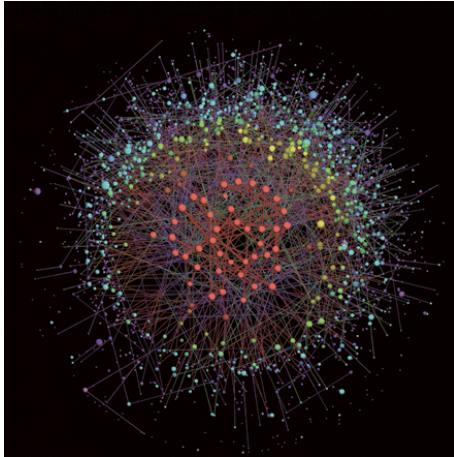


PHÉNOMÈNE DE CUTOFF POUR DES
MARCHES ALÉATOIRES SUR DES
GRAPHS ALÉATOIRES

Anna Ben-Hamou et Justin Salez

Université Paris Diderot, LPMA

Séminaire de Combinatoire de Paris Diderot
12 mai 2016



PLAN DE L'EXPOSÉ

- ▶ Brève introduction au temps de mélange et au phénomène de cutoff ;
- ▶ La marche non-reculante sur des graphes aléatoires à degrés prescrits (modèle de configuration) ;
- ▶ Résultat et commentaires ;
- ▶ Principe de la preuve ;
- ▶ Comparaison avec la marche simple.

LE TEMPS DE MÉLANGE

- ▶ Chaîne de Markov sur un espace d'états fini Ω , de matrice de transition P , irréductible et apériodique.
- ▶ Unique probabilité stationnaire π donnée par $\pi P = \pi$,
et

$$\forall (x, y) \in \Omega^2, P^t(x, y) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \pi(y).$$

- ▶ A quelle vitesse ?
- ▶ **Distance en variation totale**

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_x(t) &= \max_{A \subset \Omega} \left(P^t(x, A) - \pi(A) \right) \\ \mathcal{D}(t) &= \max_{x \in \Omega} \mathcal{D}_x(t). \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}(t) = \max_{x \in \Omega} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{y \in \Omega} \left| P^t(x, y) - \pi(y) \right| \right\}.$$

- ▶ $\mathcal{D}(t) \in [0, 1]$, décroît vers 0, et on a

$$\mathcal{D}(t)^{\frac{1}{t}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \lambda_{\star}$$

où $\lambda_{\star} = \max\{|\lambda|, \lambda \text{ valeur propre de } P, \lambda \neq 1\}$.

- ▶ Asymptotiquement, $\mathcal{D}(t)$ décroît exponentiellement avec taux $1 - \lambda_{\star}$, le **trou spectral**.

- ▶ Espace d'état Ω_n , avec (généralement) $n = |\Omega_n|$.
- ▶ On se fixe une cible $0 < \varepsilon < 1$.
- ▶ On définit

$$t_{\text{MIX}}^{(n)}(\varepsilon) = \min \{t \geq 0, \mathcal{D}_n(t) \leq \varepsilon\} .$$

- ▶ On s'intéresse au comportement asymptotique de $t_{\text{MIX}}^{(n)}(\varepsilon)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

LES TRANSPOSITIONS ALÉATOIRES

- ▶ Diaconis-Shahshahani, 1981
- ▶ $\Omega = \mathfrak{S}_n$
- ▶ $P =$ tirer deux cartes au hasard et échanger leur position.
- ▶ Pour tout ε de $]0, 1[$,

$$\frac{t_{\text{MIX}}(\varepsilon)}{\frac{1}{2}n \log n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

- ▶ ε n'intervient pas au premier ordre :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{D} \left(\frac{c}{2} n \log n \right) = \begin{cases} 1 & \text{si } c < 1, \\ 0 & \text{si } c > 1. \end{cases}$$

- ▶ Au deuxième ordre,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{D} \left(\frac{1}{2} n \log n + \lambda n \right) \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{quand } \lambda \rightarrow -\infty, \\ 0 & \text{quand } \lambda \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

LE CUTOFF

DEFINITION

On dit qu'il y a cutoff quand, pour tout ε de $]0, 1[$,

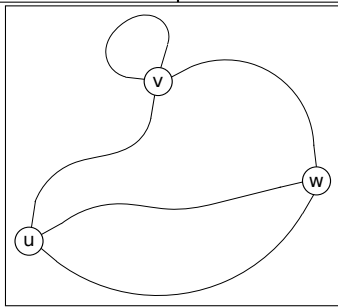
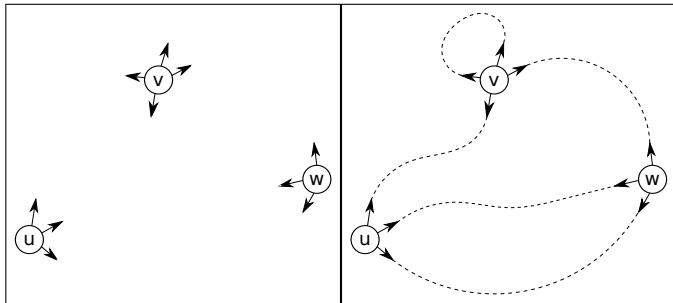
$$\frac{t_{\text{MIX}}(1 - \varepsilon)}{t_{\text{MIX}}(\varepsilon)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1.$$

- ▶ Chute abrupte de 1 à 0, en une période de temps négligeable appelée la **fenêtre du cutoff**.

LE CUTOFF

- ▶ Transpositions aléatoires (Diaconis, Shahshahani, 1981).
- ▶ Marche aléatoire sur $\{0, 1\}^n$ (Aldous, 1983).
- ▶ Sur des groupes finis (Saloff-Coste, 2004).
- ▶ Sur les graphes aléatoires d -réguliers (Lubetzky, Sly, 2010).
- ▶ Sur les graphes Ramanujan (Lubetzky, Peres, 2015).
- ▶ Sur les graphes aléatoires à degrés prescrits (Berestycki, Lubetzky, Peres, Sly, 2015 et B., Salez, 2015).
- ▶ Sur des graphes dirigés à degrés prescrits (Bordenave, Caputo, Salez, 2015).

LE MODÈLE DE CONFIGURATION



LE MODÈLE DE CONFIGURATION

- ▶ Ensemble fini V de sommets.
- ▶ Chaque v est muni de $\deg(v)$ *demi-arêtes*.

$$N = \sum_{v \in V} \deg(v).$$

- ▶ \mathcal{X} = ensemble des demi-arêtes, $|\mathcal{X}| = N$.

$$\mathcal{X} = \{(v, i) : v \in V, 1 \leq i \leq \deg(v)\}.$$

- ▶ Modèle de configuration : on choisit uniformément au hasard un **appariement** π de \mathcal{X} .
- ▶ $\{x, \pi(x)\}$ = arête entre les sommets correspondants.

LA MARCHE ALÉATOIRE NON-RECVLANTE

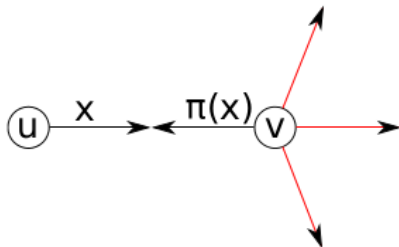


FIGURE 2 : Les sauts possibles depuis x sont en rouge.

LA MARCHÉ ALÉATOIRE NON-RECLANTE

- ▶ Chaîne de Markov sur \mathcal{X} , avec matrice de transition

$$P(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\deg(\pi(x))} & \text{si } y \text{ est voisine de } \pi(x) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- ▶ Deux demi-arêtes $x = (u, i)$ et $y = (v, j)$ sont **voisines** si $u = v$ et $i \neq j$, et le **degré** de $x = (u, i)$ est

$$\deg(x) = \deg(u) - 1.$$

- ▶ La matrice P est symétrique par rapport à π :

$$P(\pi(y), \pi(x)) = P(x, y).$$

- ▶ Distribution stationnaire : **uniforme** sur \mathcal{X} .
- ▶ Décrire le profil typique de

$$\mathcal{D}(t) = \max_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{y \in \mathcal{X}} \left| P^t(x, y) - \frac{1}{N} \right| \right\}.$$

- ▶ Soit $Z \sim \text{deg}(X)$, où $X \sim \text{Unif}(\mathcal{X})$.
- ▶ Le profil typique de $\mathcal{D}(t)$ ne dépend des degrés qu'à travers deux statistiques simples :
 - ▶ le degré logarithmique moyen d'une demi-arête :

$$\mu = \mathbb{E} \log Z = \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathcal{X}} \log \text{deg}(x)$$

- ▶ et la variance correspondante :

$$\sigma^2 = \text{Var} \log Z = \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathcal{X}} \{\log \text{deg}(x) - \mu\}^2 .$$

On pose : $t_\star = \frac{\log N}{\mu}$ et $\omega_\star = \sqrt{\frac{\sigma^2 \log N}{\mu^3}}$.

THÉORÈME

Pour tout ε de $]0, 1[$,

$$\frac{t_{\text{MIX}}(\varepsilon) - t_\star}{\omega_\star} \xrightarrow{\mathbb{P}} \Phi^{-1}(\varepsilon).$$

De façon équivalente, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $t = t_\star + \lambda\omega_\star + o(\omega_\star)$,

$$\mathcal{D}(t) \xrightarrow{\mathbb{P}} \Phi(\lambda).$$

HYPOTHÈSES

- ▶ $\Delta = \max_{v \in V} \deg(v) = N^{o(1)}$,
- ▶ $\min_{v \in V} \deg(v) \geq 3$.
- ▶ Conditions de moments :

$$\frac{\sigma^2}{\mu^3} \gg \frac{(\log \log N)^2}{\log N} \text{ et } \frac{\sigma^3}{\varrho \sqrt{\mu}} \gg \frac{1}{\sqrt{\log N}},$$

où

$$\varrho = \mathbb{E} \left[\left| \log Z - \mu \right|^3 \right].$$

- ▶ **Le cas d -régulier** : Lubetzky and Sly (2010).
- ▶ Cutoff en $\frac{\log N}{\log(d-1)}$ avec fenêtre d'ordre constant.
- ▶ D'après Jensen,

$$t_{\star} = \frac{\log N}{\mathbb{E} \log Z} \geq \frac{\log N}{\log \mathbb{E} Z}.$$

- ▶ $\frac{\log N}{\log \mathbb{E} Z}$: distance typique (et diamètre) dans G .
- ▶ Impact sur la fenêtre : fluctuations gaussiennes des degrés le long d'une trajectoire typique.

IDÉE DE PREUVE

- ▶ Pour un point de départ x fixé,

$$\mathcal{D}_x(t) = \sum_{y \in \mathcal{X}} \left(\frac{1}{N} - P^t(x, y) \right)_+.$$

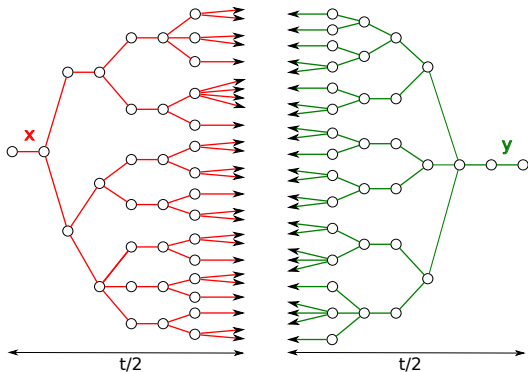
- ▶ Montrer que, pour $t = t_\star + \lambda\omega_\star + o(\omega_\star)$,

$$NP^t(x, y) \approx 1 - \Phi(\lambda),$$

avec probabilité $1 - o\left(\frac{1}{N^2}\right)$.

- ▶ D'après la propriété de symétrie,

$$P^t(x, y) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}} P^{t/2}(x, i) P^{t/2}(\pi(y), j) \mathbb{1}_{\{\pi(i)=j\}}.$$



- Poids d'un chemin :

$$\mathbf{w}(i) = P^{t/2}(x, i) = \prod_{z \in \mathcal{P}_{x,i}} \frac{1}{\deg(z)} .$$

- Représentation-clé :

$$P^t(x, y) = \sum_{i,j} \mathbf{w}(i) \mathbf{w}(j) \mathbb{1}_{\{\pi(i)=j\}} .$$

$$P^t(x, y) = \sum_{i,j} \mathbf{w}(i)\mathbf{w}(j) \mathbb{1}_{\{\pi(i)=j\}} \cdot$$

- ▶ Somme pondérée de variables $\mathcal{B}(1/N)$ faiblement dépendantes.
- ▶ Mélange \leftrightarrow Concentration de $NP^t(x, y)$ autour de 1.
- ▶ Eliminer les chemins au grand poids :

$$P^t(x, y) \geq \sum_{i,j} \mathbf{w}(i)\mathbf{w}(j) \mathbb{1}_{\mathbf{w}(i)\mathbf{w}(j) \leq \theta/N} \mathbb{1}_{\{\pi(i)=j\}} \cdot$$

- ▶ Concentration exponentielle par la méthode de Stein :

$$NP^t(x, y) \approx \sum_{i,j} \mathbf{w}(i)\mathbf{w}(j) \mathbb{1}_{\mathbf{w}(i)\mathbf{w}(j) \leq \theta/N} \cdot$$

$$1 - NP^t(x, \pi(y)) \approx \sum_{i,j} \mathbf{w}(i)\mathbf{w}(j) \mathbb{1}_{\mathbf{w}(i)\mathbf{w}(j) > \theta/N}.$$

PROPOSITION

On prend $t = t_\star + \lambda\omega_\star + o(\omega_\star)$. Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P} \left(\sum_{i,j} \mathbf{w}(i)\mathbf{w}(j) \mathbb{1}_{\mathbf{w}(i)\mathbf{w}(j) > \theta/N} > \Phi(\lambda) + \varepsilon \right) = o\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

- ▶ $\sum_{i,j} \mathbf{w}(i)\mathbf{w}(j) \mathbb{1}_{\mathbf{w}(i)\mathbf{w}(j) > \theta/N}$: probabilité « quenched ».
- ▶ Version « annealed » : génération séquentielle et simultanée de G et X .
- ▶ Couplage avec (Z_1, \dots, Z_t) I.I.D.

$$\begin{aligned}
 1 - NP^t(x, \pi(y)) &\approx \mathbb{P}\left(\frac{1}{Z_1} \cdots \frac{1}{Z_t} > \frac{\theta}{N}\right) \\
 &\approx \Phi(\lambda),
 \end{aligned}$$

pour $t = t_\star + \lambda\omega_\star + o(\omega_\star)$.

COMPARAISON AVEC LA MARCHÉ SIMPLE

- ▶ Berestycki, Lubetzky, Peres, Sly (2015).
- ▶ Soit $G \sim \mathcal{G}(n, (d_i)_{i=1}^n)$.
- ▶ $\mathcal{D}_x(t)$: distance pour la marche simple partie de x .

THÉORÈME

Sous certaines conditions de degrés, pour tout $x \in V$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\gamma > 0$ tel que, avec forte probabilité,

$$\mathcal{D}_x \left(\frac{\log n}{\mathbf{h}} - \gamma \sqrt{\log n} \right) > 1 - \varepsilon,$$

et

$$\mathcal{D}_x \left(\frac{\log n}{\mathbf{h}} + \gamma \sqrt{\log n} \right) < \varepsilon.$$

- ▶ La marche non-reculante mélange-t-elle plus vite que la marche simple ?
- ▶ A-t-on $\mathbf{h} \leq \mu$?
- ▶ Vrai dans le cas d -régulier :

$$t_{\text{MIX}}^{\text{nr}}(\varepsilon) \sim \frac{\log n}{\log(d-1)} \quad \text{et} \quad t_{\text{MIX}}^{\text{s}}(\varepsilon) \sim \frac{d}{d-2} \cdot \frac{\log n}{\log(d-1)}.$$

PROPOSITION (B., LUBETZKY, PERES)

Si $Z \geq 2$, alors $\mathbf{h} \leq \mu$.

ENTROPIES SUR DES ARBRES DE GALTON-WATSON

- ▶ Soit (T, ρ) un arbre de Galton-Watson, de loi de reproduction Z , enraciné en ρ .
- ▶ (X_t) marche simple sur T avec $X_0 = \rho$.
- ▶ (Y_t) marche non-reculante sur T avec $Y_0 = \rho$.

$$H_t^X(T, \rho) = \sum_{x \in T} \mathbb{P}_\rho(X_t = x) \log \frac{1}{\mathbb{P}_\rho(X_t = x)},$$

$$H_t^Y(T, \rho) = \sum_{x \in T} \mathbb{P}_\rho(Y_t = x) \log \frac{1}{\mathbb{P}_\rho(Y_t = x)}.$$

$$\mathbf{h} \stackrel{p.s.}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} H_t^X(T, \rho) \quad \mu \stackrel{p.s.}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} H_t^Y(T, \rho).$$

En notant $h_t^X = \mathbb{E} [H_t^X(T, \rho)]$ et $h_t^Y = \mathbb{E} [H_t^Y(T, \rho)]$, on a aussi

$$\mathbf{h} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h_t^X}{t} \quad \text{et} \quad \mu = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h_t^Y}{t}.$$

- ▶ En particulier, les deux marches mélangent quand leur entropie atteint $\log n$.
- ▶ Etude des suites (h_t^X) et (h_t^Y) .