Théorème de rigidité : des lois distributives aux lois de confluence

Bérénice Delcroix-Oger (avec E. Burgunder)

Bureau 3041

Journées PPS, 12-13 Octobre 2017

Sommaire

Problème (simple) :

Comment calculer $3 \times (2+4)$?

$$3 \times (2+4)$$

Problème (simple) :

Comment calculer $3 \times (2+4)$?

$$3 \times (2+4) \longrightarrow 3 \times 6$$

Problème (simple) :

Comment calculer $3 \times (2+4)$?

$$3 \times (2+4)$$

$$3 \times 6$$

$$18$$

Problème (simple) :

Comment calculer $3 \times (2+4)$?

$$\begin{tikzcd}
 & 3 \times (2+4) \arrow[dl] \arrow[ddr] & \\
(3 \times 2) + (3 \times 4) & & \\
 & & 3 \times 6 \arrow[dl] \\
 & 18 &
\end{tikzcd}$$

Problème (simple) :

Comment calculer $3 \times (2 + 4)$?

$$
\begin{tikzcd}
 & 3 \times (2+4) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
(3 \times 2) + (3 \times 4) \arrow[d] & & \\
6 + 12 \arrow[dr] & & 3 \times 6 \arrow[dl] \\
 & 18 &
\end{tikzcd}
$$

$\rightarrow$ Confluent !

Dans notre exemple,

- deux produits : $\times : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

- une loi distributive :

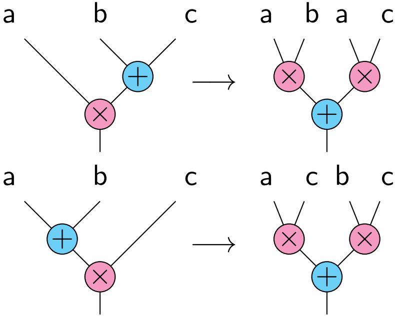
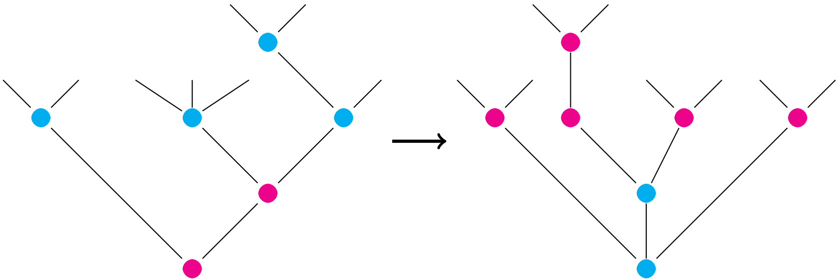


Schéma général



Opérades : exemple paradigmatique

Les applications multi-linéaires d'un espace vectoriel V

$$(\mathrm{End})(V)(n) = \mathrm{Hom}(V^{\otimes n}, V)$$

muni de la composition definie sur $f \in (\mathrm{End})(V)(k)$ et $g_i \in (\mathrm{End})(V)(j_i)$, où $\sum_i j_i = n$, par :

$$f \circ (g_1, \ldots, g_k)(x_1, \ldots, x_n) = f\left(g_1(x_1, \ldots, x_{j_1}), \ldots, g_k(x_{j_1+\ldots+j_{k-1}+1}, \ldots, x_n)\right)$$

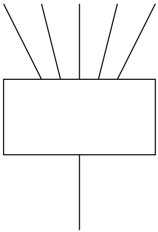
Opérades : exemple paradigmatique

Les applications multi-linéaires d'un espace vectoriel V

$$(\mathrm{End})(V)(n) = \mathrm{Hom}(V^{\otimes n}, V)$$

muni de la composition definie sur $f \in (\mathrm{End})(V)(k)$ et $g_i \in (\mathrm{End})(V)(j_i)$, où $\sum_i j_i = n$, par :

$$f \circ (g_1, \ldots, g_k)(x_1, \ldots, x_n) = f\left(g_1(x_1, \ldots, x_{j_1}), \ldots, g_k(x_{j_1+\ldots+j_{k-1}+1}, \ldots, x_n)\right)$$



$\rightarrow$

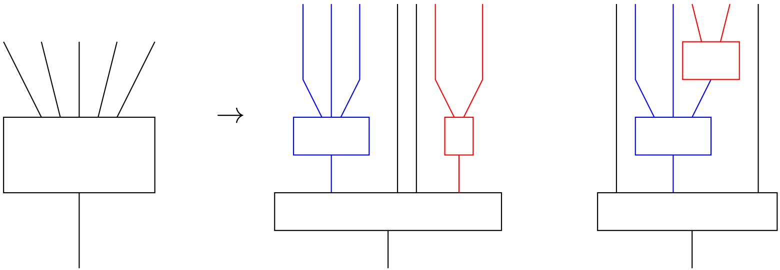
Opérades : exemple paradigmatique

Les applications multi-linéaires d'un espace vectoriel V

$$(\mathrm{End})(V)(n) = \mathrm{Hom}(V^{\otimes n}, V)$$

muni de la composition definie sur $f \in (\mathrm{End})(V)(k)$ et $g_i \in (\mathrm{End})(V)(j_i)$, où $\sum_i j_i = n$, par :

$$f \circ (g_1, \ldots, g_k)(x_1, \ldots, x_n) = f\left(g_1(x_1, \ldots, x_{j_1}), \ldots, g_k(x_{j_1+\ldots+j_{k-1}+1}, \ldots, x_n)\right)$$



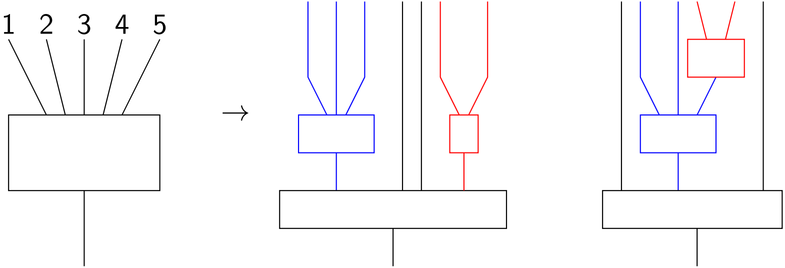
Opérades : exemple paradigmatique

Les applications multi-linéaires d'un espace vectoriel V

$$(\mathrm{End})(V)(n) = \mathrm{Hom}(V^{\otimes n}, V)$$

muni de la composition definie sur $f \in (\mathrm{End})(V)(k)$ et $g_i \in (\mathrm{End})(V)(j_i)$, où $\sum_i j_i = n$, par :

$$f \circ (g_1, \ldots, g_k)(x_1, \ldots, x_n) = f\left(g_1(x_1, \ldots, x_{j_1}), \ldots, g_k(x_{j_1+\ldots+j_{k-1}+1}, \ldots, x_n)\right)$$



Opérades

Définition

Une opérade (symétrique) $\mathcal{P}$ est un couple formé de :

- *une famille de $\mathfrak{S}_n$-modules $\{\mathcal{P}(n)\}_{n\geq 1}$,*
- *une opération de composition associative décrite par les applications $\mathbb{K}$-linéaires :*

$$\gamma : \mathcal{P}(k) \otimes \mathcal{P}(i_1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{P}(i_k) \to \mathcal{P}(i_1 + \ldots + i_k)$$

Exemples :

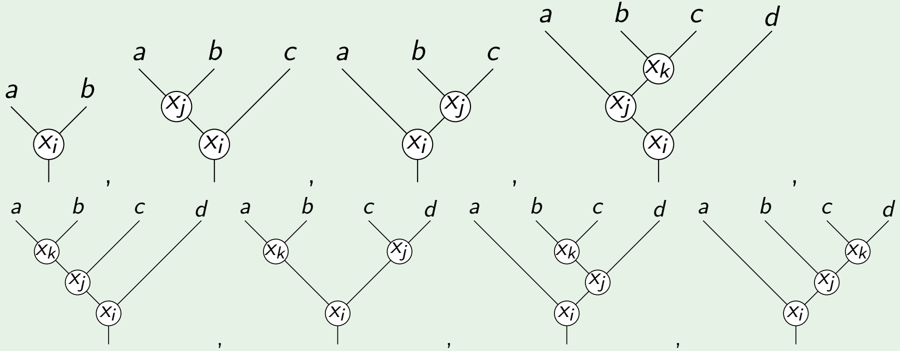
- $\mathcal{P}(n) = \mathbb{K}.x_n$ avec $\gamma : x_k \otimes x_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{i_1} \to x_{i_1+\ldots+i_k}$ (opérade commutative Comm)
- $\mathcal{P}(n) = \mathbb{K}.\{x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)} | \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ avec γ : $x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(k)} \otimes x_{\tau_1(1)} \ldots x_{\tau_1(i_1)} \otimes \ldots \otimes x_{\tau_k(1)} \ldots x_{\tau_k(i_k)} \to x_{\nu(1)} \ldots x_{\nu(\sum_{j=1}^k i_j)}$ (opérade associative Assoc)

Opérades

L'opérade libre sur une suite de $\mathfrak{S}_n$-modules $\{E(n)\}_{n\geq 2}$ est donnée par :

$$\mathcal{F}(E)(n) := \bigoplus_{T\in\mathcal{T}_n} \mathrm{Vect}\left(E(T)\right), \text{ où } E(T) = \bigotimes_{v\in V(T)} E(val(v)).$$

Opérade libre sur un ensemble de générateurs binaires $\{x_1, \ldots, x_k\}$



Opérades

Présentation de l'opérade $\mathcal{P}$:

- une suite de $\mathfrak{S}_n$-modules $\{E(n)\}_{n\geq 2}$
- $R \subset \mathcal{F}(E)$

$$\mathcal{P} = \mathcal{F}(E)/(R) =: \langle E; R\rangle$$

$\mathcal{P}$ est *quadratique* s'il existe E tel que $E(n) = 0$ pour $n \neq 2$ et $R \subset \mathcal{F}(E)(3)$.

Opérades

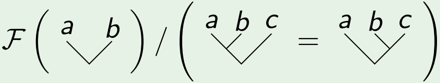
Présentation de l'opérade $\mathcal{P}$:

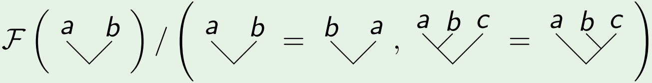
- une suite de $\mathfrak{S}_n$-modules $\{E(n)\}_{n\geq 2}$
- $R \subset \mathcal{F}(E)$

$$\mathcal{P} = \mathcal{F}(E)/(R) =: \langle E; R\rangle$$

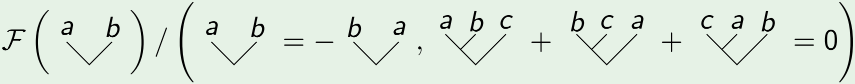
$\mathcal{P}$ est *quadratique* s'il existe E tel que $E(n) = 0$ pour $n \neq 2$ et $R \subset \mathcal{F}(E)(3)$.

Exemples :

Associative : 

Commutative : 

Lie :

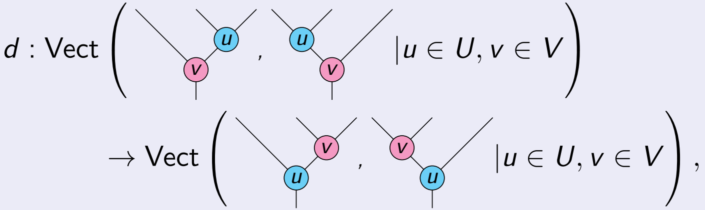


Lois distributives [Markl, 1994]

Soit $\mathcal{A} = \langle V, R\rangle$ et $\mathcal{B} = \langle U, S\rangle$ deux opérades quadratiques,

Définition

Une loi distributive est une application



qui est compatible avec la structure d'opérade de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{B}$)

Lois distributives

Contre-exemple

$\mathcal{A} = Comm = \langle \mathcal{F}(\cdot); a \cdot b = b \cdot a, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \rangle$ et
$\mathcal{B} = Nil = \langle \mathcal{F}([.,.]); [a,b] = -[b,a], [[a,b],c] = 0 \rangle$

$$[a \cdot b, c] = a \cdot [b,c] + [a,c] \cdot b$$

Lois distributives

Contre-exemple

$\mathcal{A} = Comm = \langle \mathcal{F}(\cdot); a \cdot b = b \cdot a, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \rangle$ et
$\mathcal{B} = Nil = \langle \mathcal{F}([.,.]); [a, b] = -[b, a], [[a, b], c] = 0 \rangle$

$$[a \cdot b, c] = a \cdot [b, c] + [a, c] \cdot b$$

$$\begin{aligned}
[[a \cdot b, c], d] &= [a \cdot [b, c], d] + [[a, c] \cdot b, d] \\
&= a \cdot [[b, c], d] + [a, d] \cdot [b, c] + [a, c] \cdot [b, d] + [[a, c], d] \cdot b \\
&= [a, d] \cdot [b, c] + [a, c] \cdot [b, d] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Lois distributives

Exemple

Poisson : $\mathcal{A} = Comm = \langle \mathcal{F}(\cdot); a \cdot b = b \cdot a, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \rangle$ et
$\mathcal{B} = Lie = \langle \mathcal{F}([.,.]); [a,b] \; = \; - [b,a], [[a,b],c] + [[b,c],a] + [[c,a],b] = 0 \rangle$

$$[a \cdot b, c] = a \cdot [b,c] + [a,c] \cdot b$$

Forme normale : polynômes symétriques de crochets de Lie

Applications

- Construction de nouvelles opérades

- Héritage de propriétés (koszulité)

En reformulant,

- Opérade = foncteur

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \quad & \mathit{Vect} \to \mathit{Vect}, \\ & V \mapsto \mathcal{P}(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} V^{\otimes n} \end{aligned}$$

  + transformation naturelle $\mu : \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ (monade)

- Si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ deux opérades,
  loi distributive = transformation naturelle $TS \to ST$
  compatible avec les structures de monades de S et T

Bigèbre de Hopf

Definition

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Une bigèbre est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{B}$ muni :

- d'une produit $\mu : \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{B}$
- d'une unité $\eta : \mathbb{K} \to \mathcal{B}$
- d'un coproduit $\Delta : \mathcal{B} \to \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$
- d'une counité $\epsilon : \mathcal{B} \to \mathbb{K}$

tels que $(\mathcal{B}, \mu, \eta)$ soit une algèbre, $(\mathcal{B}, \Delta, \epsilon)$ soit une cogèbre et

$$\Delta(\mu(x, y)) = \mu(x_1, y_1) \otimes \mu(x_2, y_2), \forall x, y \in \mathcal{B},$$

où $\Delta(x) = x_1 \otimes x_2$ et $\Delta(y) = y_1 \otimes y_2$.

Exemple : l'algèbre des polynômes

Soit $\mathbb{C}$ un corps de caractéristique 0 et $(\mathbb{C}[X], \times)$ l'algèbre des polynômes en une variable (avec le produit usuel).
Cet algèbre munie du coproduit suivant forme une bigèbre (de Hopf) :

$$\Delta(X^k) = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} X^l \otimes X^{k-l}.$$

et

$$\Delta(P(X) \times Q(X)) = \Delta(P(X))(\times \otimes \times)\Delta(Q(X)).$$

Exemple : l'algèbre des polynômes

$$
\begin{tikzcd}
X^k \arrow[rr, bend left, "\Delta"] & & \sum_{l=0}^{k} \binom{l}{k} X^l \otimes X^{k-l} \arrow[ll, bend left, "\frac{1}{2^k}\times"]
\end{tikzcd}
$$

Autre exemple : l'algèbre des mots

Soit V un alphabet et V^+ l'espace vectoriel des mots non vides sur V, muni du produit de concaténation $\cdot$ et du coshuffle Δ donné sur tout mot non vide $u = u_1 \ldots u_n$ par :

$$\Delta(u) = \sum_{\substack{k, i_1 < \ldots < i_k, j_1 < \ldots < j_{n-k} \\ u_{i_1} \ldots u_{i_k} \cap u_{j_1} \ldots u_{j_{n-k}} = \emptyset}} u_{i_1} \ldots u_{i_k} \otimes u_{j_1} \ldots u_{j_{n-k}},$$

$(V^+, \cdot, \Delta)$ est alors une bigèbre de Hopf.

Autre exemple : l'algèbre des mots

$$
\begin{tikzcd}
ba \arrow[dr, bend left, "\Delta"] & \\
ab + ba \arrow[r, bend right, "\frac{1}{2}\Delta"'] & a \otimes b + b \otimes a \arrow[l, "\times"'] \\
ab \arrow[ur, bend right, "\Delta"'] &
\end{tikzcd}
$$

Considérons maintenant la déconcaténation Δ_d. La concaténation et la déconcaténation vérifient :

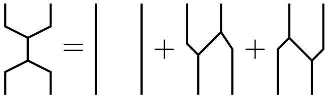
Considérons maintenant la déconcaténation Δ_d. La concaténation et la déconcaténation vérifient :

$$\Delta(u \cdot v) = \Delta(u_1 \dots u_k v_1 \dots v_l) = \sum_{i=1}^{k-1} u_1 \dots u_i \otimes u_{i+1} \dots u_k v_1 \dots v_l + u \otimes v \\ + \sum_{i=1}^{l-1} u_1 \dots u_k v_1 \dots v_i \otimes v_{i+1} \dots v_l.$$

Considérons maintenant la déconcaténation Δ_d. La concaténation et la déconcaténation vérifient :

$$\Delta(u \cdot v) = \Delta(u_1 \dots u_k v_1 \dots v_l) = \sum_{i=1}^{k-1} u_1 \dots u_i \otimes u_{i+1} \dots u_k v_1 \dots v_l + u \otimes v$$
$$+ \sum_{i=1}^{l-1} u_1 \dots u_k v_1 \dots v_i \otimes v_{i+1} \dots v_l.$$

$$\Delta(u \cdot v) = u \otimes v + \Delta(u)_1 \otimes \Delta(u)_2 \cdot v + u \cdot \Delta(v)_1 \otimes \Delta(v)_2.$$



$$\begin{tikzcd} u_1 \ldots u_n \arrow[r, bend left, "\Delta"] & \sum_{l=0}^{n} u_1 \ldots u_l \otimes u_{l+1} \ldots u_n \arrow[l, bend left, "\frac{1}{n+1}\times"] \end{tikzcd}$$

Réversibilité des opérations

Question

Quand a-t-on la réversibilité des produits et coproduits ?

Réversibilité des opérations

Question

Quand a-t-on la réversibilité des produits et coproduits ?

Réversibilité = Théorème de rigidité

Algèbre libre sur une opérade

Définition

Étant donnée une opérade $\mathcal{P}$, la $\mathcal{P}$-algèbre libre sur un espace vectoriel V est définie par :

$$\mathcal{P}(V) := \bigoplus_n \mathcal{P}(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} V^{\otimes n}$$

Exemples :

L'algèbre associative libre sur $\mathbb{K}.\{a, b\}$ est l'espace vectoriel $\{a, b\}^*$engendré par les mots sur l'alphabet $\{a, b\}$.
L'algèbre commutative libre sur $\mathbb{K}.\{X, Y, Z\}$ est l'algèbre $\mathbb{K}[X, Y, Z]$.

Algèbre et cogèbre sur une opérade

Soit $\mathcal{O}$ une opérade.

Définition (d'après Loday-Vallette)

Une algèbre sur $\mathcal{O}$ est un espace vectoriel A muni d'une famille de morphismes $\mathcal{O}(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} A^n \to A$. La $\mathcal{O}$-algèbre libre sur V est notée $\mathcal{O}(V)$.

Algèbre et cogèbre sur une opérade

Soit $\mathcal{O}$ une opérade.

Définition (d'après Loday-Vallette)

Une algèbre sur $\mathcal{O}$ est un espace vectoriel A muni d'une famille de morphismes $\mathcal{O}(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} A^n \to A$. La $\mathcal{O}$-algèbre libre sur V est notée $\mathcal{O}(V)$.

Une cogèbre sur $\mathcal{O}$ est un espace vectoriel C muni d'une famille de morphismes $\mathfrak{S}_n$-équivariant $\gamma_C^n : \mathcal{O}(n) \otimes C \to C^{\otimes n}$. La $\mathcal{O}$-cogèbre libre sur V est notée $\mathcal{O}^c(V)$.

Algèbre et cogèbre sur une opérade

Soit $\mathcal{O}$ une opérade.

Définition (d'après Loday-Vallette)

Une algèbre *sur $\mathcal{O}$ est un espace vectoriel A muni d'une famille de morphismes $\mathcal{O}(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} A^n \to A$. La $\mathcal{O}$-algèbre libre sur V est notée $\mathcal{O}(V)$.*

Une cogèbre *sur $\mathcal{O}$ est un espace vectoriel C muni d'une famille de morphismes $\mathfrak{S}_n$-équivariant $\gamma_C^n : \mathcal{O}(n) \otimes C \to C^{\otimes n}$. La $\mathcal{O}$-cogèbre libre sur V est notée $\mathcal{O}^c(V)$.*

La donnée de γ^n est équivalente à la donnée de $\Delta_C^n : C \to \mathcal{O}^*(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} C^{\otimes n}$ où $\mathcal{O}^*(n) = \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(n), \mathbb{K})$ (coopérade duale).

Bigèbres généralisées

Définition (Loday, 2008)

Une $\mathcal{C}^c -_\lambda \mathcal{A}$-bigèbre généralisée $\mathcal{H}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni :

- *d'une structure de $\mathcal{A}$-algèbre*
- *d'une structure de $\mathcal{C}^c$-cogèbre*
- *d'une loi distributive mixte reliant produits et coproduits, compatible avec les structures d'opérades et de coopérades :*

$$\lambda(m,n) : \mathcal{C}(m) \otimes \mathcal{A}(n) \to$$
$$\oplus \mathcal{A}(t_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}(t_m) \otimes_{\mathfrak{S}_{t_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{t_m}} \mathbb{K}[\mathfrak{S}_N] \otimes_{\mathfrak{S}_{s_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{s_n}} \mathcal{C}(s_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}(s_n),$$

où la somme porte sur les $N \geq 1$ et $s_1 + \cdot + s_n = t_1 + \cdots + t_m = N$.

Théorème de rigidité

Théorème

Toute $\mathcal{C}^c -_\lambda \mathcal{A}$-bigèbre (conilpotente) $\mathcal{H}$ est libre et colibre sur l'ensemble de ses éléments primitifs.

$$\mathcal{H} = \mathcal{A}(H_1) = \mathcal{B}^c(H_1).$$

Historique

φ

$\mathcal{C}$	$\mathcal{P}$	$\between$
Com	Com	Hopf [Borel]
As	As	n.u.i [Loday, Ronco]
As	Zinb	[Burgunder]
NAP	PreLie	[Livernet]
Dend	Dend	[Foissy]
...	...	...

Question

Question [Loday]

Existe-t-il toujours des lois distributives mixtes telles que l'on ait un théorème de rigidité ?

Réponse

Oui !

(Si l'on remplace "lois distributives mixtes" par "lois de confluence")

Lois de confluence

Définition

Une loi de confluence α *antre deux opérades* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{C}$ *est une famille d'applications*

$$\alpha_{m,n} : \mathcal{C}(m) \otimes \mathcal{A}(n) \to \mathcal{A}^{\otimes m}(n),$$

telle que $\alpha_{m,n}$ *soit compatible avec la structure d'opérade de* $\mathcal{C}$ *et avec l'action du groupe symétrique* $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n$.

La donnée d'une loi de confluence est équivalente à munir une $\mathcal{A}$-algèbre d'une structure de $\mathcal{C}$-cogèbre.

Théorème de rigidité

Étant donnée une $\mathcal{O}$-cogèbre C, la cofiltration $(C_n)_{n\geq 1}$ est définie par :

$$C_n = \{x | \forall k > n, \forall \delta \in \mathcal{O}(k), \delta(x) = 0\}.$$

C_1 est l'espace vectoriel des éléments appelés *primitifs*.
C est alors *conilpotente* si $C = \cup_{n\geq 1} C_n$.

Théorème de rigidité

Étant donnée une $\mathcal{O}$-cogèbre C, la cofiltration $(C_n)_{n\geq 1}$ est définie par :

$$C_n = \{x | \forall k > n, \forall \delta \in \mathcal{O}(k), \delta(x) = 0\}.$$

C_1 est l'espace vectoriel des éléments appelés *primitifs*.
C est alors *conilpotente* si $C = \cup_{n\geq 1} C_n$.

Théorème (Burgunder, D.0.)

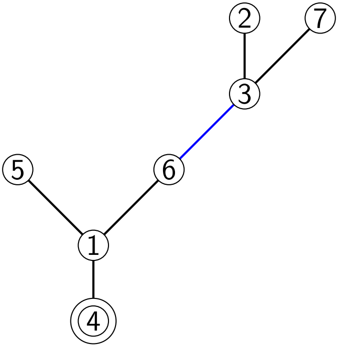
Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux opérades ayant les même $\mathfrak{S}_n$-modules (espèces) sous-jacents, alors il existe (au moins) une loi de confluence (λ) telle que toute $\mathcal{B}^c -_{(\lambda)} \mathcal{A}$-bigèbre conilpotente H soit libre et colibre sur ses éléments primitifs.

$$H = \mathcal{A}(H_1) = \mathcal{B}^c(H_1).$$

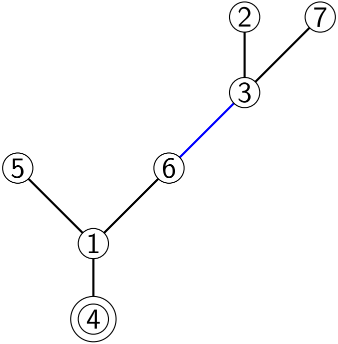
Historique (mis à jour)

$\mathcal{C}$	$\mathcal{P}$	$\between$
Com	Com	Hopf [Borel]
As	As	n.u.i [Loday, Ronco]
As	Zinb	[Burgunder]
Zinb	Leib	$\between_{ZL}$
As	Leib	$\between_{Leib}$
As	Pois	$\between_{Pois}$
NAP	PreLie	[Livernet]
PreLie	PreLie	$\between_{PreLie}$
NAP	NAP	$\between_{NAP}$
PAN	Perm	$\between_{PAN-Perm}$
Dend	Dend	[Foissy]
-	-	$\neq \between_{Dend}$ $(*)$
Dup	Dend	$\between_{Dup,\ Dend}$
...	...	...

Coproduit prelie dual



Coproduit prelie dual



Coproduit

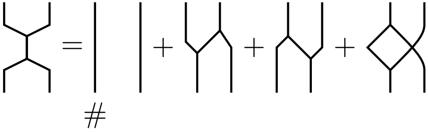
Un coproduit des arbres enracinés du produit Pré-Lie sur une algèbre Pré-Lie libre est donné par toutes les façons de supprimer une arête de l'arbre.

Cas Prelie

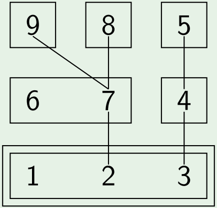
Dans le cas Prelie, les lois de confluence sont données par :

$\Delta(T \curvearrowleft S) = \# T \times T \otimes S + (T \curvearrowleft S_1) \otimes S_2 + (T_1 \curvearrowleft S) \otimes T_2 + T_1 \otimes (T_2 \curvearrowleft S)$,

où $\Delta(T) = T_1 \otimes T_2$ et $\Delta(S) = S_1 \otimes S_2$.



Application : Arbres partitionnés [Foissy] (= Arbres enracinés gras reliés aux hyperarbres décorés par $\widehat{perm}$)



Le coproduit suivant satisfait la loi de confluence voulue :

$$\Delta(T) = \sum_{e: a \to b} \frac{1}{|a|} R(T - \{e\}) \otimes L(T - \{e\})$$

Merci de votre attention !