exemple : l'algèbre des polynômes

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] X^k \arrow[r, bend left, "\Delta"] & \sum_{l=0}^{k} \binom{l}{k} X^l \otimes X^{k-l} \arrow[l, bend left, "\frac{1}{2^k}\times"] \end{tikzcd}$$

Autre exemple : l'algèbre des mots

Soit V un alphabet et V^+ l'espace vectoriel des mots non vides sur V, muni du produit de concaténation $\cdot$ et du coshuffle Δ donné sur tout mot non vide $u = u_1 \dots u_n$ par :

$$\Delta(u) = \sum_{\substack{k, i_1 < \dots < i_k, j_1 < \dots < j_{n-k} \\ u_{i_1} \dots u_{i_k} \cap u_{j_1} \dots u_{j_{n-k}} = \emptyset}} u_{i_1} \dots u_{i_k} \otimes u_{j_1} \dots u_{j_{n-k}},$$

$(V^+, \cdot, \Delta)$ est alors une bigèbre de Hopf.

Autre exemple : l'algèbre des mots

$$
\begin{tikzcd}
21 \arrow[dr, bend left, "\Delta"] & \\
12+21 \arrow[r, bend right, "\frac{1}{2}\Delta"'] & 1 \otimes 2 + 2 \otimes 1 \arrow[l, "\times"'] \\
12 \arrow[ur, bend right, "\Delta"'] &
\end{tikzcd}
$$

Considérons maintenant la déconcaténation Δ_d. La concaténation et la déconcaténation vérifient :

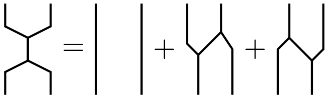
Considérons maintenant la déconcaténation Δ_d. La concaténation et la déconcaténation vérifient :

$$\begin{aligned}\Delta(u \cdot v) = \Delta(u_1 \dots u_k v_1 \dots v_l) = &\sum_{i=1}^{k-1} u_1 \dots u_i \otimes u_{i+1} \dots u_k v_1 \dots v_l + u \otimes v \\ &+ \sum_{i=1}^{l-1} u_1 \dots u_k v_1 \dots v_i \otimes v_{i+1} \dots v_l.\end{aligned}$$

Considérons maintenant la déconcaténation Δ_d. La concaténation et la déconcaténation vérifient :

$$\Delta(u \cdot v) = \Delta(u_1 \dots u_k v_1 \dots v_l) = \sum_{i=1}^{k-1} u_1 \dots u_i \otimes u_{i+1} \dots u_k v_1 \dots v_l + u \otimes v$$
$$+ \sum_{i=1}^{l-1} u_1 \dots u_k v_1 \dots v_i \otimes v_{i+1} \dots v_l.$$

$$\Delta(u \cdot v) = u \otimes v + \Delta(u)_1 \otimes \Delta(u)_2 \cdot v + u \cdot \Delta(v)_1 \otimes \Delta(v)_2.$$



Théorème de rigidité

Theorème (Burgunder, O.)

Pour toutes opérades $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ ayant la même espèce sous-jacente, il existe une relation de compatibilité λ telle que toute $\mathcal{A}-\mathcal{C}$ bigèbre vérifiant λ soit libre et colibre sur l'ensemble de ses éléments primitifs (sur lesquels tout coproduit s'annule).

Considérant un système de réécriture (S) donnée par une structure de $\mathcal{A}$-algèbre et une structure de $\mathcal{C}$-cogèbre, il existe des règles de réécriture (R) de type "relations de compatibilité" telles que le système obtenu en considérant les règles de (S) et de (R) soit convergent et cohérent.
(en cours avec P.-L. Curien et Y. Guiraud)

Réécriture et bases de Gröbner

- But : développer une théorie des bases de Gröbner / de la réécriture pour les $\mathcal{A}$-algèbres
- Avantages : Apports mutuels entre la réécriture et l'algèbre

(Collaboration en cours avec E. Burgunder, Y. Guiraud, J. Millès)

Merci de votre attention !