Un problème d'Hofstadter pour ses lecteurs curieux

Pierre Letouzey

9 novembre 2018

Avertissement : la préparation de cet exposé a subi. . .

La loi d'Hofstadter : il faut toujours plus longtemps que prévu, même en tenant compte de la loi d'Hofstadter.

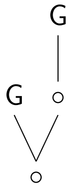
Code Coq + rapport technique + cet exposé

`https://github.com/letouzey/hofstadter_g`
(branche avec les dernières nouveautés: `generalized`)

Un arbre infini auto-similaire

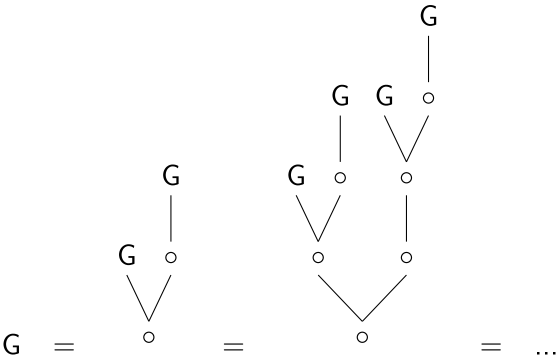
Douglas Hofstadter, “Gödel,Escher,Bach”, p.135

G =

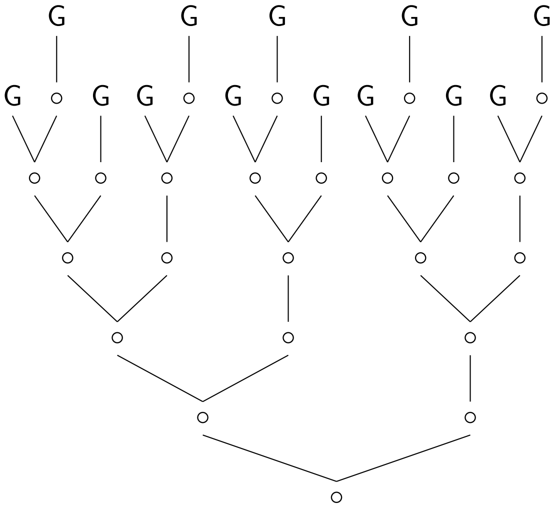


Un arbre infini auto-similaire

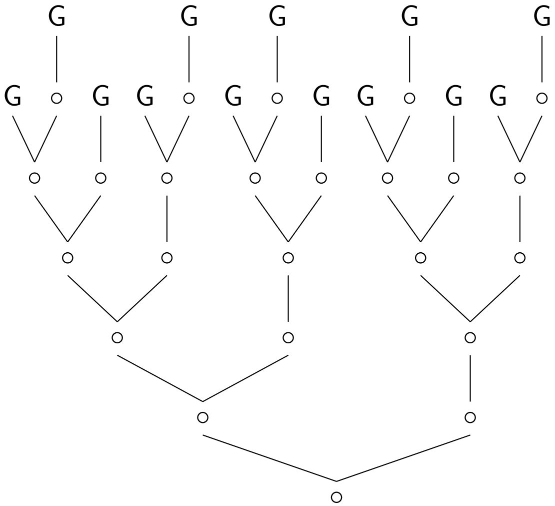
Douglas Hofstadter, “Gödel,Escher,Bach”, p.135



Un arbre infini auto-similaire



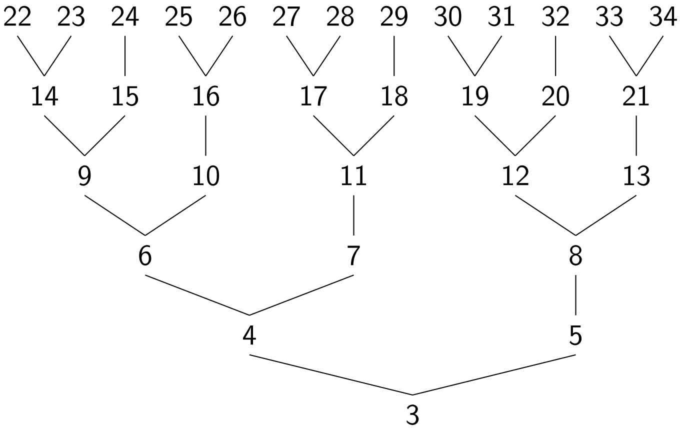
Un arbre infini auto-similaire



Combien de noeuds par niveau ?

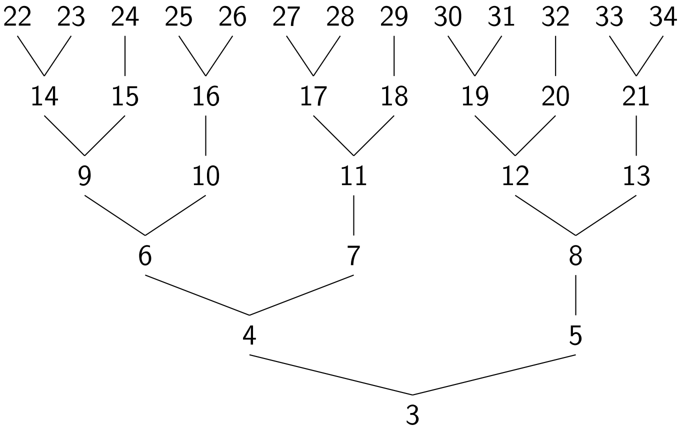
Numérotons !

Parcours en largeur, de gauche à droite



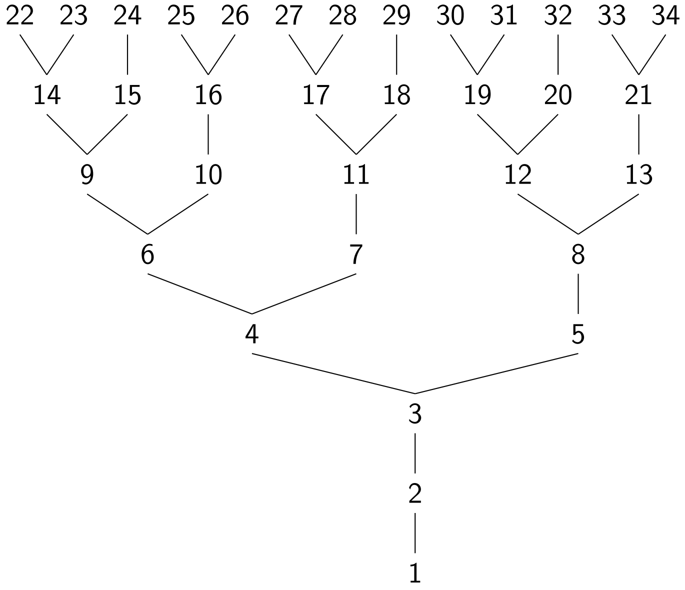
Numérotons !

Parcours en largeur, de gauche à droite



Départ à 3 ? Pour expliciter les nombres de Fibonacci

Ajout d'une racine ad-hoc. . .



Et la fonction parent est . . .

$$
\begin{aligned}
G(n) &= n - G(G(n-1)) \qquad\qquad \text{(pour } n > 0\text{)} \\
G(0) &= 0
\end{aligned}
$$

Aparté : arbre de fonction, fonction d'arbre

Soit un arbre:

- infini
- dont les noeuds ont des arités finies non nulles
- numéroté via un parcours en largeur

Que peut-on dire de sa fonction parent ?

Aparté : arbre de fonction, fonction d'arbre

Soit un arbre:

- infini
- dont les noeuds ont des arités finies non nulles
- numéroté via un parcours en largeur

Que peut-on dire de sa fonction parent ?

Recip. que faut-il sur une fonction $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pour qu'elle soit la fonction parent d'un et un seul tel arbre ?

Aparté : arbre de fonction, fonction d'arbre

- f croissante
- f(n)$<$n hormis à la racine
- f surjective
- f ne stationne pas (i.e. tend vers $+\infty$)

Etude de G

$G(n) = n - G(G(n-1))$

- Existence + encadrement $0 \leq G(n) \leq n$
- $G(0) = 0$, $G(1) = 1$ puis $1 \leq G(n) < n$
- G "avance" par pas de 0 ou $+1$
- Après un pas à 0, forcément un $+1$
- Jamais trois $+1$ de suite

Etude de G

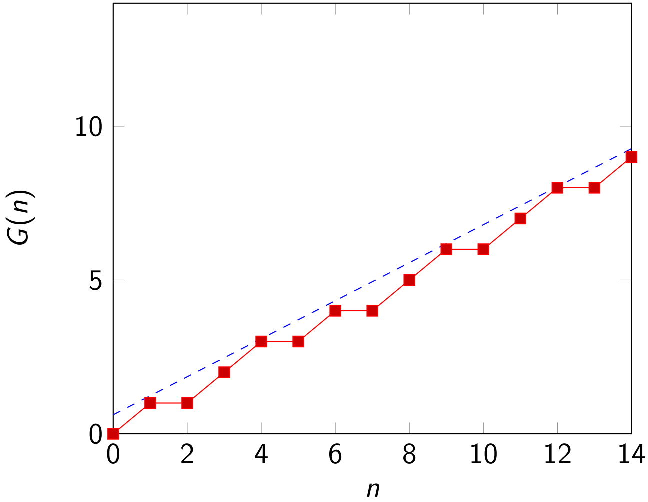
$G(n) = n - G(G(n-1))$

- Existence + encadrement $0 \leq G(n) \leq n$
- $G(0) = 0$, $G(1) = 1$ puis $1 \leq G(n) < n$
- G “avance” par pas de 0 ou $+1$
- Après un pas à 0, forcément un $+1$
- Jamais trois $+1$ de suite

On peut en fait montrer que $G(n) = \lfloor (n+1)/\phi \rfloor$

Etude de G

$$G(n) = n - G(G(n-1))$$



Deux équations cruciales

Surjectivité "explicite"

- $G(n + G(n)) = n$

Deux équations cruciales

Surjectivité "explicite"

- $G(n + G(n)) = n$

Equation "renversée"

- $G(n) + G(G(n+1) - 1) = n$

Fibonacci

$$
\begin{aligned}
F_0 &= 1 \\
F_1 &= 2 \\
F_{n+2} &= F_n + F_{n+1}
\end{aligned}
$$

Fibonacci

$$F_0 = 1$$
$$F_1 = 2$$
$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$$

NB: indices décalés pour éviter 0 et un double 1

Théorème de Zeckendorf

Une décomposition $n = \Sigma F_i$ est *canonique* si elle est :

1. sans doublons
2. sans termes consécutifs

Décomposition *relachée* : (1) mais pas forcément (2)

Théorème de Zeckendorf

Une décomposition $n = \Sigma F_i$ est *canonique* si elle est :

1. sans doublons
2. sans termes consécutifs

Décomposition *relachée* : (1) mais pas forcément (2)

Thm: tout entier naturel a une unique décomposition canonique.

Zeckendorf, variante

Def: le *rang* d'une décomposition est l'indice du plus petit terme.

Algo: canonisation d'une décomposition faible de n

- le nombre de termes croît ou stagne
- le rang augmente (par pas de 2) ou stagne

G et Fibonacci

- $G(F_i) = F_{i-1}$ (avec la convention $F_{0-1} = F_0 = 1$)

G et Fibonacci

- $G(F_i) = F_{i-1}$ (avec la convention $F_{0-1} = F_0 = 1$)
- Plus généralement: $G(\Sigma F_i) = \Sigma F_{i-1}$

G et Fibonacci

- $G(F_i) = F_{i-1}$ (avec la convention $F_{0-1} = F_0 = 1$)
- Plus généralement: $G(\Sigma F_i) = \Sigma F_{i-1}$
- Cela marche même pour des décompositions relachées
- Preuve selon le rang de la décomposition (0, pair>0, impair).
- Nombreuses conséquences concernant G et le rang.

Et en Coq ?

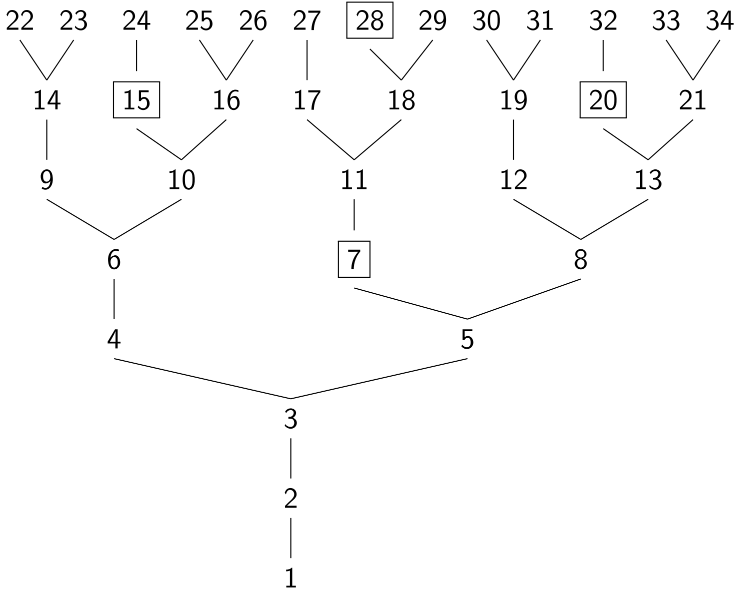
Jusqu'ici, rien que du connu (cf `https://oeis.org/A005206`).
Attention à la littérature (en particulier un article buggé de 1986) !
Preuves Coq "maison", sans trop de soucis:

- `DeltaList.v`
- `Fib.v`
- `FunG.v`
- `Phi.v`

A problem for curious readers is:

Suppose you flip diagram G around as if in a mirror, and label the nodes of the new tree so that they increase from left to right. Can you find a recursive *algebraic* definition for this “flip-tree” ?

Arbre miroir $\overline{G}$



Solution ?

- Il y avait une conjecture sur `https://oeis.org/A123070`
- Mais pas de preuve...
- Hofstadter devait probablement avoir au moins cette formule

$$\begin{aligned}
\overline{G}(n) &= n + 1 - \overline{G}(\overline{G}(n-1)+1) && (n > 3)\\
\overline{G}(n) &= n && (n = 0, 1)\\
\overline{G}(n) &= n - 1 && (n = 2, 3)
\end{aligned}$$

- Preuve papier pénible, multiples cas (vive Coq!)

Grandes lignes

- Une fonction *depth* donnant l'étage de n dans l'arbre.
- En fait un inverse de Fibonacci.
- Aussi calculable en itérant G sur n jusqu'à atteindre 1.

Grandes lignes

- Une fonction *depth* donnant l'étage de n dans l'arbre.
- En fait un inverse de Fibonacci.
- Aussi calculable en itérant G sur n jusqu'à atteindre 1.

- Une fonction *flip* qui renverse un étage de l'arbre: $flip(1+F_k), ..., flip(F_{k+1}) = F_{k+1}, ..., 1+F_k$.
- Def: $flip(n) = if\ \ n \leq 1\ then\ n\ else\ 1 + F(1 + depth(n)) - n$.

Grandes lignes

- Une fonction *depth* donnant l'étage de n dans l'arbre.
- En fait un inverse de Fibonacci.
- Aussi calculable en itérant G sur n jusqu'à atteindre 1.

- Une fonction *flip* qui renverse un étage de l'arbre: $\mathit{flip}(1+F_k), ..., \mathit{flip}(F_{k+1}) = F_{k+1}, ..., 1+F_k$.
- Def: $\mathit{flip}(n) = \mathit{if}\ \ n \leq 1\ \mathit{then}\ n\ \mathit{else}\ 1 + F(1 + \mathit{depth}(n)) - n$.

- Def: $\overline{G}(n) = \mathit{flip}(G(\mathit{flip}(n)))$
- Et on montre que ce $\overline{G}$ valide la formule
- En Coq: `FlipG.v`

Autre résultat principal

Def: n est de rang 1-impair si sa décomposition canonique commence par $F_1 + F_{2p+1} + \ldots$.

Thm: $\overline{G}(n) = 1 + G(n)$ si n est de rang 1-impair, sinon $\overline{G}(n) = G(n)$.

Autre résultat principal

Def: n est de rang 1-impair si sa décomposition canonique commence par $F_1 + F_{2p+1} + ...$

Thm: $\overline{G}(n) = 1 + G(n)$ si n est de rang 1-impair, sinon $\overline{G}(n) = G(n)$.

Preuve: encore pire que la précédente, pléthore de cas.

Cor: $\overline{G}$ et G diffèrent pour $7 = F_1 + F_3$, puis tous les 5 ou 8 entiers.

Dérivées

Def: $\Delta G(n) = G(n+1) - G(n)$.
Prop: $\Delta G(n+1) = 1 - \Delta G(n).\Delta G(G(n))$.

Def: $\Delta\overline{G}(n) = \overline{G}(n+1) - \overline{G}(n)$.
Prop: $\Delta\overline{G}(n+1) = 1 - \Delta\overline{G}(n).\Delta\overline{G}(\overline{G}(n+1))$ (pour n$>$2).

Equation alternative

Anciens essais: pour n>3, $\overline{G}(n-1)+\overline{G}(\overline{G}(n))=n$

Mais ceci ne caractérise pas une unique fonction (sauf à exiger qu'elle soit monotone).

Généralisation

$(k+1)$ appels récursifs imbriqués au lieu de 2 :

Généralisation

$(k+1)$ appels récursifs imbriqués au lieu de 2 :

$$f_k(n) = n - f_k^{(k+1)}(n-1) \qquad\qquad \text{(pour } n > 0\text{)}$$
$$f_k(0) = 0$$

Généralisation

$(k+1)$ appels récursifs imbriqués au lieu de 2 :

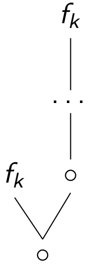
$$f_k(n) = n - f_k^{(k+1)}(n-1) \qquad \text{(pour } n > 0\text{)}$$
$$f_k(0) = 0$$

- $f_1 = G$
- $f_2 = H$ (aussi mentionné par Hofstadter)
- $f_0(n) = n - f_0(n-1)$: division par 2

Arbre généralisé

On allonge la branche de droite ($k+1$ segments)

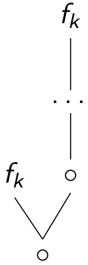
$f_k \quad =$



Arbre généralisé

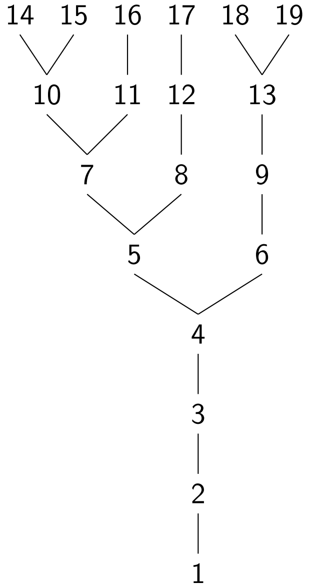
On allonge la branche de droite ($k + 1$ segments)

$f_k \quad =$

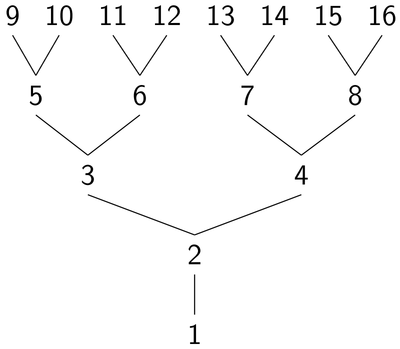


Et toujours une racine ad-hoc (1 puis $k + 1$ segments)

Arbre pour f_2 (H de Hofstadter)



Arbre pour f_0



Fibonacci généralisé

Soit k fixé.

$$
\begin{aligned}
A_0^k &= 1 \\
A_1^k &= 2 \\
\dots \\
A_k^k &= k + 1 \\
A_{n+1}^k &= A_n^k + A_{n-k}^k && \text{(pour } n \geq k\text{)}
\end{aligned}
$$

Fibonacci généralisé

- A^0 : 1 2 4 8 16 32 64 128 256 512
- A^1 : 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89
- A^2 : 1 2 3 4 6 9 13 19 28 41
- A^3 : 1 2 3 4 5 7 10 14 19 26

NB: A^2 est nommé Narayana's Cows, cf. OEIS A930

Zeckendorf généralisé

Soit k fixé.

k-décomposition $n = \Sigma A_i^k$ *canonique* : indices distants $\geq (k+1)$
k-décomposition *relachée* : indices distants d'au moins k

Zeckendorf généralisé

Soit k fixé.

k-décomposition $n = \Sigma A_i^k$ *canonique* : indices distants $\geq (k+1)$
k-décomposition *relachée* : indices distants d'au moins k

Thm: tout entier naturel a une unique k-décomposition canonique.
Algo: on peut "renormaliser" une k-décomposition relachée.

Etude de f_k

Les propriétés de G se généralisent plutôt bien à f_k:

- $f_k(n + f_k^{(k)}(n)) = n$
- $f_k(n) + f_k^{(k)}(f_k(n+1) - 1) = n$
- $f_k(\Sigma A_i^k) = \Sigma A_{i-1}^k$
- ...

Etude de f_k

Les propriétés de G se généralisent plutôt bien à f_k:

- $f_k(n + f_k^{(k)}(n)) = n$
- $f_k(n) + f_k^{(k)}(f_k(n+1) - 1) = n$
- $f_k(\Sigma A_i^k) = \Sigma A_{i-1}^k$
- $\ldots$

Preuves Coq toutes fraîches, un peu de sport avec $f_k^{(k)}$

Etude de f_k

Les propriétés de G se généralisent plutôt bien à f_k:

- $f_k(n + f_k^{(k)}(n)) = n$
- $f_k(n) + f_k^{(k)}(f_k(n+1) - 1) = n$
- $f_k(\Sigma A_i^k) = \Sigma A_{i-1}^k$
- ...

Preuves Coq toutes fraîches, un peu de sport avec $f_k^{(k)}$

Par contre:

- $f_k(n)$ n'est **pas** $\lfloor (n+1)/\alpha_k \rfloor$ avec α_k racine réelle positive de $X^{k+1} - X^k - 1$.

Etude de $\overline{f}_k$

Prouvé cette semaine, quasiment comme pour $\overline{G}$:

$$
\begin{aligned}
\overline{f}_k(n) &= n + 1 - \overline{f}_k^{(k)}(\overline{f}_k(n-1)+1) && (n > k+2)\\
\overline{f}_k(n) &= n && (n = 0, 1)\\
\overline{k}_k(n) &= n - 1 && (2 \leq n \leq k+2)
\end{aligned}
$$

Etude de $\overline{f}_k$

Prouvé cette semaine, quasiment comme pour $\overline{G}$:

$$\overline{f}_k(n) = n + 1 - \overline{f}_k^{(k)}(\overline{f}_k(n-1)+1) \qquad (n > k+2)$$
$$\overline{f}_k(n) = n \qquad (n = 0, 1)$$
$$\overline{k}_k(n) = n - 1 \qquad (2 \leq n \leq k+2)$$

Différences entre $\overline{f}_k$ et f_k : TODO

Comparaison des f_k quand k varie ?

- Conjecture: $f_k(n) \leq f_{k+1}(n)$ pour tout n et k
- Preuve ???

Comparaison des f_k quand k varie ?

- Conjecture: $f_k(n) \leq f_{k+1}(n)$ pour tout n et k
- Preuve ???

Pour établir ces comparaisons au moins pour n assez grand:

- Conjecture: $f_k(n) - n/\alpha_k$ borné quand n varie
- Ou au moins $f_k(n) \sim n/\alpha_k$ quand $n \to \infty$?
- Preuve ???

Entiers de rang 0

Une piste pour la comparaison des f_k :
f_k est "plate" en n lorsque $\mathrm{rang}_k(n) = 0$
Bref lorsque n a un 1 dans sa k-décomposition

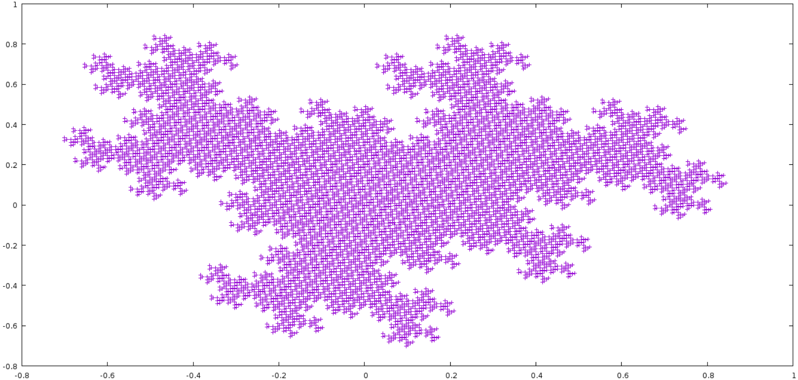
Tableau de Wythoff / Zeckendorf (k=1)

Colonne c: les nombres de rang c par ordre croissant

1	2	3	5	8	13	21	...
4	7	11	18	29	47	76	...
6	10	16	26	42	68	110	...
9	15	24	39	63	102	...	...
12	20	32	52	84	...	...	...
14	23	37	60	97	...	...	...
17	28	45	73	118	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...

Surprise

Affichage des points $(\delta(i), \delta(f_2(i)))$ avec i=0..10000 et $\delta(n) = f_2(n) - n/\alpha_2$



Conclusions & Perspectives

- On trouve encore des conjectures “abordables” sur OEIS
- Et aussi parfois des petites choses fausses. . .

Conclusions & Perspectives

- On trouve encore des conjectures “abordables” sur OEIS
- Et aussi parfois des petites choses fausses. . .
- Des preuves étonnemment délicates pour de “simples” entiers.
- Merci Coq.
- Preuves papier plus directes ?
- Preuves Coq moins pédestres (quasi 7000 lignes en tout) ?

Conclusions & Perspectives

- On trouve encore des conjectures “abordables” sur OEIS
- Et aussi parfois des petites choses fausses. . .
- Des preuves étonnemment délicates pour de “simples” entiers.
- Merci Coq.
- Preuves papier plus directes ?
- Preuves Coq moins pédestres (quasi 7000 lignes en tout) ?
- Quid des conjectures ?
- Quid de cette fractale ?
- Longue réponse d’Hofstadter par mail à étudier