Un problème d'Hofstadter pour ses lecteurs curieux

Pierre Letouzey

10 avril 2018

Code Coq + rapport technique + cet exposé

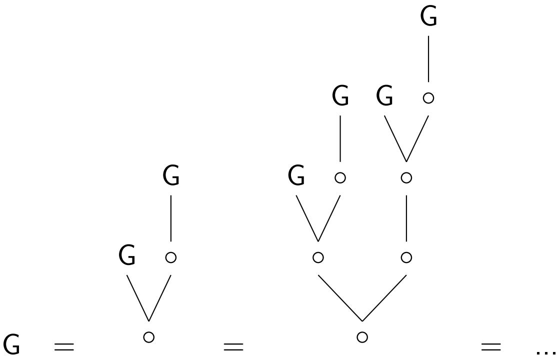
https://github.com/letouzey/hofstadter_g

Apéritif : fiboscargot

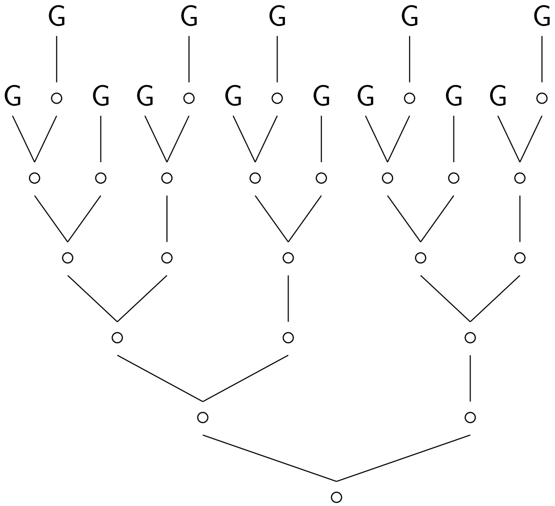
```
let rec f n l a = match n,l with
 | (0|1), [] -> succ a
 | (0|1), m::l -> f m l (succ a)
 | _ -> f (n-1) (n-2 :: l) a

let fiboscargot n = f n [] 0
```

Un arbre auto-similaire

Douglas Hofstadter, “Gödel,Escher,Bach”, p.135



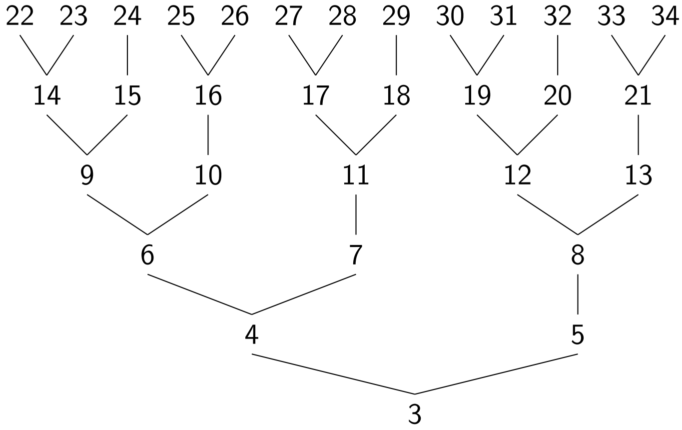
Un arbre auto-similaire



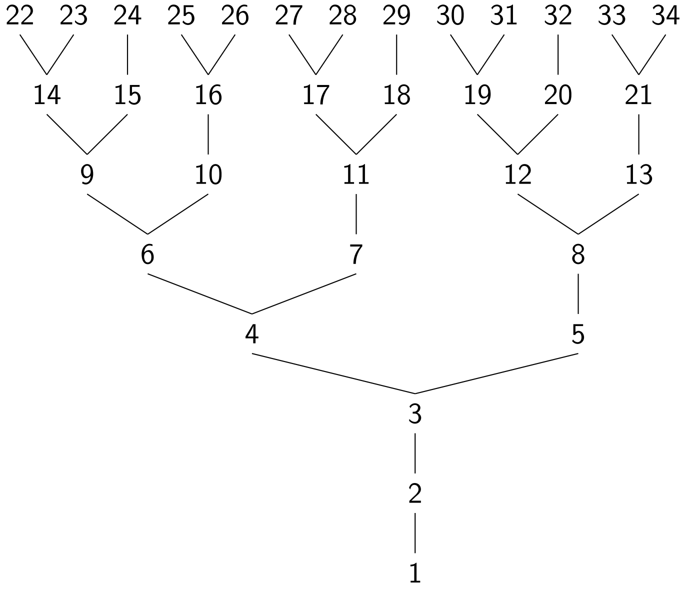
Combien de noeuds par niveau ?

Numérotons !

Parcours en largeur, de gauche à droite



Une racine ad-hoc



Et la fonction parent est ...

$$
\begin{aligned}
G(n) &= n - G(G(n-1)) \qquad\qquad (n > 0)\\
G(0) &= 0
\end{aligned}
$$

Aparté : arbre de fonction, fonction d'arbre

Soit un arbre:

- infini
- dont les noeuds ont des arités finies non nulles
- numéroté via un parcours en largeur

Que peut-on dire de sa fonction parent ?

Recip. que faut-il sur une fonction $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pour qu'elle soit la fonction parent d'un et un seul tel arbre ?

Aparté : arbre de fonction, fonction d'arbre

- f croissante
- f(n)$<$n hormis à la racine
- f surjective
- f ne stationne pas (i.e. tend vers $+\infty$)

Fibonacci

$$
\begin{aligned}
F_0 &= 0 \\
F_1 &= 1 \\
F_{n+2} &= F_n + F_{n+1}
\end{aligned}
$$

Théorème de Zeckendorf

Décomposition $n = \Sigma F_i$ *canonique*:

1. pas de F_0 ni F_1
2. pas de redondance
3. pas de nombres de Fibonacci consécutifs

Décomposition *faible* : (1) + (2)

Thm: tout entier naturel a une unique décomposition canonique.

Zeckendorf, variante

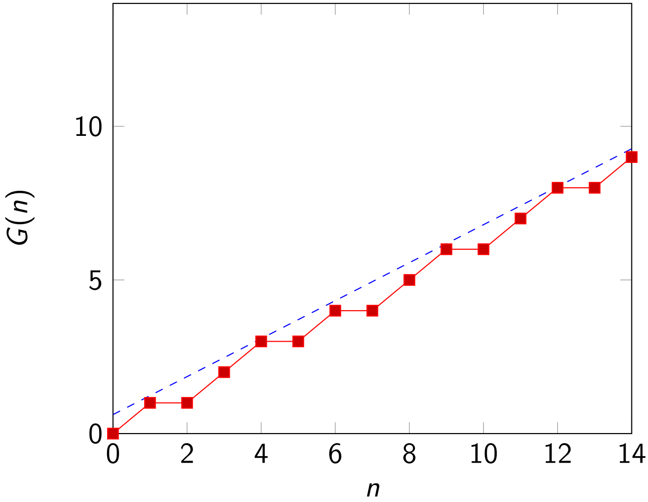
Def: le *rang* d'une décomposition est l'indice du plus petit terme.

Algo: canonisation d'une décomposition faible de n

- le nombre de termes croît ou stagne
- le rang augmente (par pas de 2) ou stagne

Etude de G

$$G(n) = n - G(G(n-1))$$



Etude de G

$G(n) = n - G(G(n-1))$

- Existence + encadrement $0 \leq G(n) \leq n$
- $G(0) = 0$, $G(1) = 1$ puis $1 \leq G(n) < n$
- G "avance" par pas de 0 ou $+1$
- Après un pas à 0, forcément un $+1$
- Jamais trois $+1$ de suite

On peut en fait montrer que $G(n) = \lfloor (n+1)/\phi \rfloor$

Surjectivité

Propriété importante:

- $G(n + G(n)) = n$

Conséquence:

- $G(n) + G(G(n+1) - 1) = n$

G et Fibonacci

- $G(F_i) = F_{i-1}$
- Plus généralement: $G(\Sigma F_i) = \Sigma F_{i-1}$, en partant d'une décomposition faible
- Preuve selon le rang de la décomposition (2, pair$>$2, impair).
- Nombreuses conséquences concernant G et le rang.

Et en Coq ?

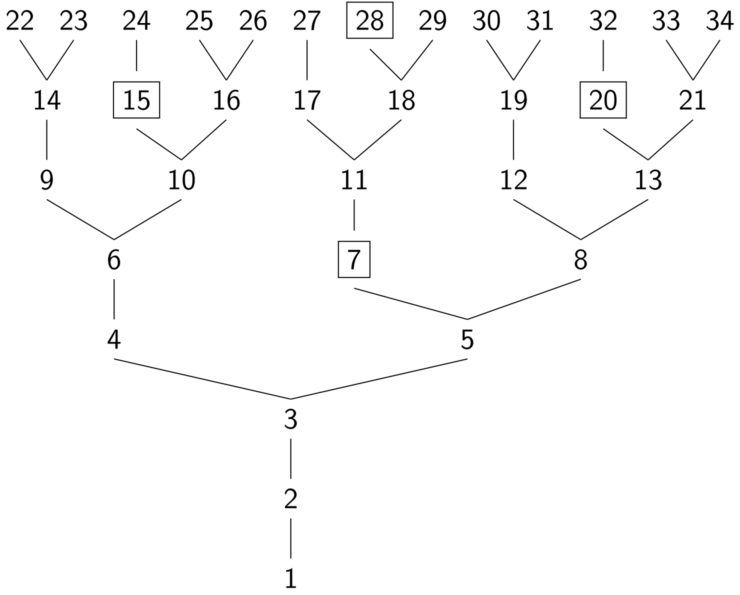
Jusqu'ici, rien que du connu (cf `https://oeis.org/A005206`).
Attention à la littérature (en particulier un article buggé de 1986) !
Preuves Coq “maisons”, sans trop de soucis:

- `DeltaList.v`
- `Fib.v`
- `FunG.v`
- `Phi.v`

A problem for curious readers is:

Suppose you flip diagram G around as if in a mirror, and label the nodes of the new tree so that they increase from left to right. Can you find a recursive *algebraic* definition for this "flip-tree" ?

Arbre miroir



Solution ?

- Il y a avait une conjecture sur `https://oeis.org/A123070`
- Mais pas de preuve. . .
- Hofstadter devait probablement avoir au moins cette formule

$$\overline{G}(n) = n + 1 - \overline{G}(\overline{G}(n-1) + 1) \qquad (n > 3)$$
$$\overline{G}(n) = \lceil n/2 \rceil \qquad (n \leq 3)$$

- Preuve papier pénible, multiples cas (vive Coq!)

Grandes lignes

- Une fonction *depth* donnant l'étage de n dans l'arbre.
- En fait un inverse de Fibonacci.
- Aussi calculable en itérant G sur n jusqu'à atteindre 1.
- Une fonction *flip* qui renverse un étage de l'arbre: $\mathit{flip}(1+F_k), \ldots, \mathit{flip}(F_{k+1}) = F_{k+1}, \ldots, 1+F_k$.
- Def: $\mathit{flip}(n) = \mathit{if}\ \ n \leq 1\ \mathit{then}\ n\ \mathit{else}\ 1 + F(3 + \mathit{depth}(n)) - n$.
- Def: $\overline{G}(n) = \mathit{flip}(G(\mathit{flip}(n)))$
- Et on montre que ce $\overline{G}$ valide bien l'équation précédente, cf `FlipG.v`

Autre résultat principal

Def: n est de rang 3-impair si sa décomposition canonique commence par $F_3 + F_{2p+1} + ...$.

Thm: $\overline{G}(n) = 1 + G(n)$ si n est de rang 3-impair, sinon $\overline{G}(n) = G(n)$.

Preuve: encore pire actuellement que la précédente, pléthore de cas.

Cor: $\overline{G}$ et G diffèrent pour n=7, puis tous les 5 ou 8 entiers.

Dérivées

Def: $\Delta G(n) = G(n+1) - G(n)$.
Prop: $\Delta G(n+1) = 1 - \Delta G(n).\Delta G(G(n))$.

Def: $\Delta\overline{G}(n) = \overline{G}(n+1) - \overline{G}(n)$.
Prop: $\Delta\overline{G}(n+1) = 1 - \Delta\overline{G}(n).\Delta\overline{G}(\overline{G}(n+1))$ (pour n>2).

Equation alternative

Anciens essais: pour n>3, $\overline{G}(n-1)+\overline{G}(\overline{G}(n))=n$

Mais ceci ne caractérise pas une unique fonction (sauf à exiger qu'elle soit monotone).

Conclusions & Perspectives

- On trouve encore des conjectures “abordables” sur OEIS
- Des preuves étonnemment délicates pour de “simples” entiers.
- Merci Coq.
- Preuves papier plus directes ?
- Preuves Coq moins pédestres (quasi 5000 lignes en tout) ?
- Généralisation à $H(n) = n - H(H(H(n-1))$, etc ?
- Fonctions mutuelles d'Hofstadter (M et F) ?
- Autres apparitions de G à étudier (jeu de Wythoff. . .)