

THÉORIE DE SQUIER ET APPLICATION AUX MONOÏDES D'ARTIN

Yves Guiraud

IRIF

INRIA et Université Paris 7

Rencontre πr^2 à Fontainebleau

10 avril 2018

1. Le théorème de Squier

1.1. Présentations convergentes et problème du mot

Fait : pour tout monoïde M ,

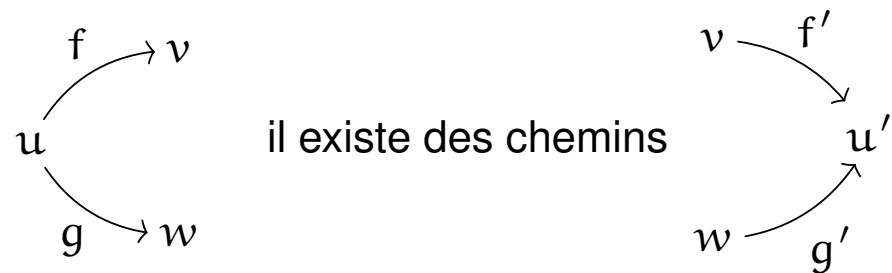
M admet une présentation convergente finie (PCF) $\implies M$ a un problème du mot décidable

Présentation convergente : 1-polygraphe (= système de réécriture de mots) $X = (X_0^* \xleftarrow{X_1})$, tq

• X présente M : $M \simeq X_0^* / \equiv_{X_1}$

• X termine : il n'existe pas de $u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow (\dots) \rightarrow u_n \rightarrow u_{n+1} \rightarrow (\dots)$

• X est confluent : pour tous chemins $u \xrightarrow{f} v$ et $u \xrightarrow{g} w$ il existe des chemins $v \xrightarrow{f'} u'$ et $w \xrightarrow{g'} u'$



1.1. Présentations convergentes et problème du mot

Fait : pour tout monoïde M ,

M admet une présentation convergente finie (PCF) $\implies M$ a un problème du mot décidable

Présentation convergente : 1-polygraphe (= système de réécriture de mots) $X = (X_0^* \xleftarrow{\quad} X_1)$, tq

- X présente M : $M \simeq X_0^* / \equiv_{X_1}$
- X termine : il n'existe pas de $u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow (\dots) \rightarrow u_n \rightarrow u_{n+1} \rightarrow (\dots)$

• X est confluent : pour tous chemins $u \xrightarrow{f} v$ et $u \xrightarrow{g} w$ il existe des chemins $v \xrightarrow{f'} u'$ et $w \xrightarrow{g'} u'$

Conséquences :

- tout $u \in X_0^*$ a une unique forme normale \hat{u}
 - pour tous $u, v \in X_0^*$, on a $u \equiv_M v$ ssi $\hat{u} = \hat{v}$
 - X fini \implies décider si $u \in X_0^*$ satisfait $u = \hat{u}$
- } \rightsquigarrow Solution au problème du mot :
- $u \qquad v$

1.1. Présentations convergentes et problème du mot

Fait : pour tout monoïde M ,

M admet une présentation convergente finie (PCF) $\implies M$ a un problème du mot décidable

Présentation convergente : 1-polygraphe (= système de réécriture de mots) $X = (X_0^* \xleftarrow{X_1})$, tq

• X présente M : $M \simeq X_0^* / \equiv_{X_1}$

• X termine : il n'existe pas de $u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow (\dots) \rightarrow u_n \rightarrow u_{n+1} \rightarrow (\dots)$

• X est confluent : pour tous chemins $u \xrightarrow{f} v$ et $u \xrightarrow{g} w$, il existe des chemins $v \xrightarrow{f'} u'$ et $w \xrightarrow{g'} u'$

Conséquences :

- tout $u \in X_0^*$ a une unique forme normale \hat{u}
- pour tous $u, v \in X_0^*$, on a $u \equiv_M v$ ssi $\hat{u} = \hat{v}$
- X fini \implies décider si $u \in X_0^*$ satisfait $u = \hat{u}$

Solution au problème du mot :

$$u \rightarrow \hat{u} \stackrel{?}{=} \hat{v} \leftarrow v$$

1.2. Le problème de Jantzen

Question [Jantzen 82, 85] : si M monoïde de type fini (= nb. fini de générateurs),

M a un problème du mot décidable $\stackrel{?}{\implies}$ M admet une PCF

1.2. Le problème de Jantzen

Question [Jantzen 82, 85] : si M monoïde de type fini (= nb. fini de générateurs),

M a un problème du mot décidable $\stackrel{?}{\implies} M$ admet une PCF

Problème : l'existence d'une PCF (X_0, X_1) dépend de X_0

Exemple : $B_3^+ \simeq \langle s, t \mid sts \rightarrow tst \rangle$ monoïde des tresses positives sur trois brins



Théorème [Garside 69] : B_3^+ a un problème du mot décidable

1.2. Le problème de Jantzen

Question [Jantzen 82, 85] : si M monoïde de type fini (= nb. fini de générateurs),

M a un problème du mot décidable $\stackrel{?}{\implies} M$ admet une PCF

Problème : l'existence d'une PCF (X_0, X_1) dépend de X_0

Exemple : $B_3^+ \simeq \langle s, t \mid sts \rightarrow tst \rangle$ monoïde des tresses positives sur trois brins



Théorème [Garside 69] : B_3^+ a un problème du mot décidable

Théorème [Kapur-Narendran 85] : $\begin{cases} B_3^+ \text{ n'admet aucune PCF } (\{s, t\}, X_1) \\ B_3^+ \text{ admet une PCF (avec d'autres générateurs)} \end{cases}$

• toute PC $(\{s, t\}, X_1)$ doit contenir $stsst^n \leftrightarrow ts^{n+1}ts$ pour tout $n \geq 1$

• $B_3^+ \simeq \langle s, t, a \mid sts \rightarrow tst, st \rightarrow a \rangle \simeq \langle s, t, a \mid as \rightarrow ta, st \rightarrow a \rangle \xrightarrow{\text{Knuth-Bendix}} \text{PCF}$

Idée de Squier : M admet une PCF $\implies M$ satisfait un certain *invariant algébrique*

1.3. Graphe des dérivations et sphères

Fixons une présentation $X = (X_0^* \overleftarrow{=} X_1)$ d'un monoïde M

Graphe $G(X)$ des dérivations de X : $X_0^* \overleftarrow{=} X_0^* X_1 X_0^*$

- sommets (*0-cellules*) : éléments du monoïde libre X_0^*
- arêtes (*1-cellules*) : étapes de réécriture $vuw \xrightarrow{v\alpha w} vu'w$ avec $u \xrightarrow{\alpha} u' \in X_1$ et $v, w \in X_0^*$

1.3. Graphe des dérivations et sphères

Fixons une présentation $X = (X_0^* \leftarrow X_1)$ d'un monoïde M

Graphe $G(X)$ des dérivations de X : $X_0^* \leftarrow X_0^* X_1 X_0^*$

- sommets (*0-cellules*) : éléments du monoïde libre X_0^*
- arêtes (*1-cellules*) : étapes de réécriture $vuw \xrightarrow{v\alpha w} vu'w$ avec $u \xrightarrow{\alpha} u' \in X_1$ et $v, w \in X_0^*$

Fait : $u \equiv_M v$ ssi il existe un chemin non orienté $u \rightarrow w_1 \leftarrow \cdots \rightarrow w_n \leftarrow v$ dans $G(X)$

\rightsquigarrow Chemins non orientés de $G(X)$ = Preuves algébriques d'égalités $u \equiv_M v$

\rightsquigarrow « Trous » de $G(X)$ = Différences entre preuves d'une même égalité $u \equiv_M v$

1.3. Graphe des dérivations et sphères

Fixons une présentation $X = (X_0^* \overleftarrow{=} X_1)$ d'un monoïde M

Graphe $G(X)$ des dérivations de X : $X_0^* \overleftarrow{=} X_0^* X_1 X_0^*$

- sommets (0-cellules) : éléments du monoïde libre X_0^*
- arêtes (1-cellules) : étapes de réécriture $vuw \xrightarrow{v\alpha w} vu'w$ avec $u \xrightarrow{\alpha} u' \in X_1$ et $v, w \in X_0^*$

Fait : $u \equiv_M v$ ssi il existe un chemin non orienté $u \rightarrow w_1 \leftarrow \dots \rightarrow w_n \leftarrow v$ dans $G(X)$

\rightsquigarrow Chemins non orientés de $G(X)$ = Preuves algébriques d'égalités $u \equiv_M v$

\rightsquigarrow « Trous » de $G(X)$ = Différences entre preuves d'une même égalité $u \equiv_M v$

Sphère : couple $u \begin{array}{c} \xleftarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} v$ de chemins non orientés *parallèles*

Sphère inessentielle :

$$\begin{array}{ccccc} w\alpha xvy & \rightarrow & wu'xvy & \rightarrow & wu'x\beta y \\ wuxvy & & & & wu'xv'y \\ wux\beta y & \rightarrow & wuxv'y & \rightarrow & w\alpha xv'y \end{array}$$

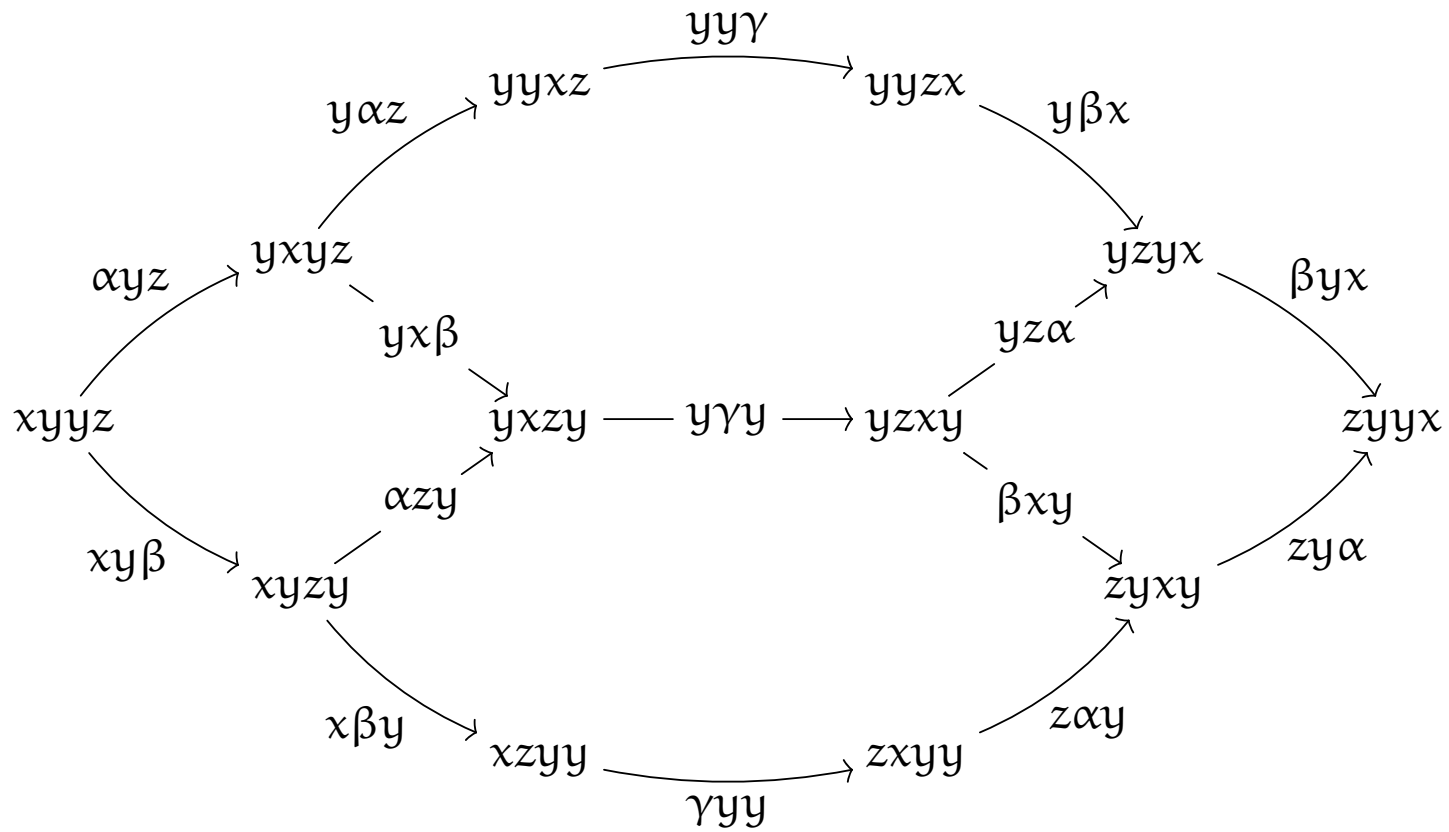
avec $\begin{cases} u \xrightarrow{\alpha} u', v \xrightarrow{\beta} v' \in X_1 \\ w, x, y \in X_0^* \end{cases}$

1.4. Exemple : le monoïde commutatif libre de rang 3

$$\mathbb{N}^3 \simeq \langle x, y, z \mid xy \xrightarrow{\alpha} yx, yz \xrightarrow{\beta} zy, xz \xrightarrow{\gamma} zx \rangle$$

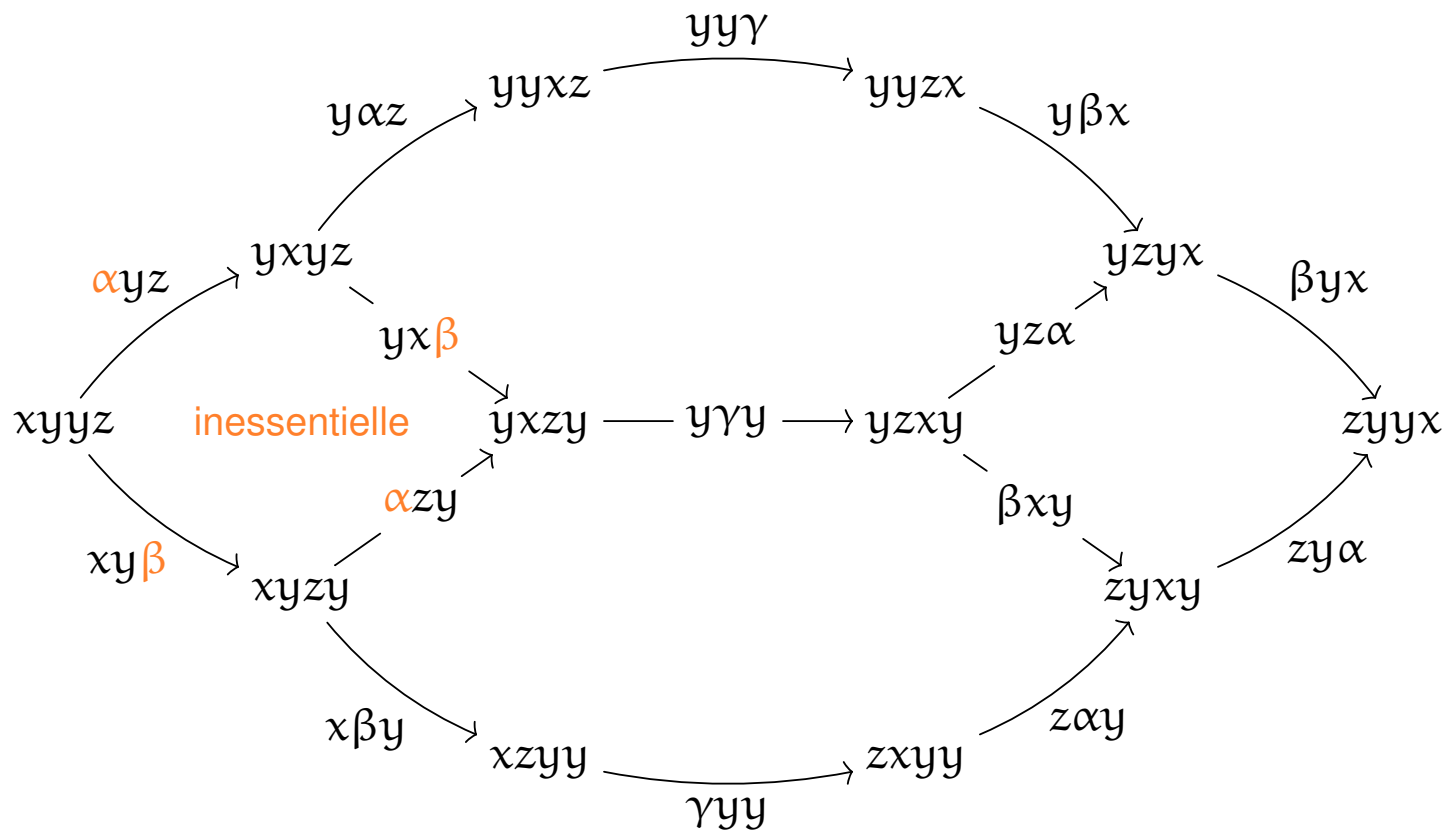
1.4. Exemple : le monoïde commutatif libre de rang 3

$$\mathbb{N}^3 \simeq \langle x, y, z \mid xy \xrightarrow{\alpha} yx, yz \xrightarrow{\beta} zy, xz \xrightarrow{\gamma} zx \rangle$$



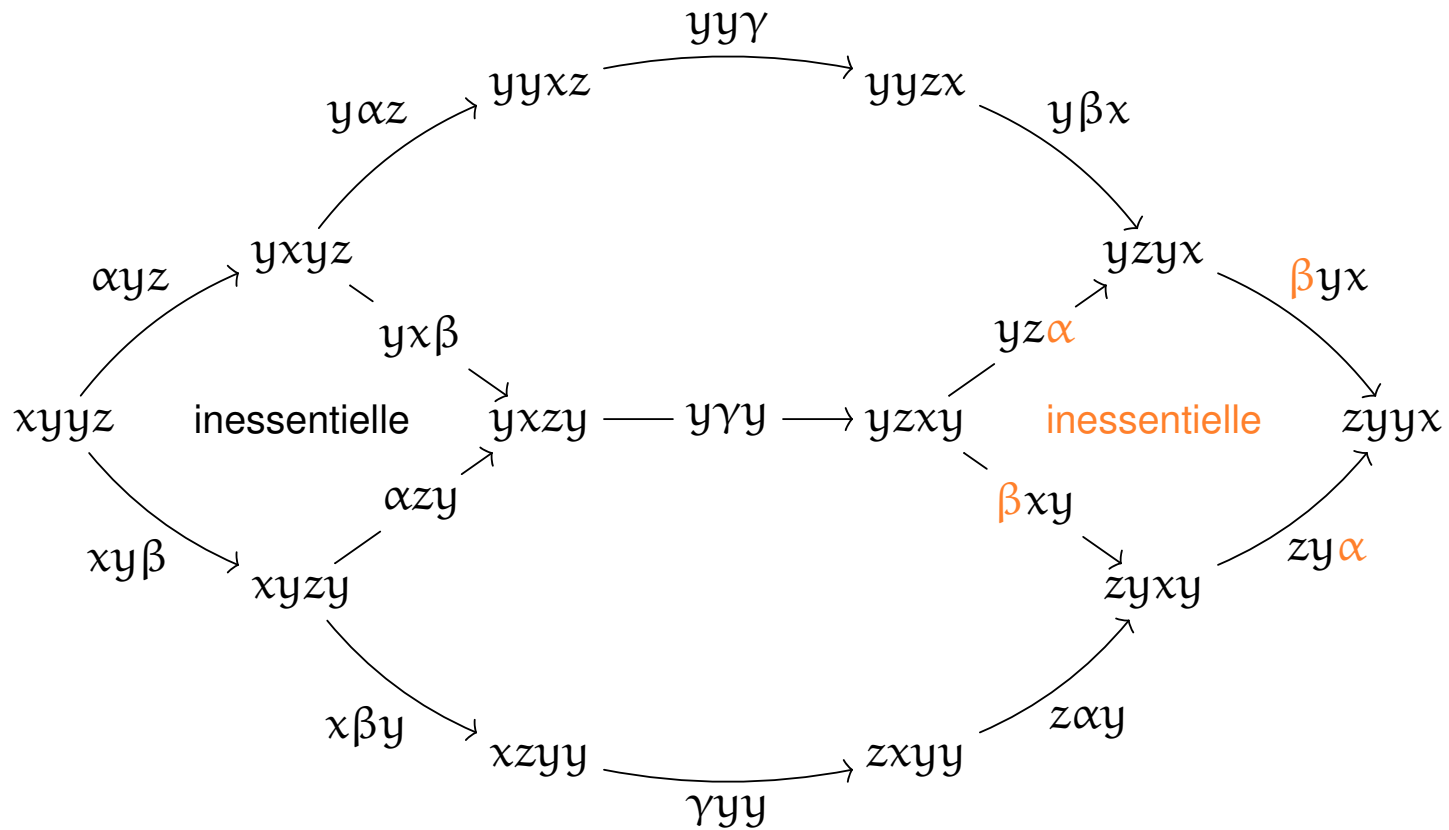
1.4. Exemple : le monoïde commutatif libre de rang 3

$$\mathbb{N}^3 \simeq \langle x, y, z \mid xy \xrightarrow{\alpha} yx, yz \xrightarrow{\beta} zy, xz \xrightarrow{\gamma} zx \rangle$$



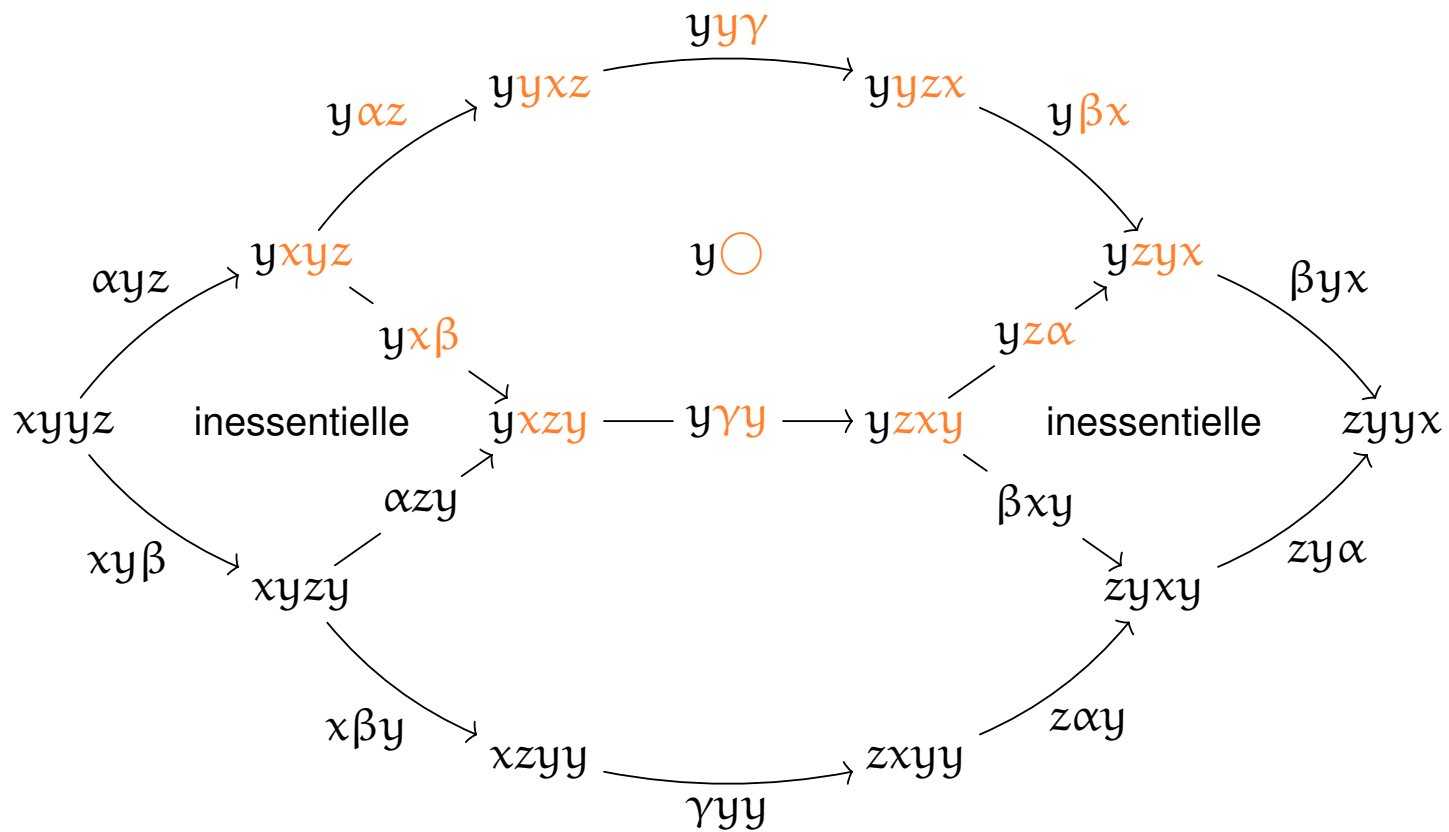
1.4. Exemple : le monoïde commutatif libre de rang 3

$$\mathbb{N}^3 \simeq \langle x, y, z \mid xy \xrightarrow{\alpha} yx, yz \xrightarrow{\beta} zy, xz \xrightarrow{\gamma} zx \rangle$$



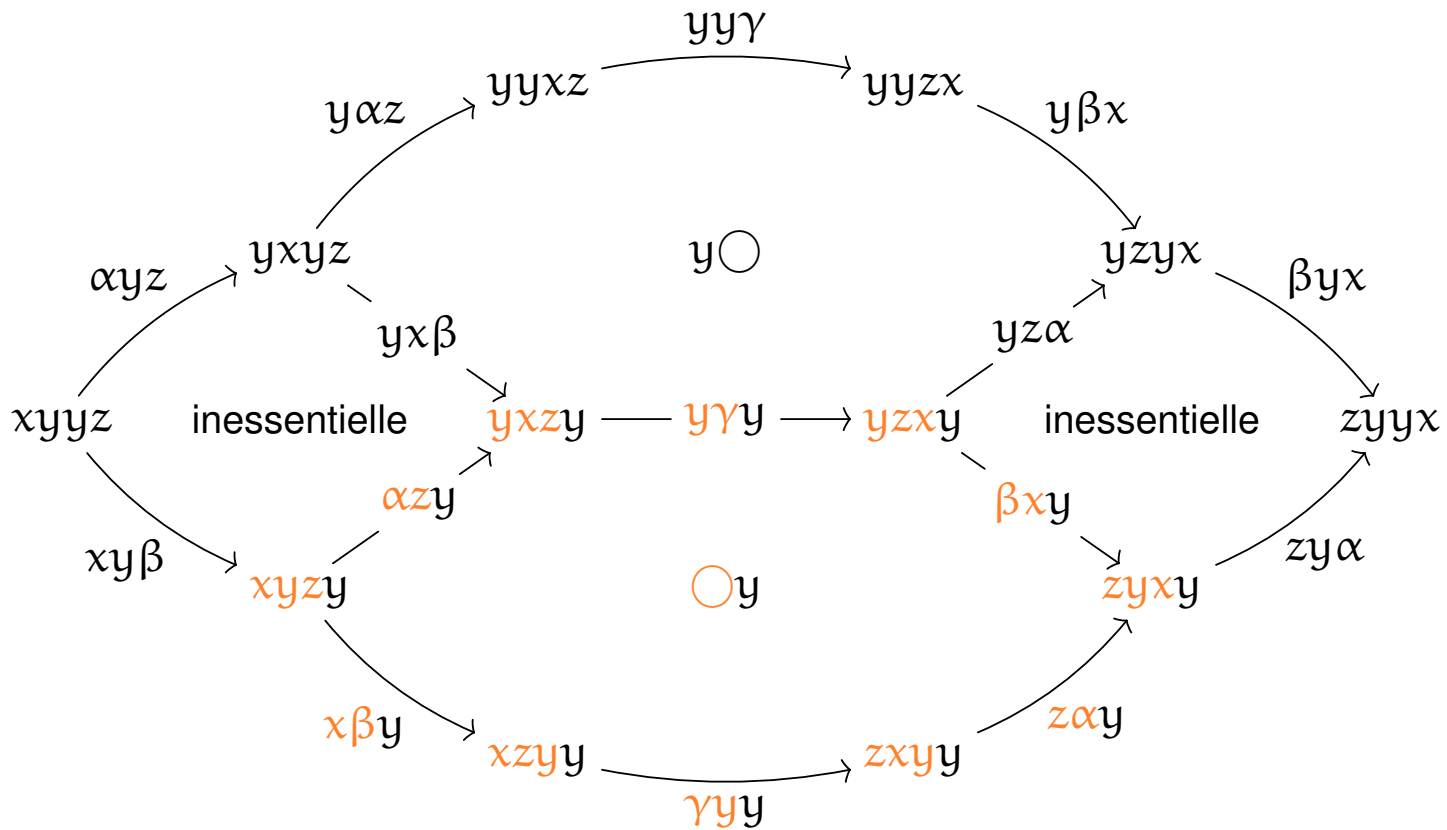
1.4. Exemple : le monoïde commutatif libre de rang 3

$$\mathbb{N}^3 \simeq \langle x, y, z \mid xy \xrightarrow{\alpha} yx, yz \xrightarrow{\beta} zy, xz \xrightarrow{\gamma} zx \rangle$$



1.4. Exemple : le monoïde commutatif libre de rang 3

$$\mathbb{N}^3 \simeq \langle x, y, z \mid xy \xrightarrow{\alpha} yx, yz \xrightarrow{\beta} zy, xz \xrightarrow{\gamma} zx \rangle$$



1.5. Bases d'homotopie

Constructions libres sur un 1-polygraphe X :

- *Catégorie monoïdale stricte libre X^**

$$X^* = (X_0^* \xleftarrow{\quad} X_1^*) \quad X_1^* : \text{chemins } \underline{\text{orientés}} \text{ de } G(X) \text{ mod. sphères inessentielles}$$

- *Groupeïde monoïdal strict libre X^\top*

$$X^\top = (X_0^* \xleftarrow{\quad} X_1^\top) \quad X_1^\top : \text{chemins } \underline{\text{non orientés}} \text{ de } G(X) \text{ mod. sphères inessentielles}$$

1.5. Bases d'homotopie

Constructions libres sur un 1-polygraphe X :

- *Catégorie monoïdale stricte libre X^**

$$X^* = (X_0^* \Leftarrow X_1^*) \quad X_1^* : \text{chemins } \underline{\text{orientés}} \text{ de } G(X) \text{ mod. sphères inessentielles}$$

- *Groupeïde monoïdal strict libre X^\top*

$$X^\top = (X_0^* \Leftarrow X_1^\top) \quad X_1^\top : \text{chemins } \underline{\text{non orientés}} \text{ de } G(X) \text{ mod. sphères inessentielles}$$

Base d'homotopie de X^\top : ensemble X_2 de pavés (*2-cellules gén.*) entre chemins parallèles de X^\top

$$X_0^* \Leftarrow X_1^\top \Leftarrow X_2$$

tq : toute sphère $u \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} u'$ de X^\top peut être pavée par des $v \begin{array}{c} \xrightarrow{vhw} \\ \xleftarrow{vkw} \end{array} v \begin{array}{c} \xrightarrow{vAw} \\ \xleftarrow{vx'w} \end{array} w$ avec $\left\{ \begin{array}{l} x \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \xleftarrow{k} \end{array} x' \in X_2 \\ v, w \in X_0^* \end{array} \right.$

càd : toute sphère $u \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} u'$ de X^\top / \equiv_{X_2} est triviale ($f = g$)

1.6. Le théorème de Squier

Théorème [Squier 94] : Si X est convergent, alors X_2 est une base d'homotopie de X^\top , avec

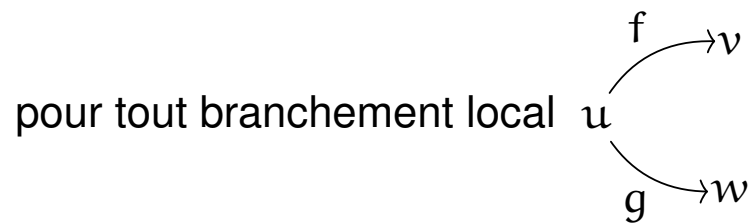
$$X_2 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{c} u \xrightarrow{f} v \xrightarrow{h} u' \\ \begin{array}{c} \omega_{f,g} \end{array} \\ \begin{array}{c} g \xrightarrow{w} k \end{array} \end{array} \end{array} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} (f, g) \text{ branchement critique de } X \\ h \text{ et } k \text{ arbitraires dans } X^* \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

1.6. Le théorème de Squier

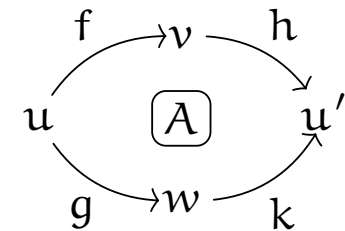
Théorème [Squier 94] : Si X est convergent, alors X_2 est une base d'homotopie de X^\top , avec

$$X_2 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & f & \rightarrow v & \xrightarrow{h} & \\ u & \curvearrowright & & & u' \\ & g & \rightarrow w & \xrightarrow{k} & \end{array} \\ \left(\omega_{f,g} \right) \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} (f, g) \text{ branchement critique de } X \\ h \text{ et } k \text{ arbitraires dans } X^* \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

Étape 1. Théorème des paires critiques – version homotopique :



il existe une 2-cellule composée

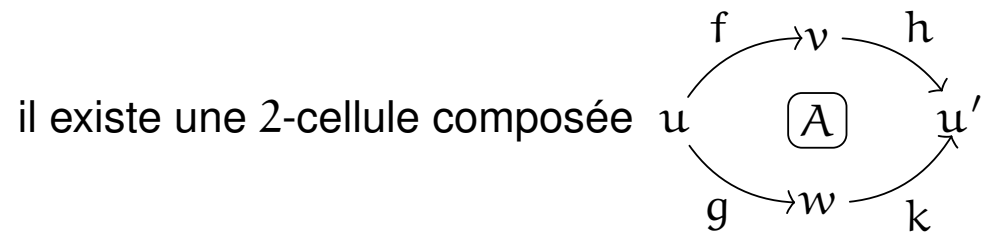
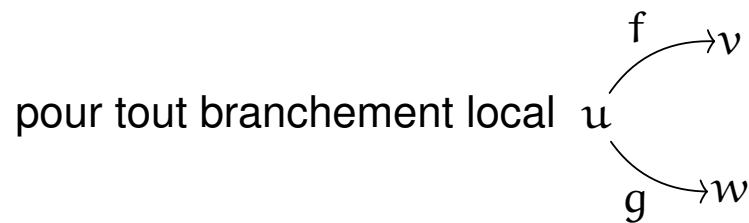


1.6. Le théorème de Squier

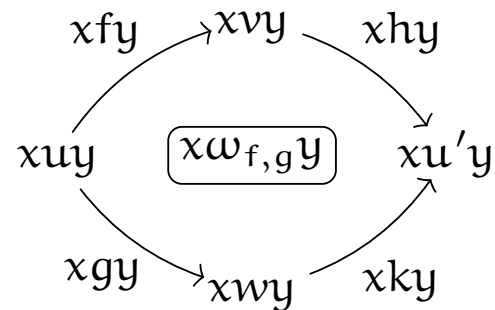
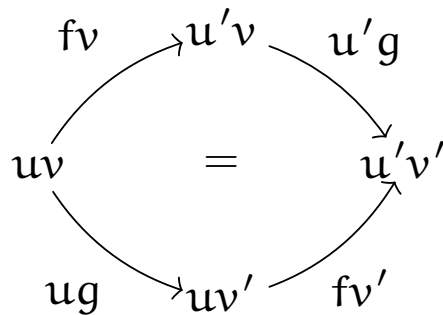
Théorème [Squier 94] : Si X est convergent, alors X_2 est une base d'homotopie de X^\top , avec

$$X_2 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & f & \rightarrow v & \xrightarrow{h} & \\ u & \searrow & & \nearrow & u' \\ & g & \rightarrow w & \xrightarrow{k} & \end{array} \\ \omega_{f,g} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} (f, g) \text{ branchement critique de } X \\ h \text{ et } k \text{ arbitraires dans } X^* \end{array} \right\}$$

Étape 1. Théorème des paires critiques – version homotopique :



Deux cas :

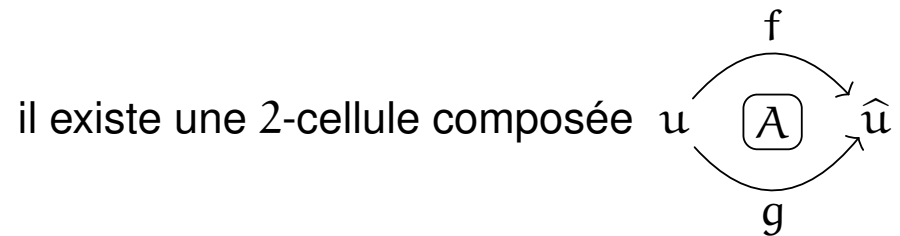
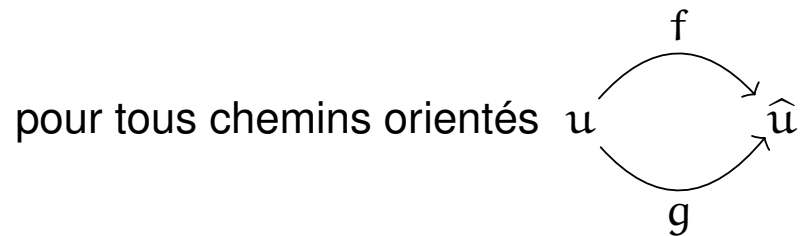


1.6. Le théorème de Squier

Théorème [Squier 94] : Si X est convergent, alors X_2 est une base d'homotopie de X^\top , avec

$$X_2 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & f & \\ u & \curvearrowright & v \\ & h & \\ & & u' \\ & g & \\ & w & \\ & & k \end{array} \\ \omega_{f,g} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} (f, g) \text{ branchement critique de } X \\ h \text{ et } k \text{ arbitraires dans } X^* \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

Étape 2. Lemme de Newman – version homotopique (cas particulier) :



1.6. Le théorème de Squier

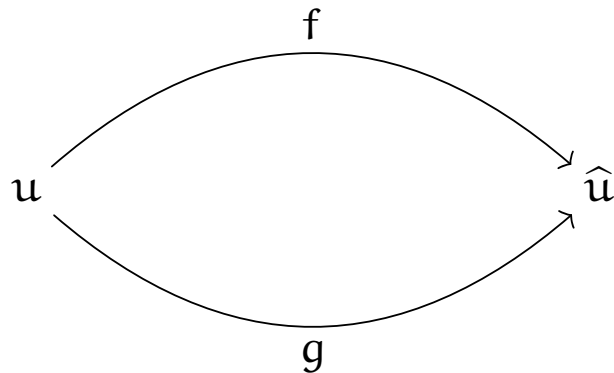
Théorème [Squier 94] : Si X est convergent, alors X_2 est une base d'homotopie de X^\top , avec

$$X_2 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{c} u \xrightarrow{f} v \xrightarrow{h} u' \\ \quad \quad \quad \omega_{f,g} \\ u \xrightarrow{g} w \xrightarrow{k} u' \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} (f, g) \text{ branchement critique de } X \\ h \text{ et } k \text{ arbitraires dans } X^* \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

Étape 2. Lemme de Newman – version homotopique (cas particulier) :

pour tous chemins orientés $u \xrightarrow{f} \hat{u}$ $u \xrightarrow{g} \hat{u}$ il existe une 2-cellule composée $u \xrightarrow{f} \hat{u}$ $u \xrightarrow{g} \hat{u}$

Récurrance noëtherienne :



1.6. Le théorème de Squier

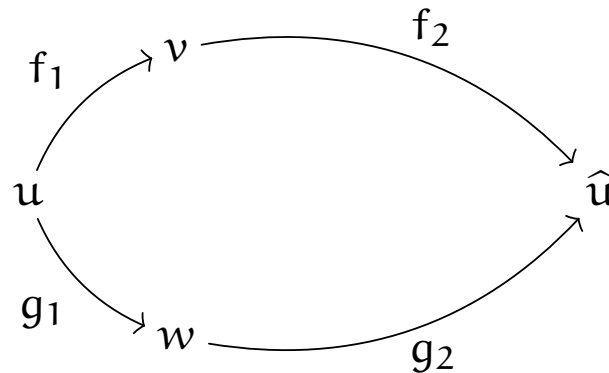
Théorème [Squier 94] : Si X est convergent, alors X_2 est une base d'homotopie de X^\top , avec

$$X_2 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & f & \\ u & \xrightarrow{\quad} & v \\ & \searrow & \nearrow \\ & g & \\ & \xrightarrow{\quad} & w \\ & \nearrow & \searrow \\ & k & \\ & \xrightarrow{\quad} & u' \end{array} & \left| \begin{array}{l} (f, g) \text{ branchement critique de } X \\ h \text{ et } k \text{ arbitraires dans } X^* \end{array} \right. & \begin{array}{ccc} & h & \\ & \xrightarrow{\quad} & u' \\ & \nearrow & \\ & k & \end{array} \end{array} \right\}$$

Étape 2. Lemme de Newman – version homotopique (cas particulier) :

pour tous chemins orientés $u \xrightarrow{f} \hat{u} \xleftarrow{g} u$ il existe une 2-cellule composée $u \xrightarrow{f} \hat{u} \xleftarrow{g} u$

Récurrance noëtherienne :

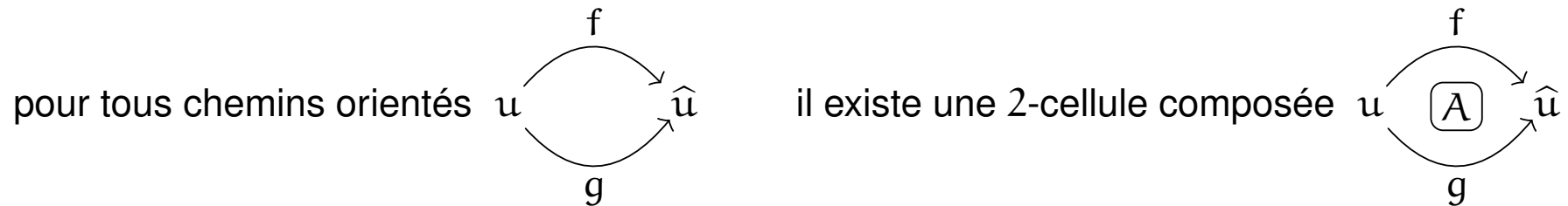


1.6. Le théorème de Squier

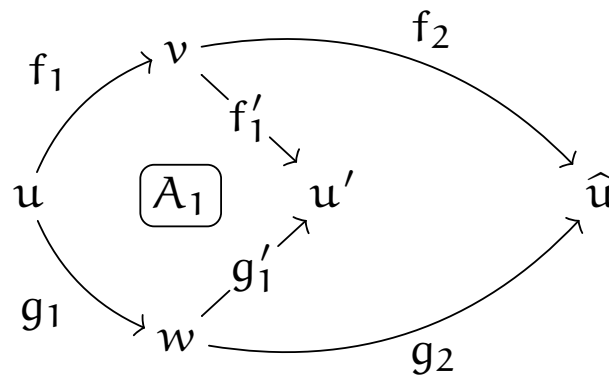
Théorème [Squier 94] : Si X est convergent, alors X_2 est une base d'homotopie de X^\top , avec

$$X_2 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & f & \\ u & \xrightarrow{\quad} & v \\ & \searrow & \nearrow \\ & \omega_{f,g} & \\ & \nearrow & \searrow \\ & g & \\ & \xrightarrow{\quad} & w \\ & \nearrow & \searrow \\ & k & \\ & \xrightarrow{\quad} & u' \end{array} & \left| \begin{array}{l} (f, g) \text{ branchement critique de } X \\ h \text{ et } k \text{ arbitraires dans } X^* \end{array} \right. & \end{array} \right\}$$

Étape 2. Lemme de Newman – version homotopique (cas particulier) :



Récurrance noëtherienne :

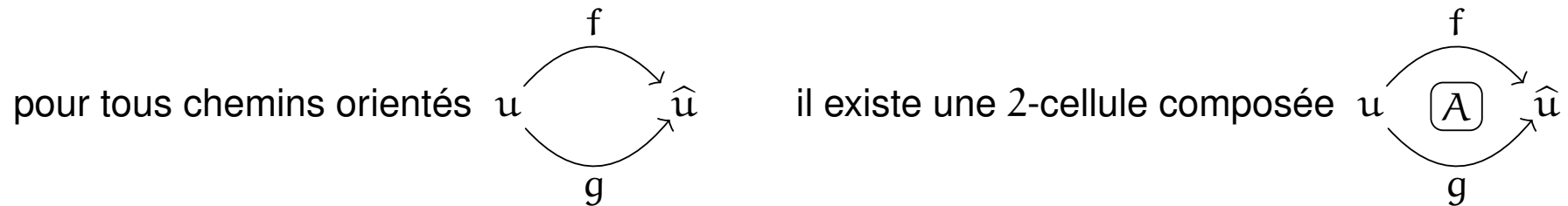


1.6. Le théorème de Squier

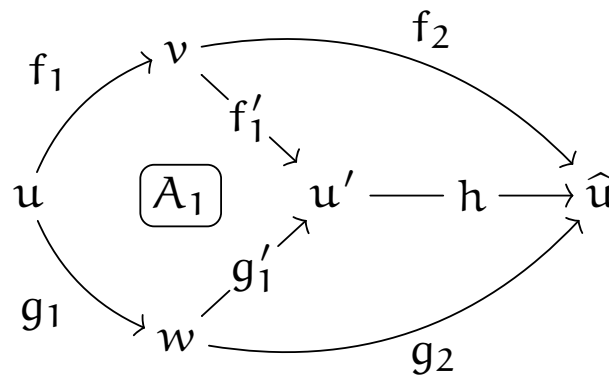
Théorème [Squier 94] : Si X est convergent, alors X_2 est une base d'homotopie de X^\top , avec

$$X_2 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & f & \\ u & \xrightarrow{\quad} & v \\ & \searrow & \nearrow \\ & \omega_{f,g} & \\ & \nearrow & \searrow \\ & g & \\ & \xrightarrow{\quad} & w \\ & \nearrow & \searrow \\ & k & \\ & \xrightarrow{\quad} & u' \end{array} & \left| \begin{array}{l} (f, g) \text{ branchement critique de } X \\ h \text{ et } k \text{ arbitraires dans } X^* \end{array} \right. & \end{array} \right\}$$

Étape 2. Lemme de Newman – version homotopique (cas particulier) :



Récurrance noëtherienne :

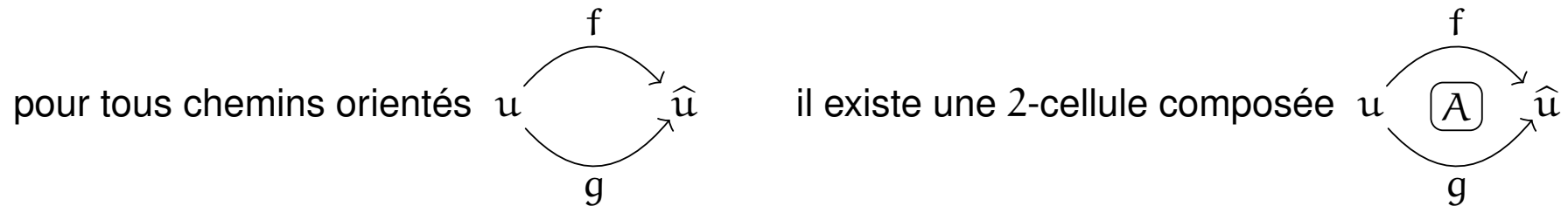


1.6. Le théorème de Squier

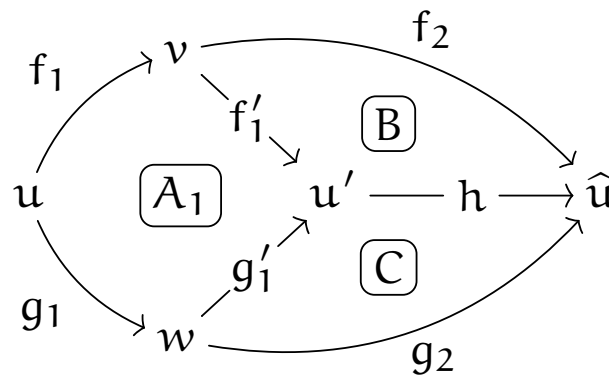
Théorème [Squier 94] : Si X est convergent, alors X_2 est une base d'homotopie de X^\top , avec

$$X_2 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & f & \rightarrow v & \xrightarrow{h} & \\ u & \searrow & & \nearrow & u' \\ & g & \rightarrow w & \xrightarrow{k} & \end{array} \\ \left(\omega_{f,g} \right) \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} (f, g) \text{ branchement critique de } X \\ h \text{ et } k \text{ arbitraires dans } X^* \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

Étape 2. Lemme de Newman – version homotopique (cas particulier) :



Récurrance noëtherienne :

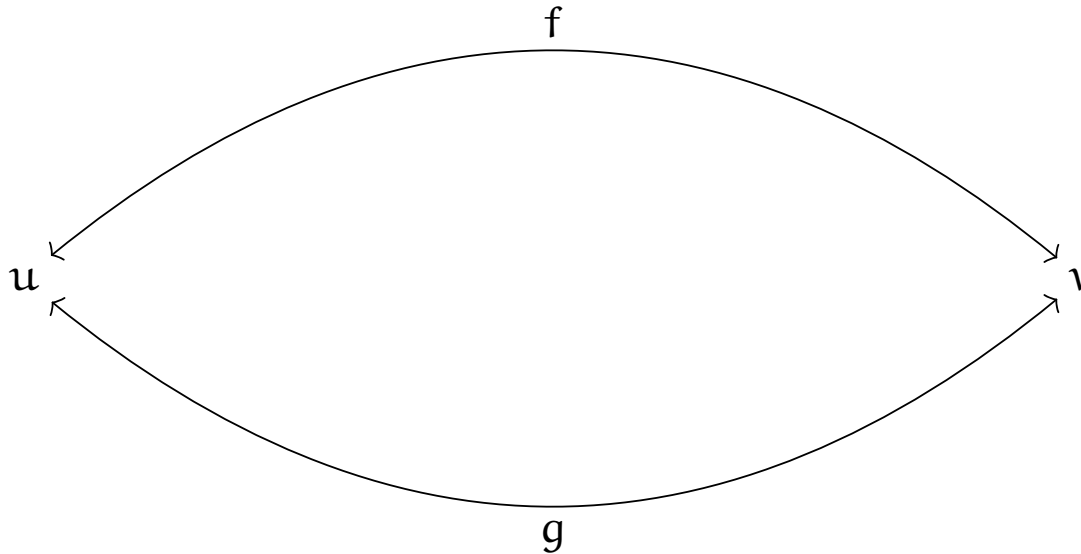


1.6. Le théorème de Squier

Théorème [Squier 94] : Si X est convergent, alors X_2 est une base d'homotopie de X^\top , avec

$$X_2 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & f & \rightarrow & v & & h & & \\ & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \\ u & & & & & & & & u' \\ & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \\ & & g & \rightarrow & w & & k & & \end{array} \\ \omega_{f,g} \end{array} & \left| \begin{array}{l} (f, g) \text{ branchement critique de } X \\ h \text{ et } k \text{ arbitraires dans } X^* \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

Étape 3. Fin de la démonstration :

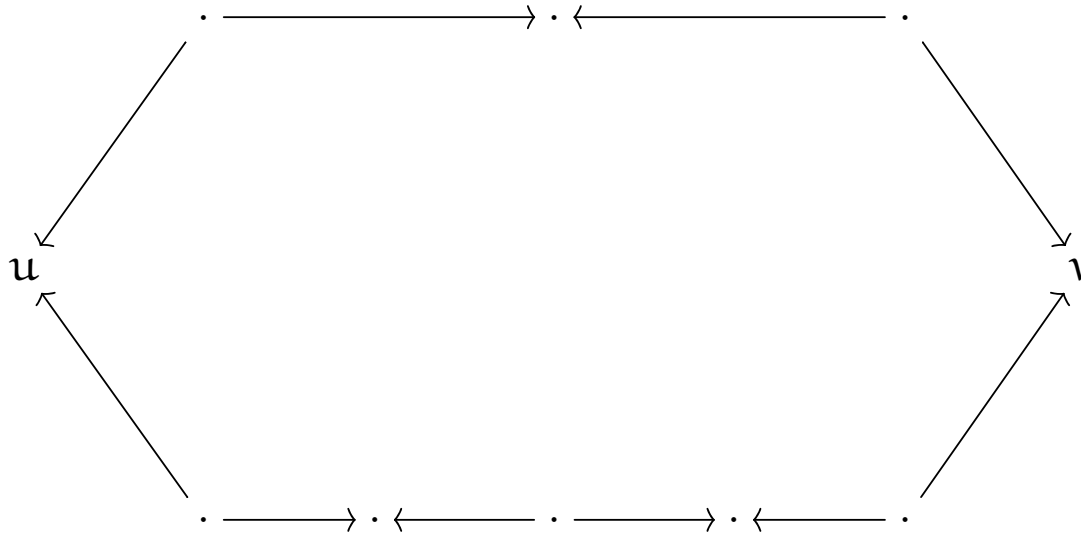


1.6. Le théorème de Squier

Théorème [Squier 94] : Si X est convergent, alors X_2 est une base d'homotopie de X^\top , avec

$$X_2 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & f & \rightarrow v \\ u & \curvearrowright & u' \\ & g & \rightarrow w \\ & & \curvearrowleft & k \\ & & & u' \end{array} & \left| \begin{array}{l} (f, g) \text{ branchement critique de } X \\ h \text{ et } k \text{ arbitraires dans } X^* \end{array} \right. & \end{array} \right\}$$

Étape 3. Fin de la démonstration :

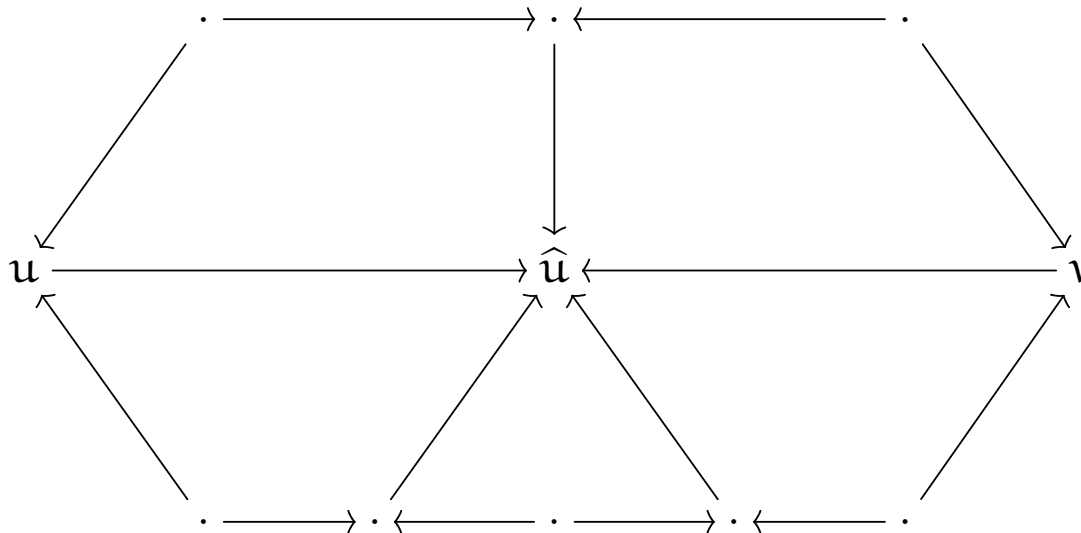


1.6. Le théorème de Squier

Théorème [Squier 94] : Si X est convergent, alors X_2 est une base d'homotopie de X^\top , avec

$$X_2 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & f & \\ u & \xrightarrow{\quad} & v \\ & h & \\ & \omega_{f,g} & \\ & g & \\ & \xrightarrow{\quad} & u' \\ & k & \end{array} & \left| \begin{array}{l} (f, g) \text{ branchement critique de } X \\ h \text{ et } k \text{ arbitraires dans } X^* \end{array} \right. & \end{array} \right\}$$

Étape 3. Fin de la démonstration :

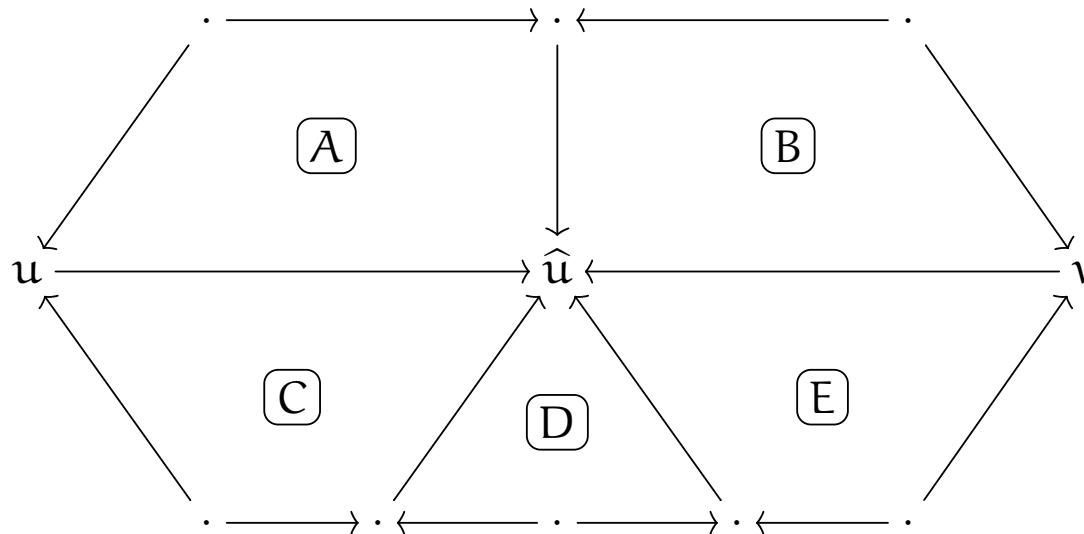


1.6. Le théorème de Squier

Théorème [Squier 94] : Si X est convergent, alors X_2 est une base d'homotopie de X^\top , avec

$$X_2 = \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & f & \rightarrow v \\ u & \searrow & \nearrow \\ & \omega_{f,g} & \\ & g & \rightarrow w \\ & & \nearrow \\ & & u' \end{array} & \left| \begin{array}{l} (f, g) \text{ branchement critique de } X \\ h \text{ et } k \text{ arbitraires dans } X^* \end{array} \right. & \end{array} \right\}$$

Étape 3. Fin de la démonstration :



1.7. Réponse à la question de Jantzen

Définition : X est de type de dérivation fini (TDF) si $\begin{cases} X \text{ est fini} \\ X^\top \text{ admet une base d'homotopie finie} \end{cases}$

Corollaire du théorème de Squier : X convergent fini $\Rightarrow X$ TDF

Proposition [Squier 94] : TDF est un invariant de monoïde

càd : si X et Y sont deux présentations finies du même monoïde, alors X TDF ssi Y TDF

1.7. Réponse à la question de Jantzen

Définition : X est de type de dérivation fini (TDF) si $\begin{cases} X \text{ est fini} \\ X^\top \text{ admet une base d'homotopie finie} \end{cases}$

Corollaire du théorème de Squier : X convergent fini $\Rightarrow X$ TDF

Proposition [Squier 94] : TDF est un invariant de monoïde

càd : si X et Y sont deux présentations finies du même monoïde, alors X TDF ssi Y TDF

Corollaire : M de type fini + problème du mot décidable $\not\Rightarrow M$ PCF

Démonstration : Il suffit d'exhiber M qui a $\begin{cases} \text{un problème du mot décidable} \\ \text{une présentation finie non TDF} \end{cases}$

$M \simeq \langle a, b, t, x, y \mid ab \rightarrow 1, xa \rightarrow atx, xt \rightarrow tx, xb \rightarrow bx, xy \rightarrow 1 \rangle$ [Squier 87, 94]

$M \simeq \langle a, b, c, d, d' \mid ab \rightarrow a, da \rightarrow ac, d'a \rightarrow ac \rangle$ [Lafont-Prouté 91]

1.7. Réponse à la question de Jantzen

Définition : X est de type de dérivation fini (TDF) si $\begin{cases} X \text{ est fini} \\ X^\top \text{ admet une base d'homotopie finie} \end{cases}$

Corollaire du théorème de Squier : X convergent fini $\Rightarrow X$ TDF

Proposition [Squier 94] : TDF est un invariant de monoïde

càd : si X et Y sont deux présentations finies du même monoïde, alors X TDF ssi Y TDF

Corollaire : M de type fini + problème du mot décidable $\not\Rightarrow M$ PCF

Démonstration : Il suffit d'exhiber M qui a $\begin{cases} \text{un problème du mot décidable} \\ \text{une présentation finie non TDF} \end{cases}$

$$M \simeq \langle a, b, t, x, y \mid ab \rightarrow 1, xa \rightarrow atx, xt \rightarrow tx, xb \rightarrow bx, xy \rightarrow 1 \rangle \quad [\text{Squier 87, 94}]$$

$$M \simeq \langle a, b, c, d, d' \mid ab \rightarrow a, da \rightarrow ac, d'a \rightarrow ac \rangle \quad [\text{Lafont-Prouté 91}]$$

Théorème [Squier 87] : Si M admet une présentation convergente finie, alors $H_3(M)$ est de type fini

Théorème [Otto-Katsura-Kobayashi 98] : Si M est de type fini, alors

M a un problème du mot décidable ssi M admet une présentation convergente récursive à gauche

2. Interlude

2.1. Présentations cohérentes et applications

Présentation cohérente d'un monoïde M : *2-polygraphe* $X = \left(X_0 \rightrightarrows X_1^T \rightrightarrows X_2 \right)$ formé d'une présentation de M et d'une base d'homotopie

2.1. Présentations cohérentes et applications

Présentation cohérente d'un monoïde M : 2-polygraphe $X = (X_0 \rightrightarrows X_1^T \rightrightarrows X_2)$ formé d'une présentation de M et d'une base d'homotopie

En algèbre homologique : X_0, X_1, X_2 engendrent $H_1(M), H_2(M), H_3(M)$

En théorie des représentations :

- Classique : pour tout 1-polygraphe X , les assertions suivantes sont équivalentes
 1. X est une présentation de M
 2. pour toute catégorie C ($= \text{Ens}, \text{Vect}, \text{etc.}$), il existe un isomorphisme naturel en C

$$\text{Cat}(M, C) \simeq \text{Cat}(X_0^*/X_1, C)$$

2.1. Présentations cohérentes et applications

Présentation cohérente d'un monoïde M : 2-polygraphe $X = (X_0^* \leftarrow X_1^T \leftarrow X_2)$ formé d'une présentation de M et d'une base d'homotopie

En algèbre homologique : X_0, X_1, X_2 engendrent $H_1(M), H_2(M), H_3(M)$

En théorie des représentations :

- Classique : pour tout 1-polygraphe X , les assertions suivantes sont équivalentes
 1. X est une présentation de M
 2. pour toute catégorie C ($= \text{Ens}, \text{Vect}, \text{etc.}$), il existe un isomorphisme naturel en C

$$\text{Cat}(M, C) \simeq \text{Cat}(X_0^*/X_1, C)$$

- Catégorifiée (Gaussent-G.-Malbos 2015) : pour tout 2-polygraphe X , les ASSE
 1. X est une présentation cohérente de M
 2. pour toute 2-catégorie C ($= \text{Cat}, 2\text{Vect}, \text{etc.}$), il existe une équivalence naturelle en C

$$2\text{Cat}_{\text{ps}}(M, C) \approx 2\text{Cat}(X_1^T/X_2, C)$$

2.1. Présentations cohérentes et applications

Présentation cohérente d'un monoïde M : 2-polygraphe $X = \left(X_0^* \leftarrow X_1^T \leftarrow X_2 \right)$ formé d'une présentation de M et d'une base d'homotopie

En algèbre homologique : X_0, X_1, X_2 engendrent $H_1(M), H_2(M), H_3(M)$

En théorie des représentations :

- Classique : pour tout 1-polygraphe X , les assertions suivantes sont équivalentes
 1. X est une présentation de M
 2. pour toute catégorie C ($= \text{Ens}, \text{Vect}, \text{etc.}$), il existe un isomorphisme naturel en C

$$\text{Cat}(M, C) \simeq \text{Cat}(X_0^*/X_1, C)$$

- Catégorifiée (Gaussent-G.-Malbos 2015) : pour tout 2-polygraphe X , les ASSE
 1. X est une présentation cohérente de M
 2. pour toute 2-catégorie C ($= \text{Cat}, 2\text{Vect}, \text{etc.}$), il existe une équivalence naturelle en C

$$2\text{Cat}_{\text{ps}}(M, C) \approx 2\text{Cat}(X_1^T/X_2, C)$$

En théorie des catégories : cohérence de la structure de catégorie monoïdale (pentagone de Mac Lane + triangle) = base d'homotopie de la théorie des monoïdes

3. Présentations cohérentes des monoïdes d'Artin

3.1. Monoïdes d'Artin (ou Artin-Tits)

Groupe de Coxeter : groupe W admettant une présentation

$$W \simeq \langle S \text{ fini} \mid \begin{cases} s^2 = 1 \text{ pour tout } s \in S \\ \text{au plus une relation } tst \cdots \rightarrow sts \cdots \text{ pour tous } s \neq t \in S \end{cases} \rangle$$

Monoïde d'Artin associé à W : $B^+(W) \simeq \langle S \mid tst \cdots \rightarrow sts \cdots \rangle$

3.1. Monoïdes d'Artin (ou Artin-Tits)

Groupe de Coxeter : groupe W admettant une présentation

$$W \simeq \langle S \text{ fini} \mid \begin{cases} s^2 = 1 \text{ pour tout } s \in S \\ \text{au plus une relation } tst \cdots \rightarrow sts \cdots \text{ pour tous } s \neq t \in S \end{cases} \rangle$$

Monoïde d'Artin associé à W : $B^+(W) \simeq \langle S \mid tst \cdots \rightarrow sts \cdots \rangle$

Exemples :

- Monoïdes libres et commutatifs libres de type fini :

$$\mathbb{N}^{*n} \simeq \langle s_1, \dots, s_n \mid \emptyset \rangle \quad \mathbb{N}^n \simeq \langle s_1, \dots, s_n \mid s_j s_i \rightarrow s_i s_j, 1 \leq i < j \leq n \rangle$$

- Monoïdes de tresses positives :

$$B_3^+ = B^+(S_3) \simeq \langle s, t \mid tst \rightarrow sts \rangle \quad B_4^+ = B^+(S_4) \simeq \langle r, s, t \mid srs \rightarrow rsr, tst \rightarrow sts, tr \rightarrow rt \rangle$$

3.1. Monoïdes d'Artin (ou Artin-Tits)

Groupe de Coxeter : groupe W admettant une présentation

$$W \simeq \langle S \text{ fini} \mid \begin{cases} s^2 = 1 \text{ pour tout } s \in S \\ \text{au plus une relation } tst \cdots \rightarrow sts \cdots \text{ pour tous } s \neq t \in S \end{cases} \rangle$$

Monoïde d'Artin associé à W : $B^+(W) \simeq \langle S \mid tst \cdots \rightarrow sts \cdots \rangle$

Exemples :

- Monoïdes libres et commutatifs libres de type fini :

$$\mathbb{N}^{*n} \simeq \langle s_1, \dots, s_n \mid \emptyset \rangle \quad \mathbb{N}^n \simeq \langle s_1, \dots, s_n \mid s_j s_i \rightarrow s_i s_j, 1 \leq i < j \leq n \rangle$$

- Monoïdes de tresses positives :

$$B_3^+ = B^+(S_3) \simeq \langle s, t \mid tst \rightarrow sts \rangle \quad B_4^+ = B^+(S_4) \simeq \langle r, s, t \mid srs \rightarrow rsr, tst \rightarrow sts, tr \rightarrow rt \rangle$$

Problème : Calculer une présentation cohérente minimale de $B^+(W)$

- En géométrie [Tits] : propriétés homotopiques d'arrangements d'hyperplans
- En théorie des représentations [Deligne] : représentations des monoïdes d'Artin dans Cat

3.2. Le théorème de Tits

Définition : W groupe de Coxeter de générateurs S et $I \subseteq S$

W_I : sous-groupe (de Coxeter) de W engendré par I

$\rightsquigarrow B^+(W_I) =$ sous-monoïde (d'Artin) de $B^+(W)$ engendré par I

3.2. Le théorème de Tits

Définition : W groupe de Coxeter de générateurs S et $I \subseteq S$

W_I : sous-groupe (de Coxeter) de W engendré par I

$\rightsquigarrow B^+(W_I) =$ sous-monoïde (d'Artin) de $B^+(W)$ engendré par I

Théorème [Tits 81] : Pour tout groupe de Coxeter W ,

$$T(W) = \coprod_I \{ \text{sphères « de } B^+(W_I) \text{ »} \}$$

est une base d'homotopie de $B^+(W)$, avec $I \subseteq S$ de rang 3 tq W_I est fini (= *de type sphérique*) :

3.2. Le théorème de Tits

Définition : W groupe de Coxeter de générateurs S et $I \subseteq S$

W_I : sous-groupe (de Coxeter) de W engendré par I

$\rightsquigarrow B^+(W_I) =$ sous-monoïde (d'Artin) de $B^+(W)$ engendré par I

Théorème [Tits 81] : Pour tout groupe de Coxeter W ,

$$T(W) = \coprod_I \{ \text{sphères « de } B^+(W_I) \text{ »} \}$$

est une base d'homotopie de $B^+(W_I)$, avec $I \subseteq S$ de rang 3 tq W_I est fini (= *de type sphérique*) :

Type $A_1^3 (= \mathbb{N}^3)$

$sr \rightarrow rs, ts \rightarrow st, tr \rightarrow rt$

Type $I_2(p) \times A_1 (= B^+(D_{2p}) \times \mathbb{N})$

$srs \cdots \rightarrow rsr \cdots, ts \rightarrow st, tr \rightarrow rt$

Type $A_3 (= B_4^+)$

$srs \rightarrow rsr, tst \rightarrow sts, tr \rightarrow rt$

Type B_3

$srsr \rightarrow rsrs, tst \rightarrow sts, tr \rightarrow rt$

Type H_3

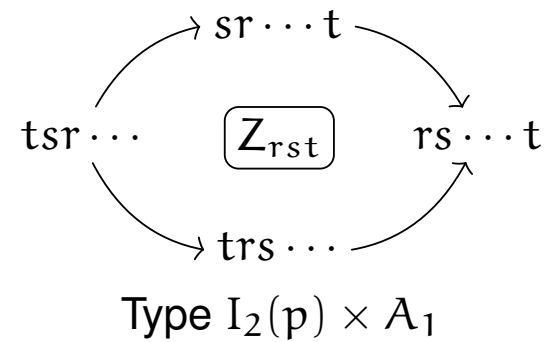
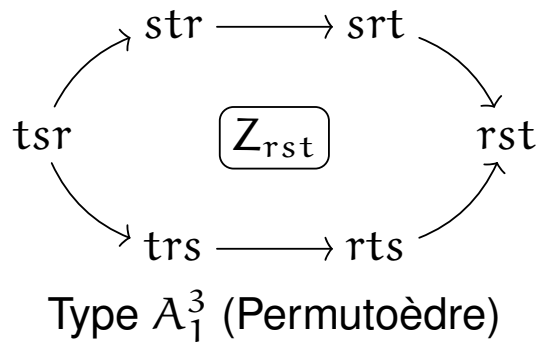
$srsrs \rightarrow rsrsr, tst \rightarrow sts, tr \rightarrow rt$

3.3. Bases d'homotopie des types sphériques de rang 3

Lemme : Les présentations des types A_1^3 et $I_2(p) \times A_1$ sont convergentes

$$sr \rightarrow rs, \quad ts \rightarrow st, \quad tr \rightarrow rt \qquad srs \cdots \rightarrow rsr \cdots, \quad ts \rightarrow st, \quad tr \rightarrow rt$$

Corollaire : Base d'homotopie réduite à une 2-cellule :

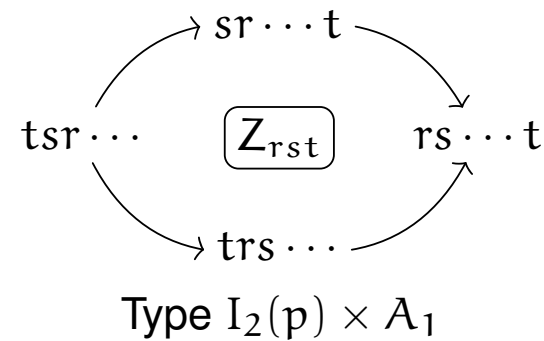
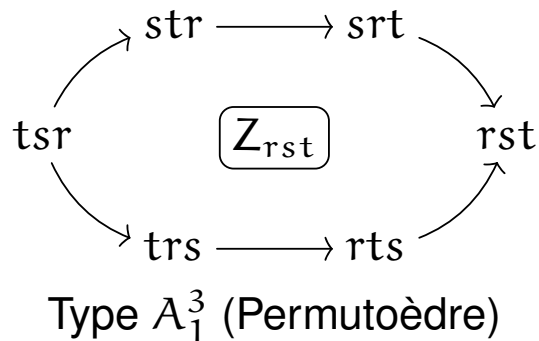


3.3. Bases d'homotopie des types sphériques de rang 3

Lemme : Les présentations des types A_1^3 et $I_2(p) \times A_1$ sont convergentes

$$sr \rightarrow rs, \quad ts \rightarrow st, \quad tr \rightarrow rt \qquad srs \cdots \rightarrow rsr \cdots, \quad ts \rightarrow st, \quad tr \rightarrow rt$$

Corollaire : Base d'homotopie réduite à une 2-cellule :

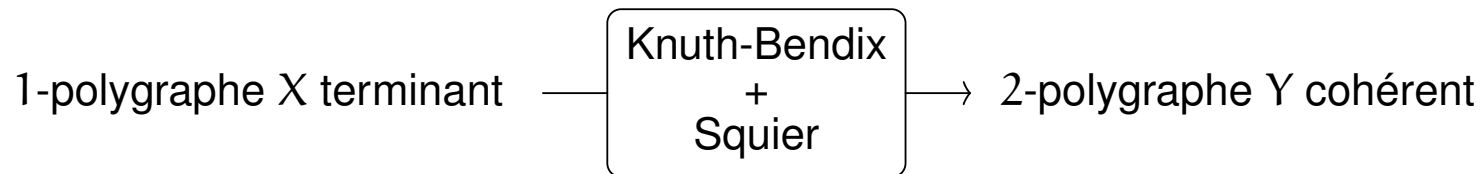


Problème : Les présentations des trois autres types sont non confluentes (+ complétion très irrégulière)

Méthode utilisée :

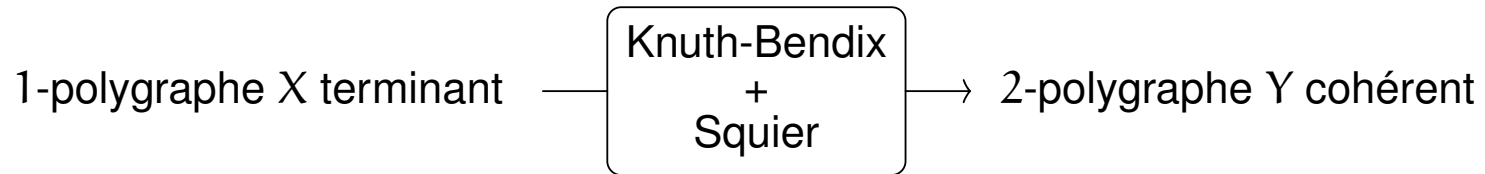
- Complétion : \oplus générateurs et relations \rightsquigarrow Présentation convergente \rightsquigarrow Base d'homotopie
- Réduction : \ominus générateurs, relations, 2-cellules *redondantes*

3.4. Complétion



Exemple : Présentation de Kapur-Narendran $X = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$ de B_3^+

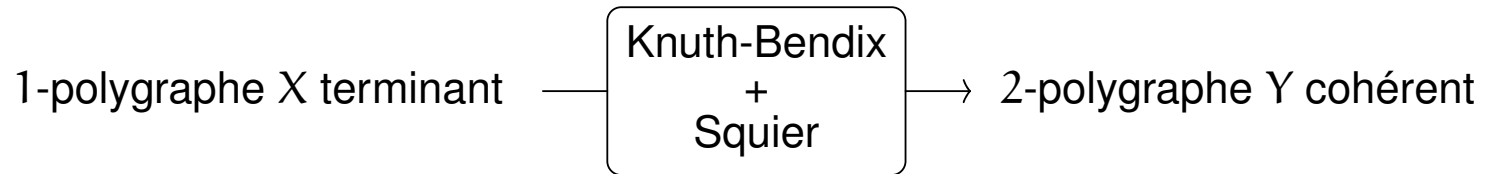
3.4. Complétion



Exemple : Présentation de Kapur-Narendran $X = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$ de B_3^+

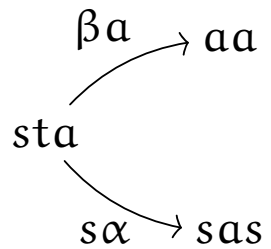
$$Y = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \quad \mid$$

3.4. Complétion

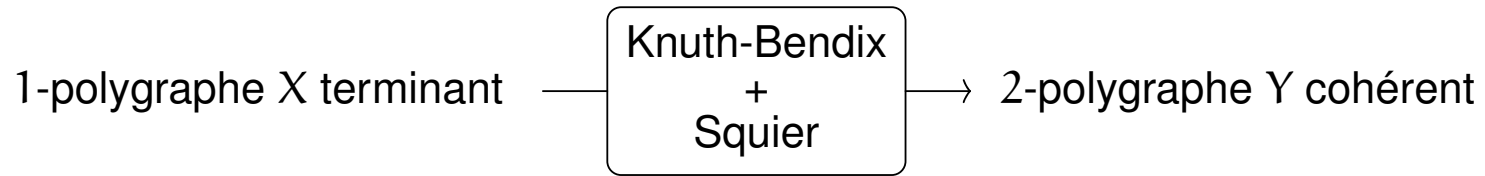


Exemple : Présentation de Kapur-Narendran $X = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$ de B_3^+

$$Y = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \quad \mid$$

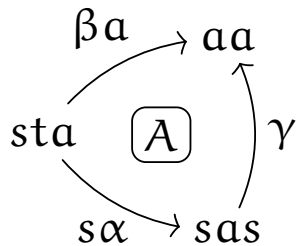


3.4. Complétion

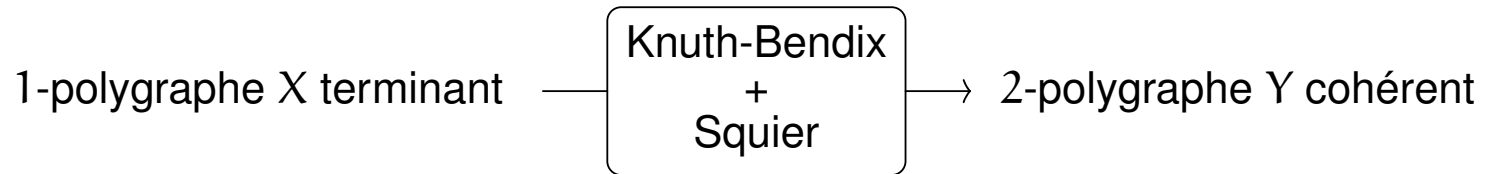


Exemple : Présentation de Kapur-Narendran $X = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$ de B_3^+

$$Y = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa \mid A \rangle$$

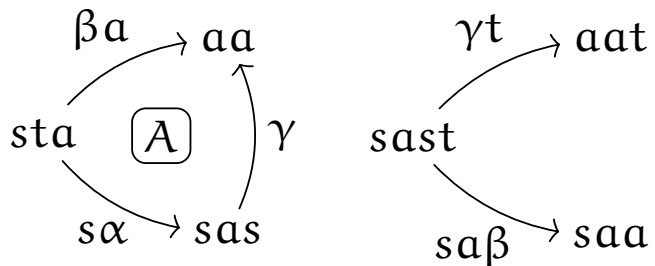


3.4. Complétion

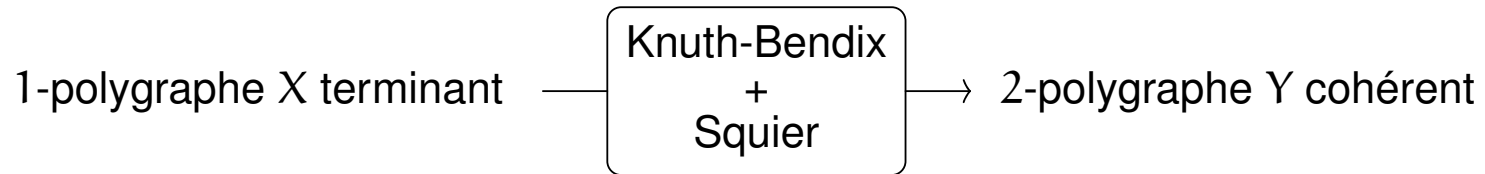


Exemple : Présentation de Kapur-Narendran $X = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$ de B_3^+

$$Y = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa \mid A \rangle$$

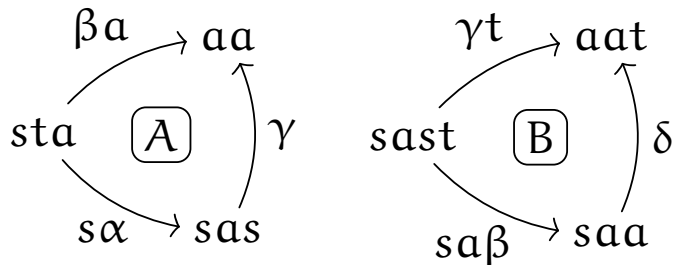


3.4. Complétion

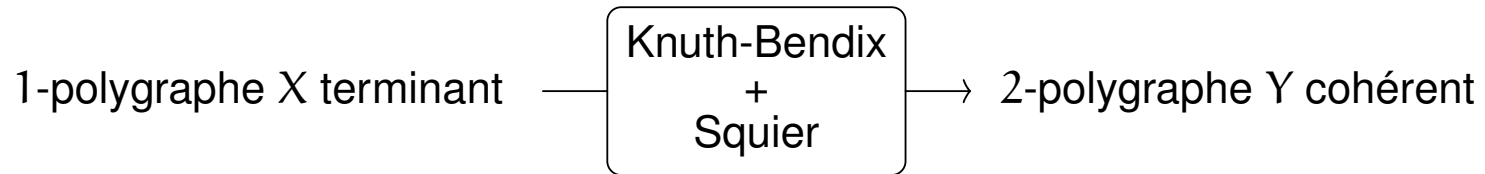


Exemple : Présentation de Kapur-Narendran $X = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$ de B_3^+

$$Y = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B \rangle$$

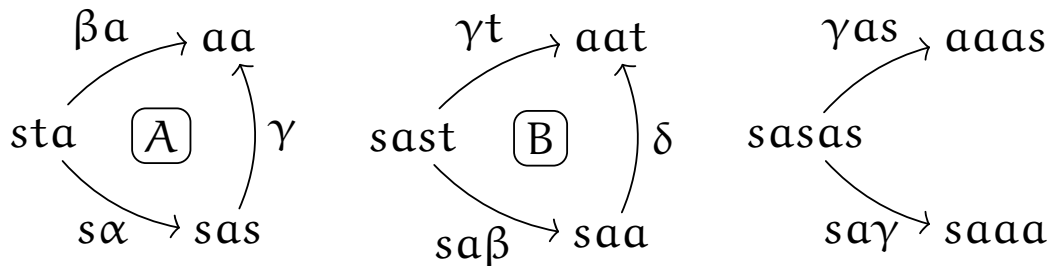


3.4. Complétion

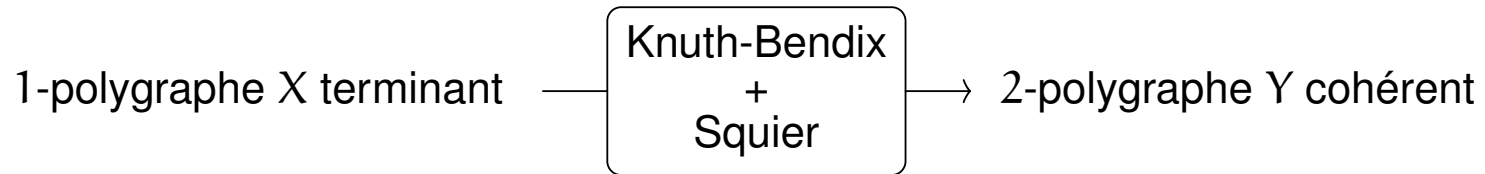


Exemple : Présentation de Kapur-Narendran $X = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$ de B_3^+

$$Y = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B$$

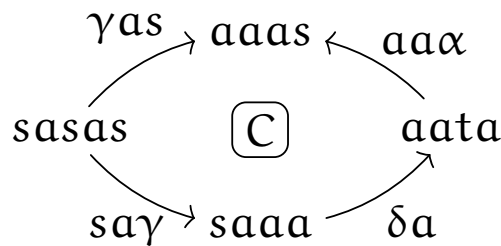
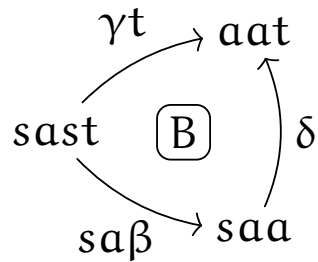
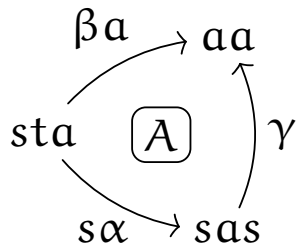


3.4. Complétion

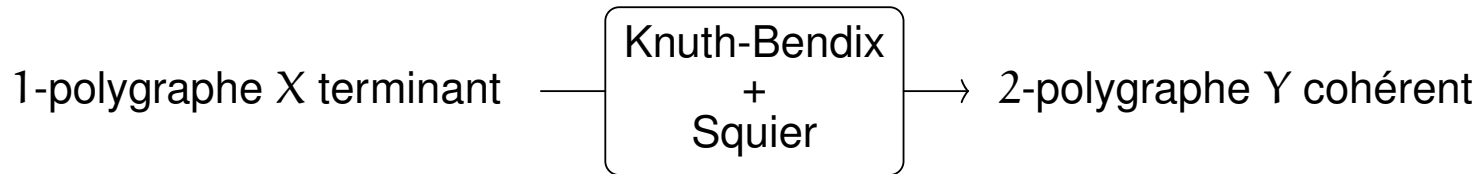


Exemple : Présentation de Kapur-Narendran $X = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$ de B_3^+

$$Y = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, C \rangle$$

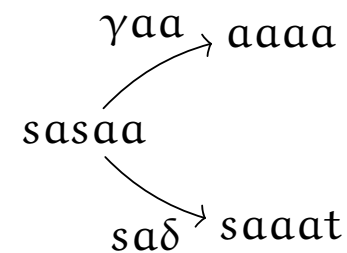
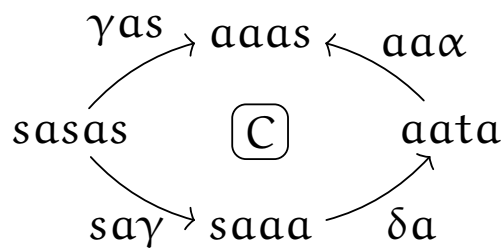
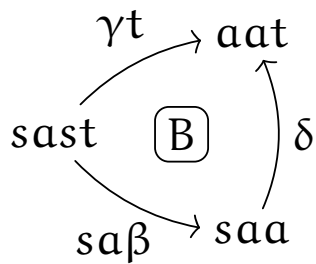
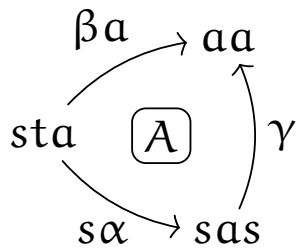


3.4. Complétion

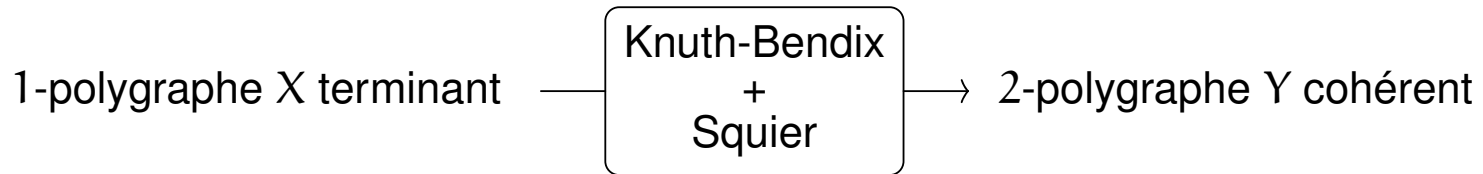


Exemple : Présentation de Kapur-Narendran $X = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$ de B_3^+

$$Y = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, C \rangle$$

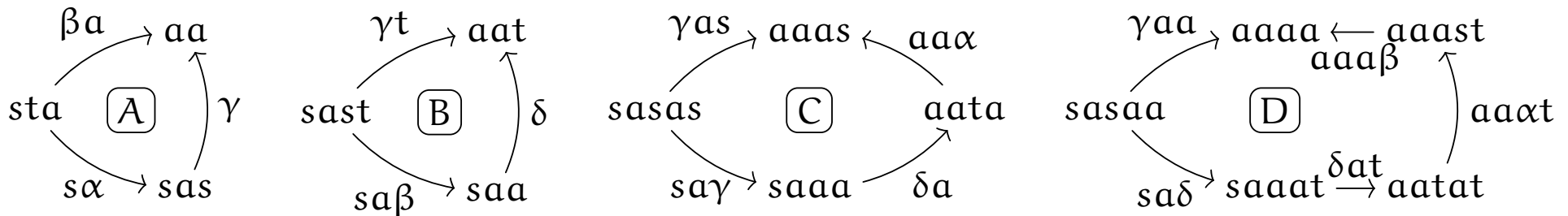


3.4. Complétion

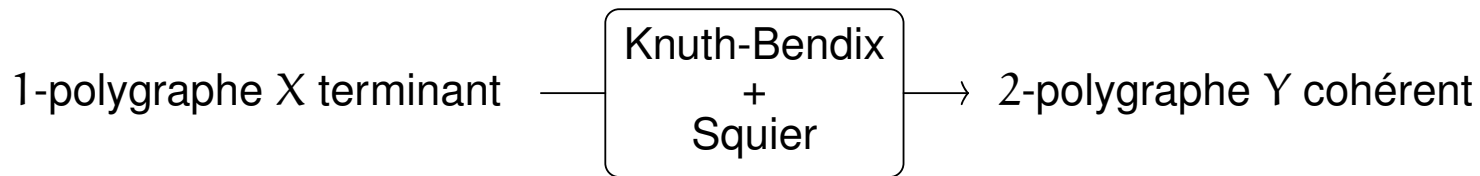


Exemple : Présentation de Kapur-Narendran $X = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$ de B_3^+

$Y = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, C, D$

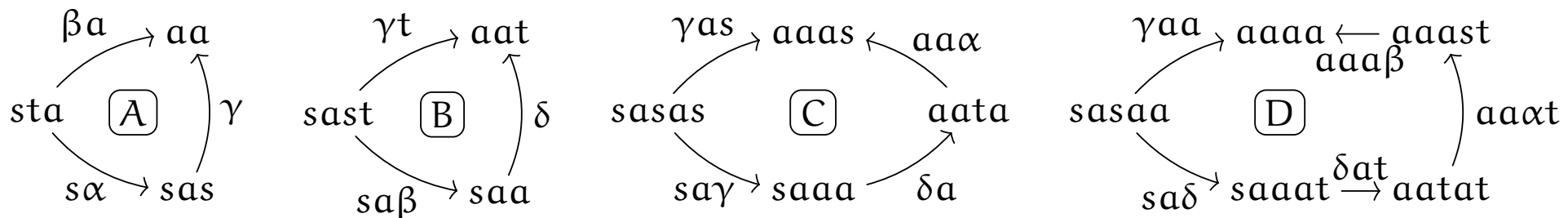


3.4. Complétion



Exemple : Présentation de Kapur-Narendran $X = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a \rangle$ de B_3^+

$$Y = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, C, D \rangle$$



3.5. Réduction : théorie

Définition : soit X un 2-polygraphe

Une *transformation de Tietze* de X est une composée de :

- adjonction/élimination d'un générateur et d'une relation le définissant

Ex. : a et $st \rightarrow a$

- adjonction/élimination d'une relation et d'une 2-cellule la définissant

Ex. : 1-cellule et 2-cellule ajoutées ensemble durant la complétion

- adjonction/élimination d'une 2-cellule redondante

Ex. : 2-cellule dont le bord peut être pavé avec les autres 2-cellules

3.5. Réduction : théorie

Définition : soit X un 2-polygraphe

Une *transformation de Tietze* de X est une composée de :

- adjonction/élimination d'un générateur et d'une relation le définissant

Ex. : a et $st \rightarrow a$

- adjonction/élimination d'une relation et d'une 2-cellule la définissant

Ex. : 1-cellule et 2-cellule ajoutées ensemble durant la complétion

- adjonction/élimination d'une 2-cellule redondante

Ex. : 2-cellule dont le bord peut être pavé avec les autres 2-cellules

Proposition [Gaussent-G.-Malbos 15] : pour T transformation de Tietze de X ,

X présentation cohérente de $M \Rightarrow T(X)$ présentation cohérente de M

3.6. Réduction : exemple (1/2)

Réduction en dimension 2 :

Triples branchements critiques \rightsquigarrow Relations entre les 2-cellules

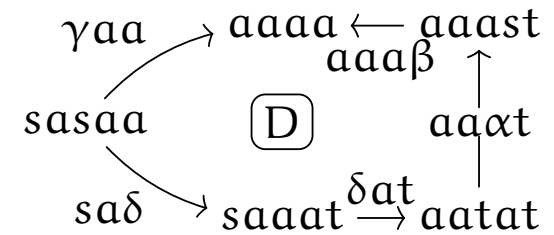
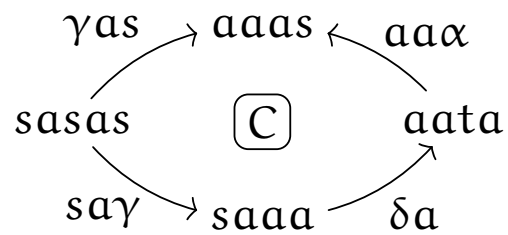
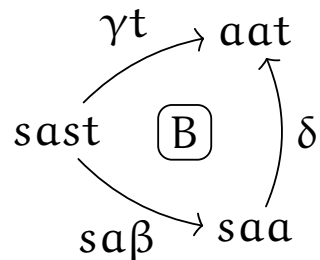
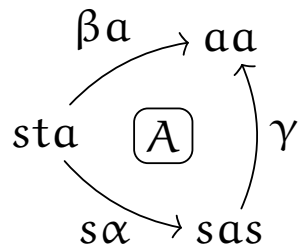
3.6. Réduction : exemple (1/2)

Réduction en dimension 2 :

Triples branchements critiques \rightsquigarrow Relations entre les 2-cellules

Exemple :

$$Y = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, C, D \rangle$$



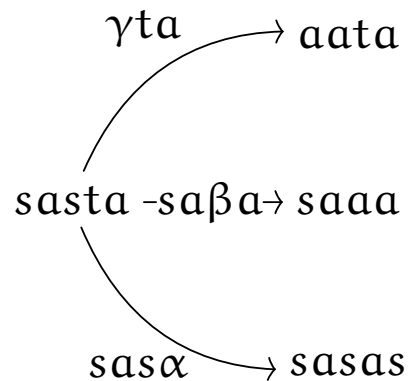
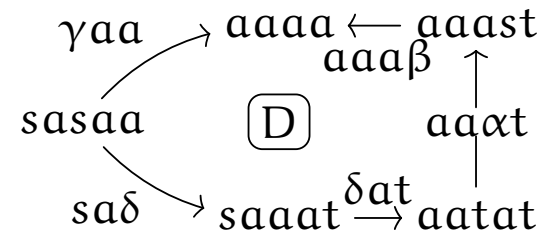
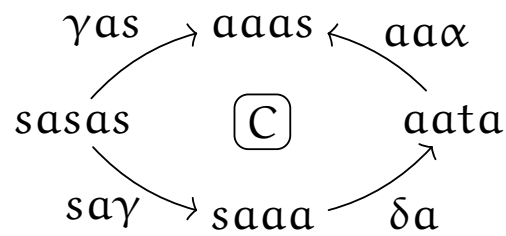
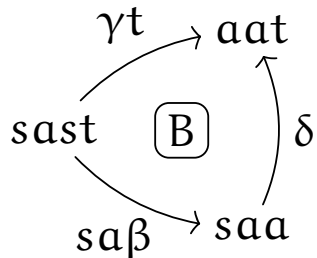
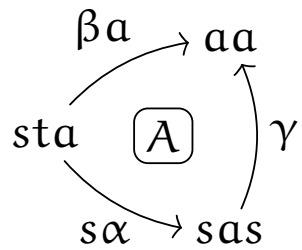
3.6. Réduction : exemple (1/2)

Réduction en dimension 2 :

Triples branchements critiques \rightsquigarrow Relations entre les 2-cellules

Exemple :

$$Y = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, C, D \rangle$$



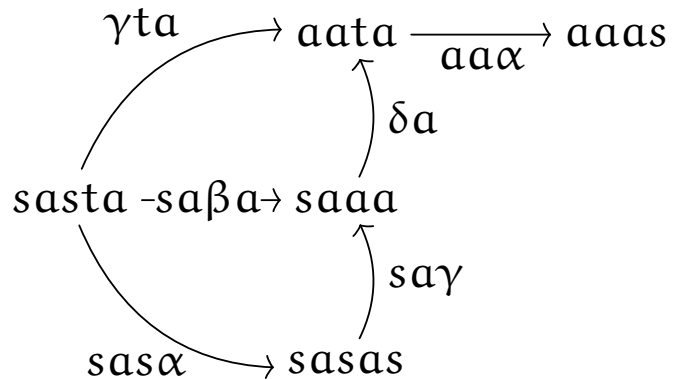
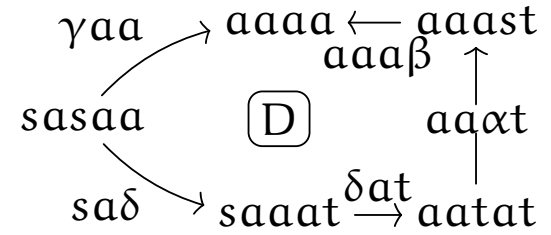
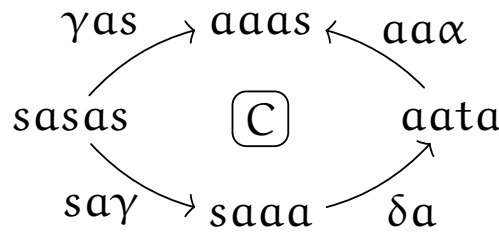
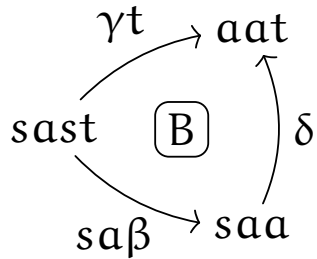
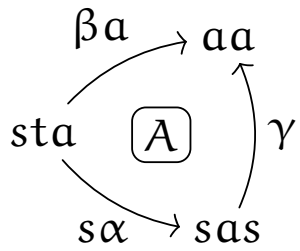
3.6. Réduction : exemple (1/2)

Réduction en dimension 2 :

Triples branchements critiques \rightsquigarrow Relations entre les 2-cellules

Exemple :

$$Y = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, C, D \rangle$$



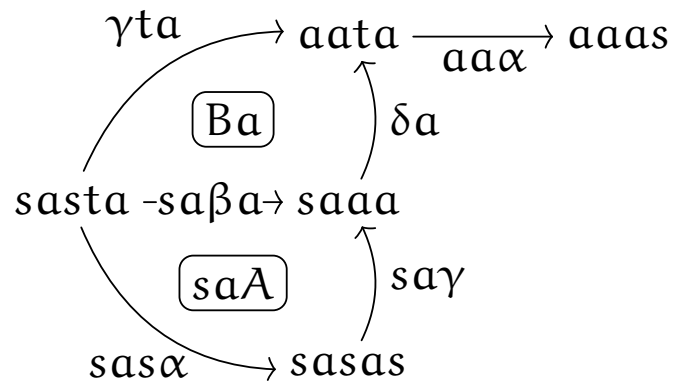
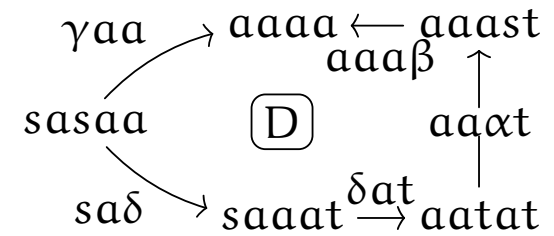
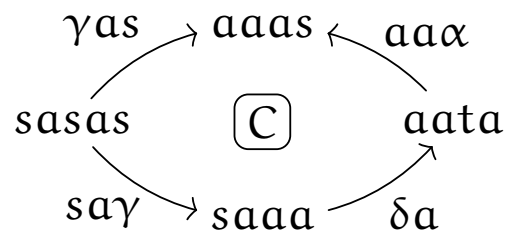
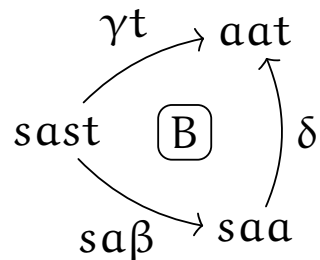
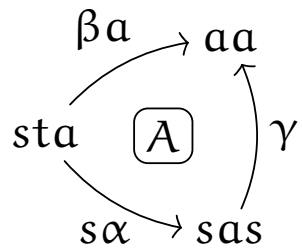
3.6. Réduction : exemple (1/2)

Réduction en dimension 2 :

Triples branchements critiques \rightsquigarrow Relations entre les 2-cellules

Exemple :

$$Y = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, C, D \rangle$$



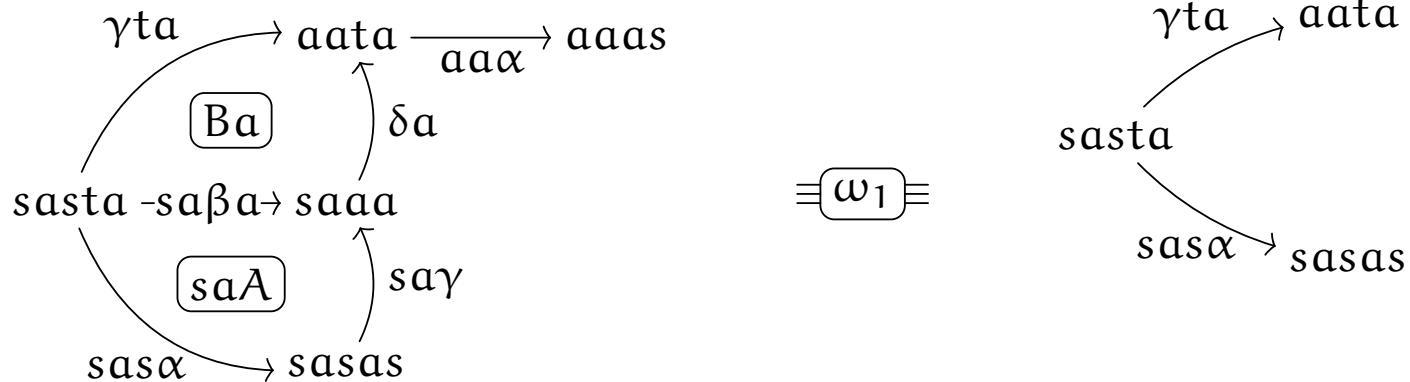
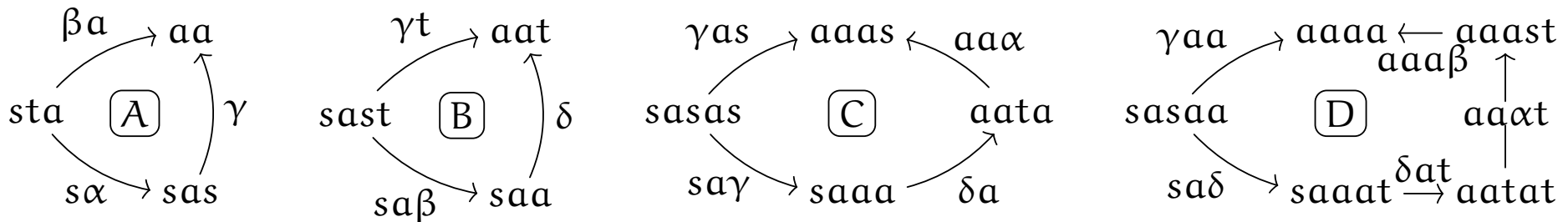
3.6. Réduction : exemple (1/2)

Réduction en dimension 2 :

Triples branchements critiques \rightsquigarrow Relations entre les 2-cellules

Exemple :

$$Y = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, C, D \rangle$$



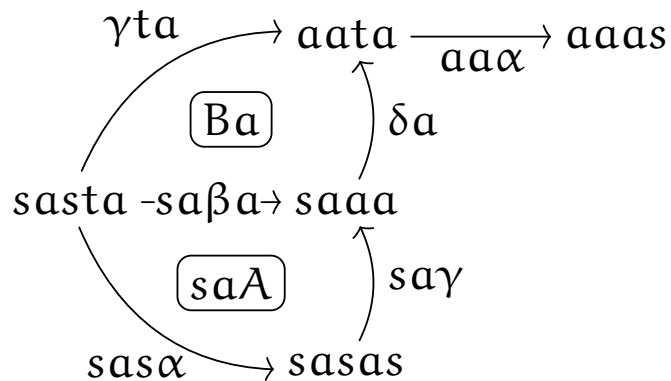
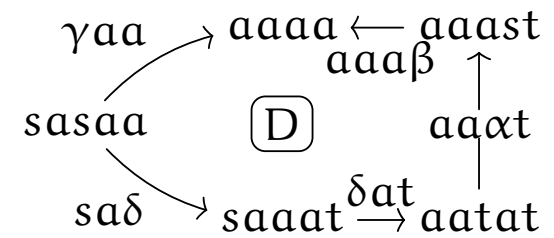
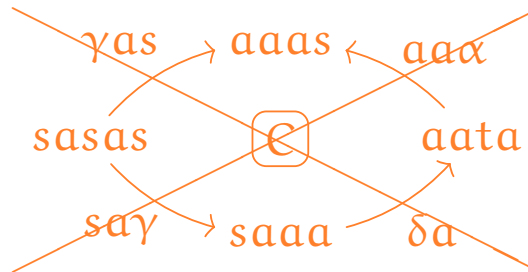
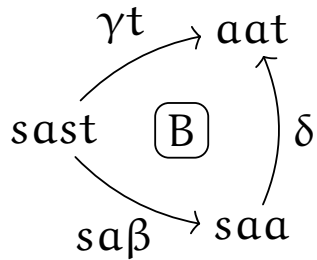
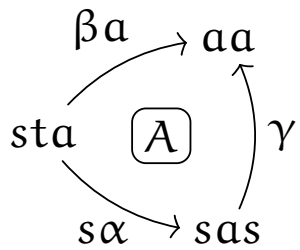
3.6. Réduction : exemple (1/2)

Réduction en dimension 2 :

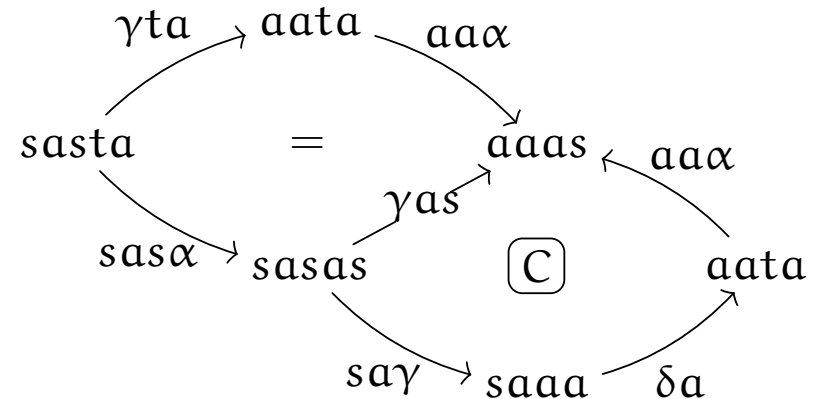
Triples branchements critiques \rightsquigarrow Relations entre les 2-cellules

Exemple :

$$Y = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, \cancel{C}, D \rangle$$



$\equiv \omega_1 \equiv$



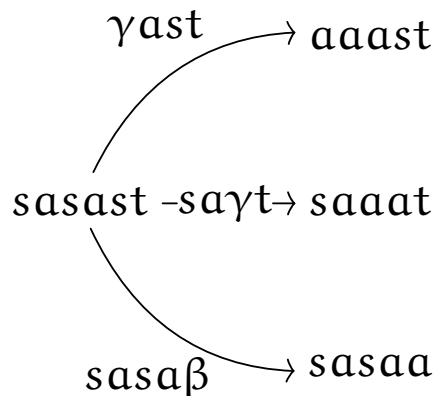
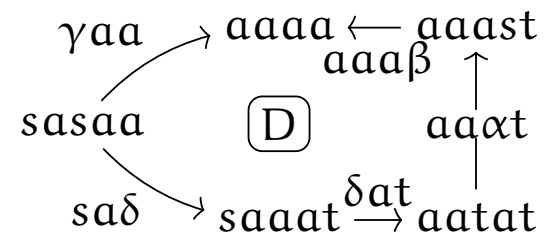
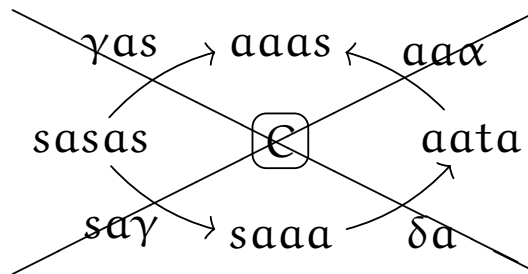
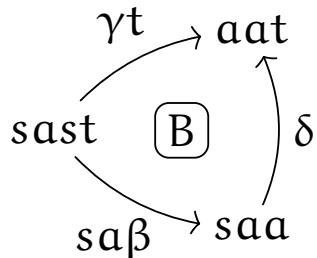
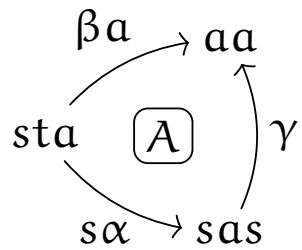
3.6. Réduction : exemple (1/2)

Réduction en dimension 2 :

Triples branchements critiques \rightsquigarrow Relations entre les 2-cellules

Exemple :

$$Y = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, \cancel{C}, D \rangle$$



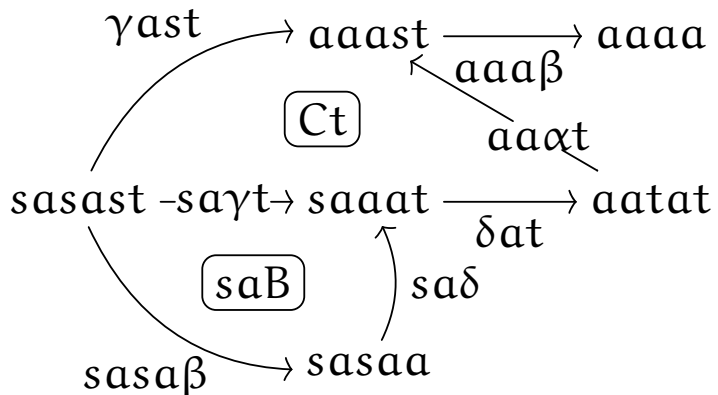
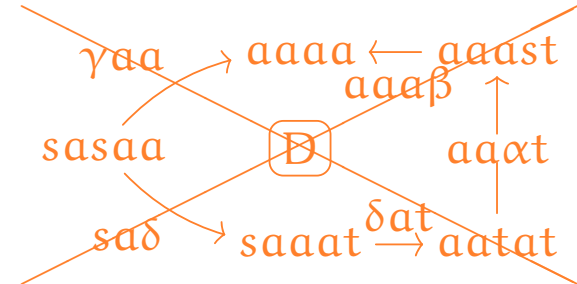
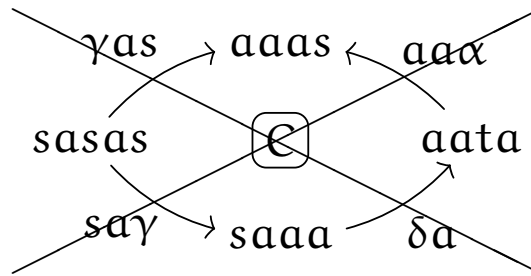
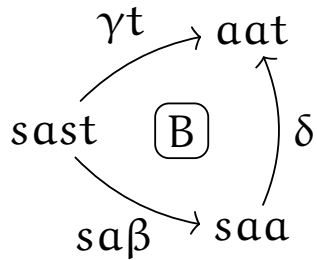
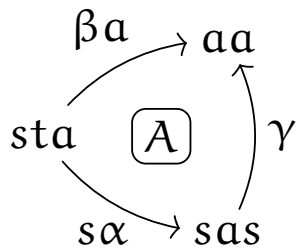
3.6. Réduction : exemple (1/2)

Réduction en dimension 2 :

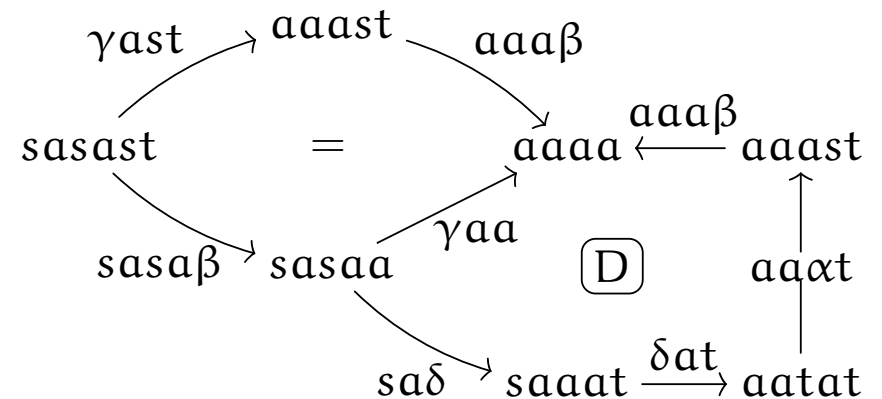
Triples branchements critiques \rightsquigarrow Relations entre les 2-cellules

Exemple :

$$Y = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, \cancel{C}, \cancel{D} \rangle$$



$\equiv \omega_2 \equiv$



3.7. Réduction : exemple (2/2)

Réduction en

- dimension 1 : élimination des cellules ajoutées par la complétion
- dimension 0 : élimination des générateurs et relations redondants

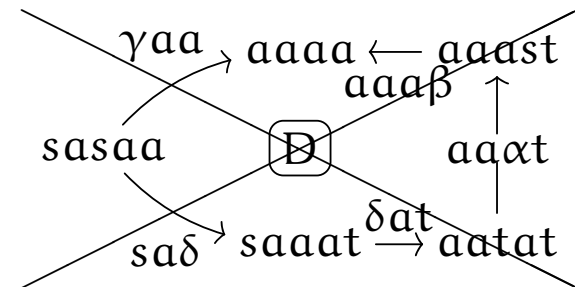
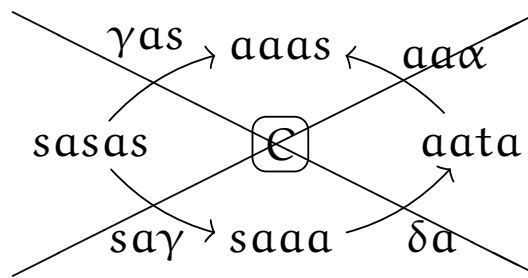
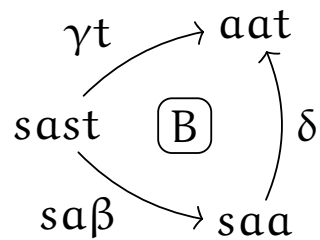
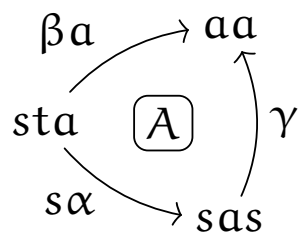
3.7. Réduction : exemple (2/2)

Réduction en

- dimension 1 : élimination des cellules ajoutées par la complétion
- dimension 0 : élimination des générateurs et relations redondants

Exemple :

$$Y = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \mid A, B, \cancel{C}, \cancel{D} \rangle$$



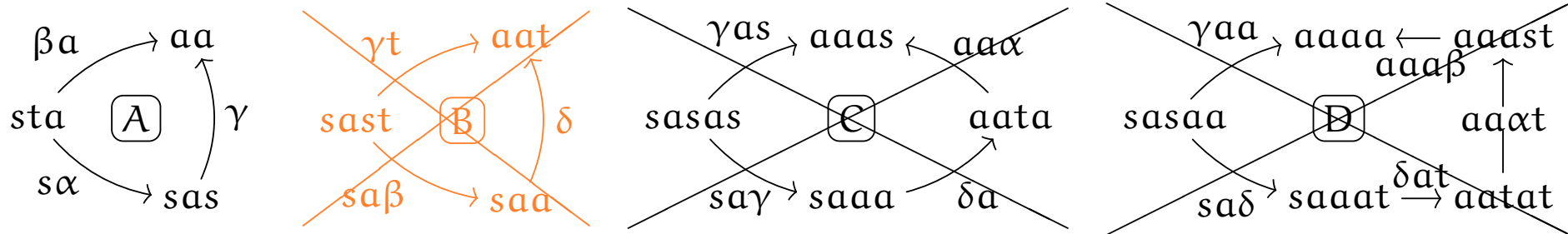
3.7. Réduction : exemple (2/2)

Réduction en

- dimension 1 : élimination des cellules ajoutées par la complétion
- dimension 0 : élimination des générateurs et relations redondants

Exemple :

$$Y = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, \cancel{saa} \xrightarrow{\delta} \cancel{aat} \mid A, \cancel{B}, \cancel{C}, \cancel{D} \rangle$$



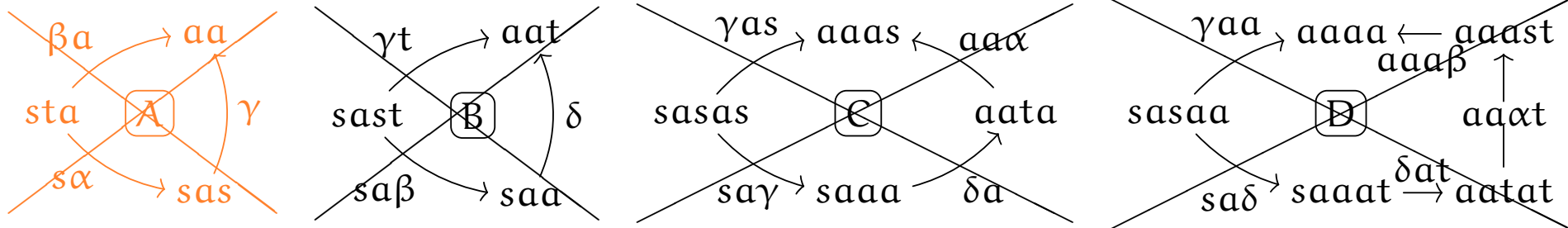
3.7. Réduction : exemple (2/2)

Réduction en

- dimension 1 : élimination des cellules ajoutées par la complétion
- dimension 0 : élimination des générateurs et relations redondants

Exemple :

$$Y = \langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, \cancel{sas \xrightarrow{\gamma} aa}, \cancel{saa \xrightarrow{\delta} aat} \mid \cancel{A}, \cancel{B}, \cancel{C}, \cancel{D} \rangle$$



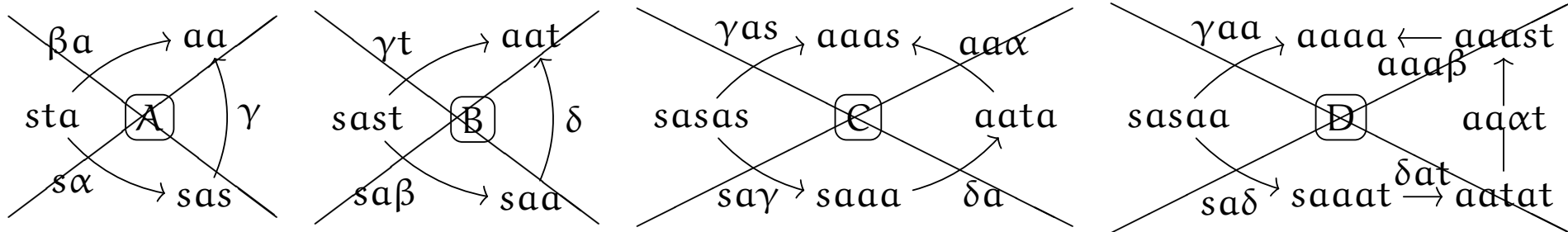
3.7. Réduction : exemple (2/2)

Réduction en

- dimension 1 : élimination des cellules ajoutées par la complétion
- dimension 0 : élimination des générateurs et relations redondants

Exemple :

$$Y = \langle s, t, \cancel{\alpha} \mid \text{tst} \xrightarrow{\alpha} \text{sts}, \cancel{\text{st} \xrightarrow{\beta} \text{a}}, \cancel{\text{sas} \xrightarrow{\gamma} \text{aa}}, \cancel{\text{saa} \xrightarrow{\delta} \text{aat}} \mid \cancel{\mathbb{A}}, \cancel{\mathbb{B}}, \cancel{\mathbb{C}}, \cancel{\mathbb{D}} \rangle$$



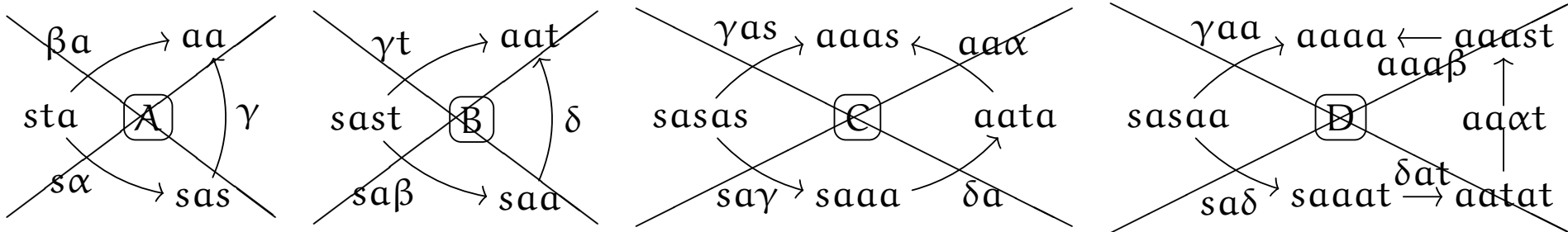
3.7. Réduction : exemple (2/2)

Réduction en

- dimension 1 : élimination des cellules ajoutées par la complétion
- dimension 0 : élimination des générateurs et relations redondants

Exemple :

$$Y = \langle s, t, \alpha \mid \text{tst} \xrightarrow{\alpha} \text{sts}, \text{st} \xrightarrow{\beta} a, \text{sas} \xrightarrow{\gamma} aa, \text{saa} \xrightarrow{\delta} aat \mid \cancel{A}, \cancel{B}, \cancel{C}, \cancel{D} \rangle$$



Conclusion : $\langle s, t \mid \text{tst} \rightarrow \text{sts} \mid \emptyset \rangle$ est une présentation cohérente de B_3^+

3.8. Le théorème

Théorème [GGM 15] : Pour tout groupe de Coxeter W ,

$$Z(W) = \coprod_{r,s,t} \{Z_{rst}\}$$

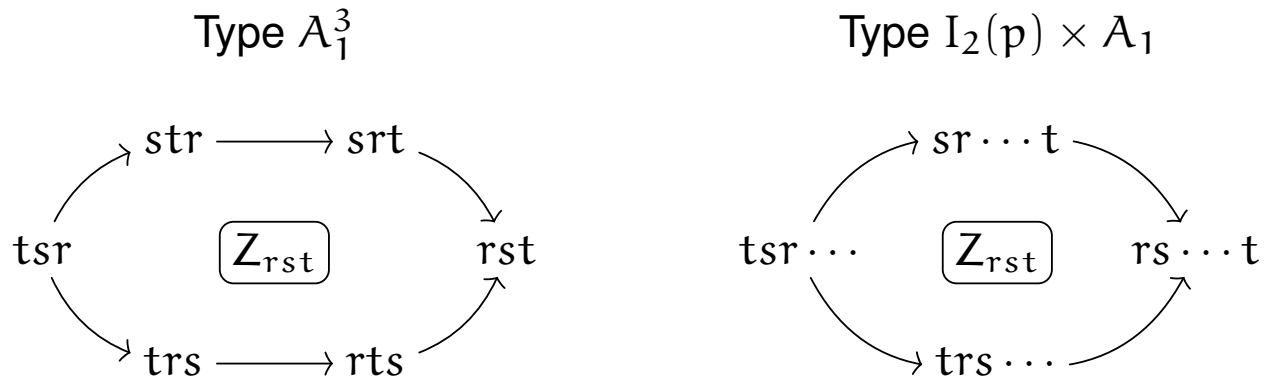
est une base d'homotopie de $B^+(W)$, où $\{r, s, t\} \subseteq S$ tq $W_{\{r,s,t\}}$ de rang 3 fini, et Z_{rst} est

3.8. Le théorème

Théorème [GGM 15] : Pour tout groupe de Coxeter W ,

$$Z(W) = \coprod_{r,s,t} \{Z_{rst}\}$$

est une base d'homotopie de $B^+(W)$, où $\{r, s, t\} \subseteq S$ tq $W_{\{r,s,t\}}$ de rang 3 fini, et Z_{rst} est



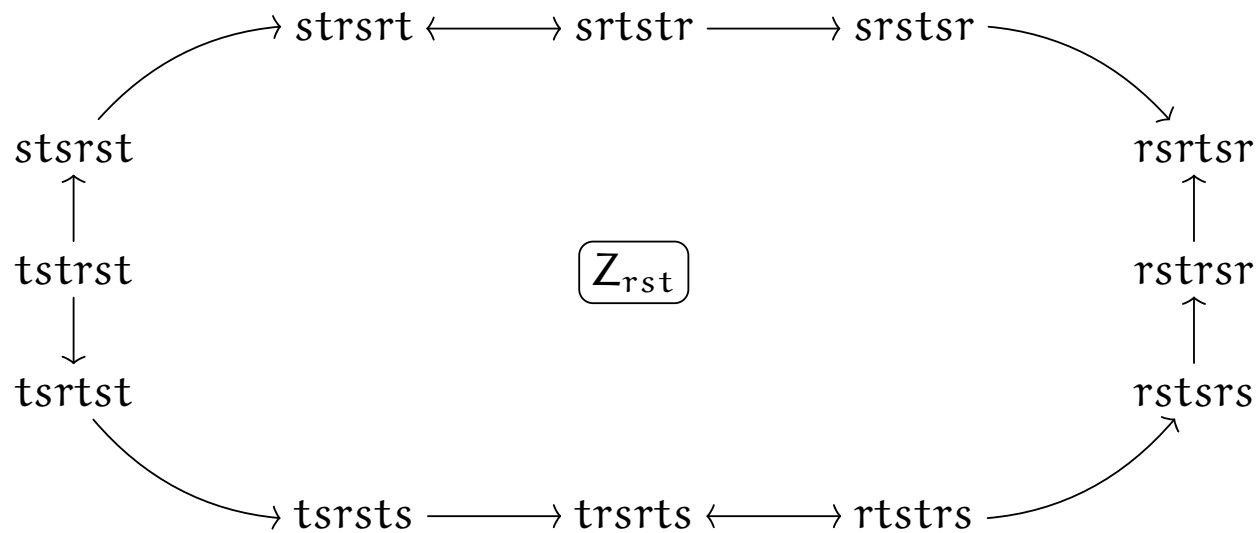
3.8. Le théorème

Théorème [GGM 15] : Pour tout groupe de Coxeter W ,

$$Z(W) = \coprod_{r,s,t} \{Z_{rst}\}$$

est une base d'homotopie de $B^+(W)$, où $\{r, s, t\} \subseteq S$ tq $W_{\{r,s,t\}}$ de rang 3 fini, et Z_{rst} est

Type A_3 : Zamolodchikov [Deligne 97]



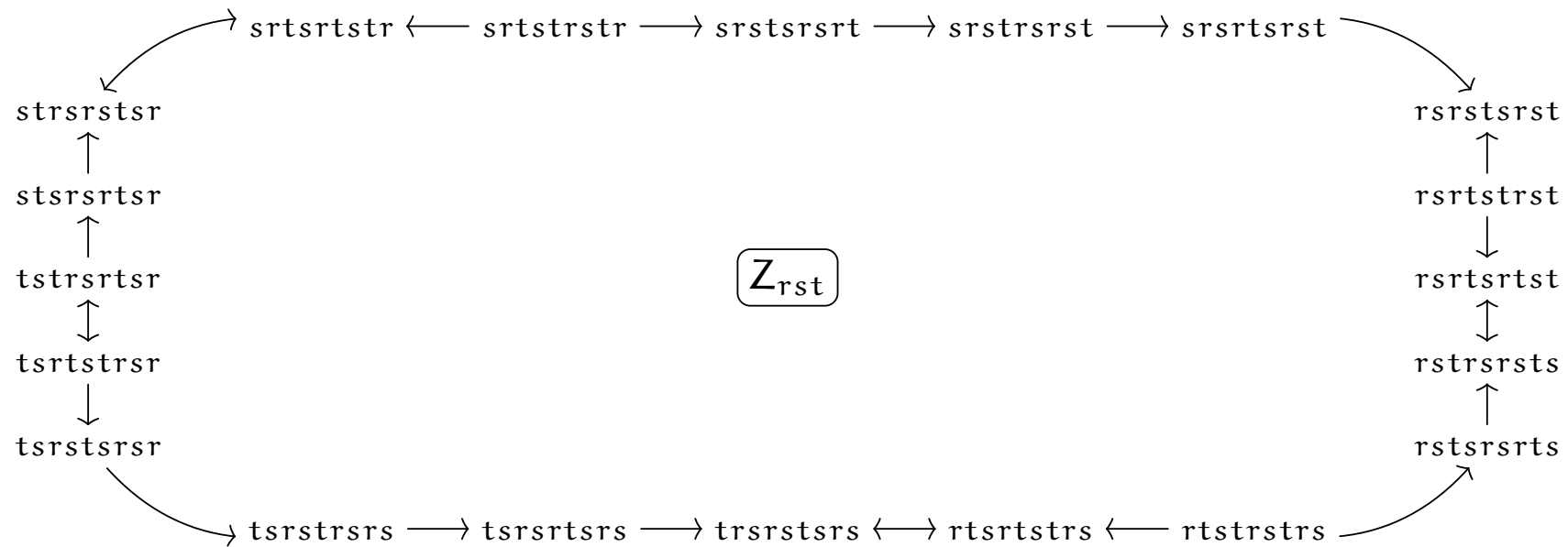
3.8. Le théorème

Théorème [GGM 15] : Pour tout groupe de Coxeter W ,

$$Z(W) = \coprod_{r,s,t} \{Z_{rst}\}$$

est une base d'homotopie de $B^+(W)$, où $\{r, s, t\} \subseteq S$ tq $W_{\{r,s,t\}}$ de rang 3 fini, et Z_{rst} est

Type B_3

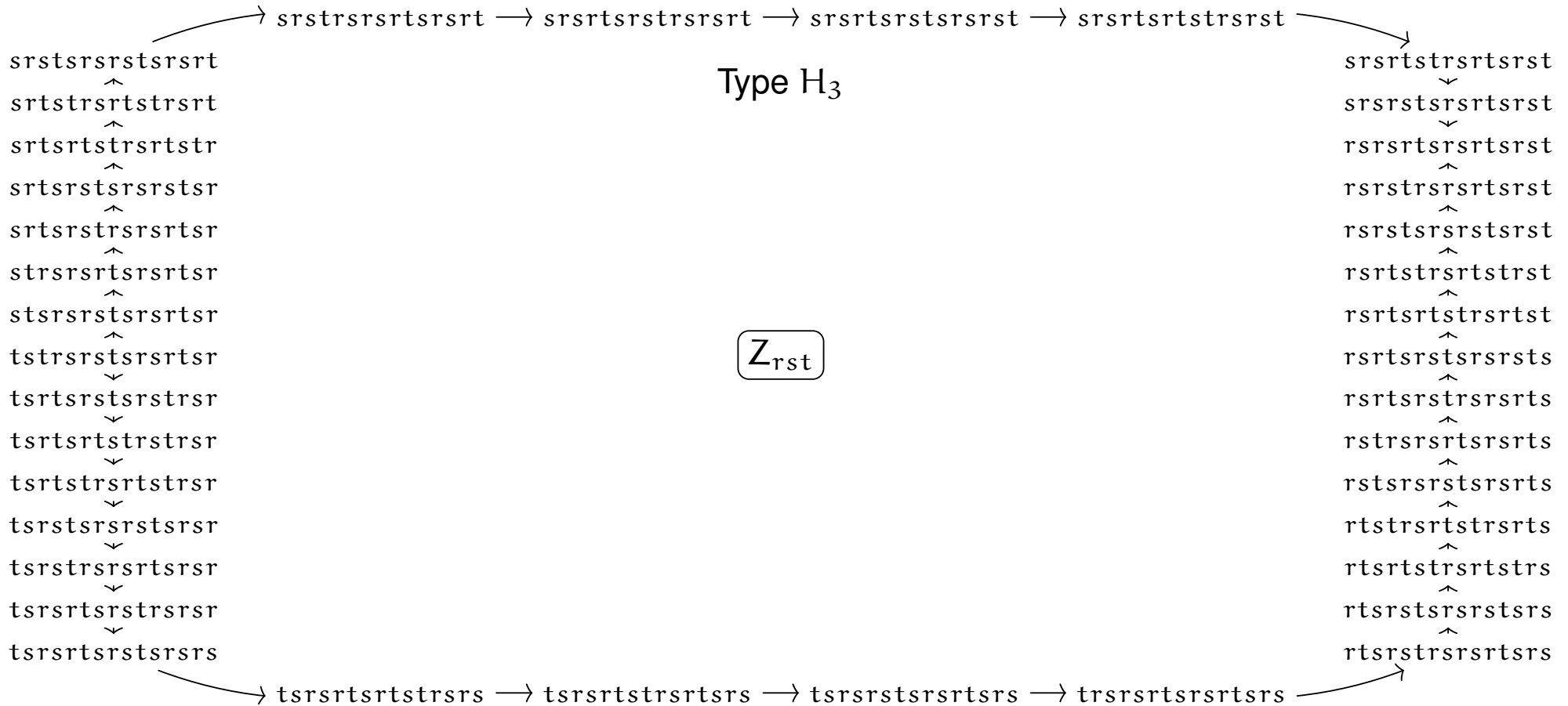


3.8. Le théorème

Théorème [GGM 15] : Pour tout groupe de Coxeter W ,

$$Z(W) = \coprod_{r,s,t} \{Z_{rst}\}$$

est une base d'homotopie de $B^+(W)$, où $\{r, s, t\} \subseteq S$ tq $W_{\{r,s,t\}}$ de rang 3 fini, et Z_{rst} est



4. Et après ?

4.1. Extensions connues (ou pas)

En dimension supérieure :

- Présentations cohérentes
→ Résolutions polygraphiques dans $\infty\text{Gpd}(\text{Mon})$ [Métayer 2003, Ara-Métayer 2011]
- Théorème de Squier en dimension supérieure [G.-Malbos 2012] :
Branchements critiques n -uples d'une présentation convergente = Résolution polygraphique
- ? Résolutions polygraphiques / représentations vs. HITs / éliminateurs (avec Antoine, Eric, Matthieu)

Pour d'autres structures algébriques :

- Algèbres associatives [G.-Hoffbeck-Malbos 2017]
- ? Monoïdes dans une catégorie monoïdale (avec Marcelo Fiore)

Dans d'autres catégories que $\infty\text{Gpd}(\text{Mon})$?

- ∞ -groupoïdes cubiques monoïdaux [Lucas 2017]
- ? ∞ -groupoïdes monoïdaux *faibles*

Autre méthode de calcul de résolutions polygraphiques

- ? Théorie de Garside (avec Matthieu Picantin)