

# Polynômes de Jack et cartes non orientables à niveaux

Houcine Ben Dali

Université de Lorraine, CNRS, IECL, France

Université de Paris Cité, CNRS, IRIF, France



travail en collaboration avec

Maciej Dołęga

Institute of Mathematics,

Polish Academy of Sciences, Poland.

arXiv:2305.07966

Journée cartes, IRIF

28 Juin 2023

# Fonctions symétriques:

On dit que  $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s]$  est une **partition** de  $n$  si  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_s > 0$  et  $\lambda_1 + \dots + \lambda_s = n$ . L'entier  $s$  est **la longueur** de  $\lambda$  et sera noté  $\ell(\lambda)$ .

# Fonctions symétriques:

On dit que  $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s]$  est une **partition** de  $n$  si  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_s > 0$  et  $\lambda_1 + \dots + \lambda_s = n$ . L'entier  $s$  est **la longueur** de  $\lambda$  et sera noté  $\ell(\lambda)$ .

On considère l'espace des fonctions symétriques en  $x_1, x_2, \dots$ .

# Fonctions symétriques:

On dit que  $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s]$  est une **partition** de  $n$  si  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_s > 0$  et  $\lambda_1 + \dots + \lambda_s = n$ . L'entier  $s$  est **la longueur** de  $\lambda$  et sera noté  $\ell(\lambda)$ .

On considère l'espace des fonctions symétriques en  $x_1, x_2, \dots$ .

Cet espace admet plusieurs bases.

① Base monomiale:

$$m_\lambda := \sum_{\beta \text{ réordonnement de } \lambda} \sum_{i_1 < \dots < i_s} x_{i_1}^{\beta_1} \cdots x_{i_s}^{\beta_s}$$

## Exemple

$$m_{[1,1]} := \sum_{i < j} x_i x_j, \quad m_{[2,1]} := \sum_{i \neq j} x_i^2 x_j$$

# Fonctions symétriques:

On dit que  $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s]$  est une **partition** de  $n$  si  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_s > 0$  et  $\lambda_1 + \dots + \lambda_s = n$ . L'entier  $s$  est **la longueur** de  $\lambda$  et sera noté  $\ell(\lambda)$ .

On considère l'espace des fonctions symétriques en  $x_1, x_2, \dots$ .

Cet espace admet plusieurs bases.

- ① Base monomiale:

$$m_\lambda := \sum_{\beta \text{ réordonnement de } \lambda} \sum_{i_1 < \dots < i_s} x_{i_1}^{\beta_1} \cdots x_{i_s}^{\beta_s}$$

## Exemple

$$m_{[1,1]} := \sum_{i < j} x_i x_j, \quad m_{[2,1]} := \sum_{i \neq j} x_i^2 x_j$$

- ② Base des sommes de puissances: Si  $k \geq 1$   $p_k := \sum_{i \geq 1} x_i^k$  et  $p_\lambda := p_{\lambda_1} \dots p_{\lambda_s}$ .

## Exemple

$$p_{[1,1]} = p_1^2 = \sum_{i,j \geq 1} x_i x_j, \quad p_2 = \sum_{i \geq 1} x_i^2.$$

# Fonctions symétriques

- ③ Fonctions de Schur  $s_\lambda$ , peuvent être définies avec des formules déterminants, avec des tableaux de Young, ou en utilisant les caractères du groupe symétrique

$$s_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} \frac{\chi^\lambda(\mu)}{z_\mu} p_\mu,$$

- où
- ▶  $\chi^\lambda$  : le caractère de  $\mathfrak{S}_n$  associé à  $\lambda$ .
  - ▶  $z_\mu := \prod_{i \geq 1} i^{m_i} m_i!$ , avec  $\mu = 1^{m_1} 2^{m_2} \dots$

# Fonctions symétriques

- ③ Fonctions de Schur  $s_\lambda$ , peuvent être définies avec des formules déterminants, avec des tableaux de Young, ou en utilisant les caractères du groupe symétrique

$$s_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} \frac{\chi^\lambda(\mu)}{z_\mu} p_\mu,$$

- où
- ▶  $\chi^\lambda$  : le caractère de  $\mathfrak{S}_n$  associé à  $\lambda$ .
  - ▶  $z_\mu := \prod_{i \geq 1} i^{m_i} m_i!$ , avec  $\mu = 1^{m_1} 2^{m_2} \dots$
- ④ Les polynômes de Jack  $J_\lambda^{(1+b)}$  : c'est une famille de fonctions symétriques, qui dépendent d'un paramètre  $b$  et qui satisfont :
- ▶ une condition de triangularité par rapport à la base monomiale.
  - ▶ une condition d'orthogonalité par rapport à un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_b$  dépendant de  $b$ .

Pour  $b = 0$ , les polynômes de Jack correspondent aux **fonctions de Schur**.

# Cartes

- Une *carte connexe* est la donnée d'un plongement cellulaire d'un graphe connexe dans une surface connexe compacte sans bord **orientable ou pas**, considérée à homéomorphisme près.
- Une carte est une collection de cartes connexes.



# Cartes

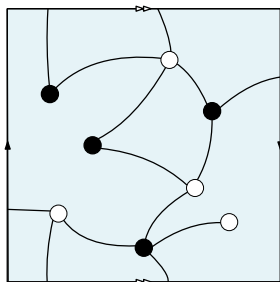
- Une *carte connexe* est la donnée d'un plongement cellulaire d'un graphe connexe dans une surface connexe compacte sans bord **orientable ou pas**, considérée à homéomorphisme près.
- Une carte est une collection de cartes connexes.
- On dit que la carte est **orientable** si toutes ses composantes connexes sont plongées sur des surfaces orientables.

# Cartes

- Une *carte connexe* est la donnée d'un plongement cellulaire d'un graphe connexe dans une surface connexe compacte sans bord **orientable ou pas**, considérée à homéomorphisme près.
- Une carte est une collection de cartes connexes.
- On dit que la carte est **orientable** si toutes ses composantes connexes sont plongées sur des surfaces orientables.
- On considère ici des cartes **biparties**; les sommets sont coloriés en noir et blanc et toute arête lie deux sommets de couleurs différentes.

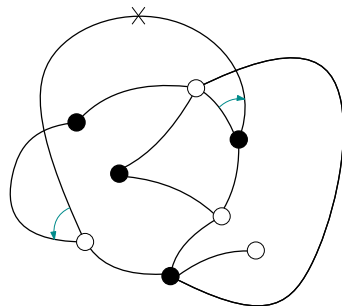
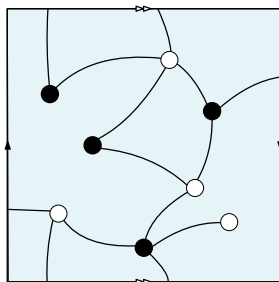
# Cartes

Exemple : Une carte non-orientable sur la bouteille de Klein.



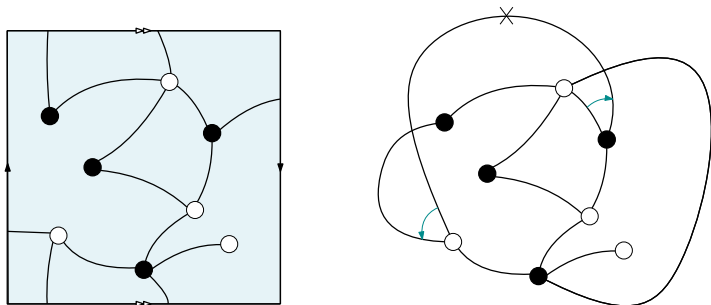
# Cartes

Exemple : Une carte non-orientable sur la bouteille de Klein.



# Cartes

Exemple : Une carte non-orientable sur la bouteille de Klein.



## Remarque

Afin d'énumérer des cartes avec un groupe d'automorphisme trivial, on considère des cartes **étiquetées**.

# Cartes

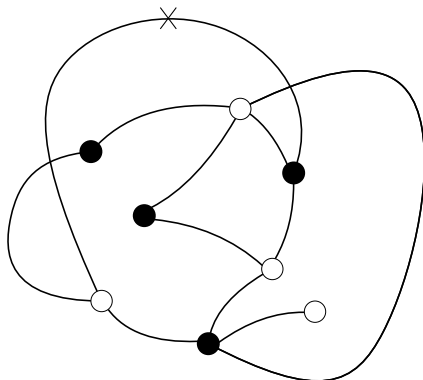
- La **taille** d'une carte  $M$  est le nombre de ses arêtes, et sera noté  $|M|$ .

# Cartes

- La **taille** d'une carte  $M$  est le nombre de ses arêtes, et sera noté  $|M|$ .
- Le **type de face** d'une carte bipartie  $M$ , noté  $\diamond(M)$ , est la partition obtenue en divisant les degrés des faces de  $M$  par 2.

# Cartes

- La **taille** d'une carte  $M$  est le nombre de ses arêtes, et sera noté  $|M|$ .
- Le **type de face** d'une carte bipartie  $M$ , noté  $\diamond(M)$ , est la partition obtenue en divisant les degrés des faces de  $M$  par 2.



Une carte non-orientable de type de face  $[7, 2, 2]$ .



# Cartes

- La **taille** d'une carte  $M$  est le nombre de ses arêtes, et sera noté  $|M|$ .
- Le **type de face** d'une carte bipartie  $M$ , noté  $\diamond(M)$ , est la partition obtenue en divisant les degrés des faces de  $M$  par 2.
- Le **type de sommets blancs** (resp. **type de sommets noirs**) de  $M$  est la partition  $\circ(M)$  (resp.  $\bullet(M)$ ) obtenue en réordonnant les degrés des sommets blancs (resp. sommets noirs) de  $M$ .

# Cartes

- La **taille** d'une carte  $M$  est le nombre de ses arêtes, et sera noté  $|M|$ .
- Le **type de face** d'une carte bipartie  $M$ , noté  $\diamond(M)$ , est la partition obtenue en divisant les degrés des faces de  $M$  par 2.
- Le **type de sommets blancs** (resp. **type de sommets noirs**) de  $M$  est la partition  $\circ(M)$  (resp.  $\bullet(M)$ ) obtenue en réordonnant les degrés des sommets blancs (resp. sommets noirs) de  $M$ .
- Le triplet de partitions  $(\diamond(M), \circ(M), \bullet(M))$  s'appelle **le profil** de  $M$ .

# Cartes

- La **taille** d'une carte  $M$  est le nombre de ses arêtes, et sera noté  $|M|$ .
- Le **type de face** d'une carte bipartie  $M$ , noté  $\diamond(M)$ , est la partition obtenue en divisant les degrés des faces de  $M$  par 2.
- Le **type de sommets blancs** (resp. **type de sommets noirs**) de  $M$  est la partition  $\circ(M)$  (resp.  $\bullet(M)$ ) obtenue en réordonnant les degrés des sommets blancs (resp. sommets noirs) de  $M$ .
- Le triplet de partitions  $(\diamond(M), \circ(M), \bullet(M))$  s'appelle **le profil** de  $M$ .
- on associe
  - ▶ à une arête un poids  $t$ .
  - ▶ à une face de degré  $i$  un poids  $p_i$ .
  - ▶ à un sommet blanc de degré  $i$  un poids  $q_i$ .
  - ▶ à un sommet noir de degré  $i$  un poids  $r_i$ .

où  $p_i$ ,  $q_i$  et  $r_i$  sont des fonctions sommes de puissances dans trois alphabets différents.

# Cartes

- La **taille** d'une carte  $M$  est le nombre de ses arêtes, et sera noté  $|M|$ .
- Le **type de face** d'une carte bipartie  $M$ , noté  $\diamond(M)$ , est la partition obtenue en divisant les degrés des faces de  $M$  par 2.
- Le **type de sommets blancs** (resp. **type de sommets noirs**) de  $M$  est la partition  $\circ(M)$  (resp.  $\bullet(M)$ ) obtenue en réordonnant les degrés des sommets blancs (resp. sommets noirs) de  $M$ .
- Le triplet de partitions  $(\diamond(M), \circ(M), \bullet(M))$  s'appelle le **profil** de  $M$ .
- on associe
  - ▶ à une arête un poids  $t$ .
  - ▶ à une face de degré  $i$  un poids  $p_i$ .
  - ▶ à un sommet blanc de degré  $i$  un poids  $q_i$ .
  - ▶ à un sommet noir de degré  $i$  un poids  $r_i$ .

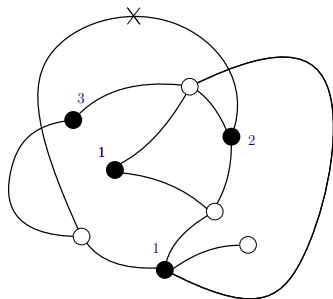
où  $p_i$ ,  $q_i$  et  $r_i$  sont des fonctions sommes de puissances dans trois alphabets différents.

→ Une carte  $M$  a un poids  $t^{|M|} p_{\diamond(M)} q_{\circ(M)} r_{\bullet(M)}$ .

# Cartes à niveaux

Soit  $k$  un entier positif. Une carte  $M$  est dite à  $k$  niveaux si

- chaque sommet noir a une valeur dans  $1, 2, \dots, k$ .

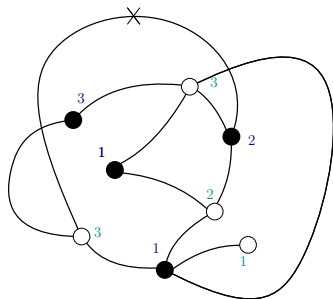


Une carte à 3 niveaux sur la bouteille de Klein

# Cartes à niveaux

Soit  $k$  un entier positif. Une carte  $M$  est dite à  $k$  niveaux si

- chaque sommet noir a une valeur dans  $1, 2, \dots, k$ .
- chaque sommet blanc porte la valeur maximale parmi celles de tous ses voisins noirs.



Une carte à 3 niveaux sur la bouteille de Klein

# Cartes à niveaux

Soit  $k$  un entier positif. Une carte  $M$  est dite à  $k$  niveaux si

- chaque sommet noir a une valeur dans  $1, 2, \dots, k$ .
- chaque sommet blanc porte la valeur maximale parmi celles de tous ses voisins noirs.

Les sommets de valeur  $i$  forment le niveau  $i$  de la carte.

# Cas orientable

## Théorème

$$\sum_{\theta} t^{|\theta|} H_{\theta} s_{\theta}(\mathbf{p}) s_{\theta}(\mathbf{q}) s_{\theta}(\mathbf{r}) = \sum_{\substack{M \text{ carte } \textit{orientable} \\ \textit{étiquetée}}} \frac{t^{|M|}}{|M|!} p_{\diamond(M)} q_{\circ(M)} r_{\bullet(M)}.$$



# Cas orientable

## Théorème

$$\sum_{\theta} t^{|\theta|} H_{\theta} s_{\theta}(\mathbf{p}) s_{\theta}(\mathbf{q}) s_{\theta}(\mathbf{r}) = \sum_{\substack{M \text{ carte } \textit{orientable} \\ \textit{étiquetée}}} \frac{t^{|M|}}{|M|!} p_{\diamond(M)} q_{\circ(M)} r_{\bullet(M)}.$$

# Cas orientable

## Théorème

$$\sum_{\theta} t^{|\theta|} H_{\theta} s_{\theta}(\mathbf{p}) s_{\theta}(\mathbf{q}) s_{\theta}(\mathbf{r}) = \sum_{\substack{M \text{ carte } \textit{orientable} \\ \textit{étiquetée}}} \frac{t^{|M|}}{|M|!} p_{\diamond(M)} q_{\circ(M)} r_{\bullet(M)}.$$

## Théorème (Formule de Stanley–Féray '10)

$$s_{\lambda}(\mathbf{p}) = \frac{1}{H_{\lambda}} \sum_{\substack{M \text{ carte } \textit{orientable} \\ \textit{à } \ell(\lambda) \textit{ niveaux } \textit{étiquetée}}} \frac{(-1)^{|\lambda|}}{z_{\diamond(M)}} p_{\diamond(M)} \prod_{1 \leq i \leq \ell(\lambda)} (-\lambda_i)^{|\mathcal{V}_{\circ}^{(i)}(M)|},$$

où  $|\mathcal{V}_{\circ}^{(i)}(M)|$  est le nombre de sommets blancs dans le niveau  $i$ .

# Cas orientable

## Théorème

$$\sum_{\theta} t^{|\theta|} H_{\theta} s_{\theta}(\mathbf{p}) s_{\theta}(\mathbf{q}) s_{\theta}(\mathbf{r}) = \sum_{\substack{M \text{ carte } \textit{orientable} \\ \textit{étiquetée}}} \frac{t^{|M|}}{|M|!} p_{\diamond(M)} q_{\circ(M)} r_{\bullet(M)}.$$

## Théorème (Formule de Stanley–Féray '10)

$$s_{\lambda}(\mathbf{p}) = \frac{1}{H_{\lambda}} \sum_{\substack{M \text{ carte } \textit{orientable} \\ \textit{à } \ell(\lambda) \text{ niveaux } \textit{étiquetée}}} \frac{(-1)^{|\lambda|}}{z_{\diamond(M)}} p_{\diamond(M)} \prod_{1 \leq i \leq \ell(\lambda)} (-\lambda_i)^{|\mathcal{V}_{\circ}^{(i)}(M)|},$$

où  $|\mathcal{V}_{\circ}^{(i)}(M)|$  est le nombre de sommets blancs dans le niveau  $i$ .

### Schéma des preuves :

- Bijection entre cartes orientables biparties de taille  $n$  et triplets de partitions de  $\mathfrak{S}_n$ .
- Outils de la théorie des représentations de  $\mathfrak{S}_n$  (formule de Frobenius, symétriseurs de Young).

# Cas non orientable

## Théorème (Goulden–Jackson '96)

$$\sum_{\theta} \frac{t^{|\theta|}}{H_{2\theta}} Z_{\theta}(\mathbf{p}) Z_{\theta}(\mathbf{q}) Z_{\theta}(\mathbf{r}) = \sum_{\substack{M \text{ carte} \\ \text{orientable ou pas} \\ \text{étiquetée}}} \frac{t^{|M|}}{|M|!} p_{\diamond(M)} q_{\circ(M)} r_{\bullet(M)}.$$

$Z_{\theta}$  : polynômes zonaux ; correspondent aux polynômes de Jack pour  $b = 1$ .

## Théorème (Féray–Śniady '11)

$$Z_{\lambda}(\mathbf{p}) = \sum_{\substack{M \text{ carte} \\ \text{orientable ou pas} \\ \text{à } \ell(\lambda) \text{ niveaux} \\ \text{étiquetée}}} \frac{(-1)^{|\lambda|}}{2^{\ell(\diamond(M))} z_{\diamond(M)}} p_{\diamond(M)} \prod_{1 \leq i \leq \ell(\lambda)} (-2\lambda_i)^{|\mathcal{V}_{\circ}^{(i)}(M)|}$$

### Schéma des preuves :

- Bijection entre cartes biparties de taille  $n$  et triplets de matchings parfaits sur un ensemble de taille de  $2n$ .
- Théorie des représentations de  $(\mathfrak{S}_{2n}, \mathfrak{B}_n)$ .

# Conjectures de $b$ -déformations

## Définition (Goulden–Jackson '96)

Une **statistique de non-orientabilité** sur les cartes est une statistique qui à chaque carte  $M$  associe un entier positif  $\vartheta(M)$  telle que  $\vartheta(M) = 0$  si et seulement si  $M$  est orientable.

# Conjectures de $b$ -déformations

## Définition (Goulden–Jackson '96)

Une **statistique de non-orientabilité** sur les cartes est une statistique qui à chaque carte  $M$  associe un entier positif  $\vartheta(M)$  telle que  $\vartheta(M) = 0$  si et seulement si  $M$  est orientable.

Toutes les cartes seront comptées avec un poids  $b^{\vartheta(M)}$ .

# Conjectures de $b$ -déformations

## Définition (Goulden–Jackson '96)

Une **statistique de non-orientabilité** sur les cartes est une statistique qui à chaque carte  $M$  associe un entier positif  $\vartheta(M)$  telle que  $\vartheta(M) = 0$  si et seulement si  $M$  est orientable.

Toutes les cartes seront comptées avec un poids  $b^{\vartheta(M)}$ .

- $b = 0 \longrightarrow$  cartes orientables.
- $b = 1 \longrightarrow$  cartes orientables ou pas.

# Conjectures de $b$ -déformations

## Définition (Goulden–Jackson '96)

Une **statistique de non-orientabilité** sur les cartes est une statistique qui à chaque carte  $M$  associe un entier positif  $\vartheta(M)$  telle que  $\vartheta(M) = 0$  si et seulement si  $M$  est orientable.

Toutes les cartes seront comptées avec un poids  $b^{\vartheta(M)}$ .

- $b = 0 \longrightarrow$  cartes orientables.
- $b = 1 \longrightarrow$  cartes orientables ou pas.

Deux types de conjectures de  $b$ -déformations:

- La série des cartes biparties avec  $b$ -poids en termes de polynômes de Jack (Goulden et Jackson '96).
- Un polynôme de Jack en terme de cartes à niveaux avec  $b$ -poids.  $\longleftarrow$   
deuxième partie de cet exposé.



# Conjectures de Goulden et Jackson

Les coefficients de connexion  $c_{\mu,\nu}^\lambda$  définis par

$$\sum_{\theta \in \mathbb{Y}} \frac{t^{|\theta|}}{j_\theta^{(1+b)}} J_\theta^{(1+b)}(\mathbf{p}) J_\theta^{(1+b)}(\mathbf{q}) J_\theta^{(1+b)}(\mathbf{r}) = \sum_{n \geq 0} t^n \sum_{\lambda, \mu, \nu \vdash n} \frac{c_{\mu,\nu}^\lambda(b)}{z_\lambda (1+b)^{\ell(\lambda)}} p_\lambda q_\mu r_\nu,$$

où  $j_\theta^{(1+b)} := \langle J_\theta^{(1+b)}, J_\theta^{(1+b)} \rangle_b$  est la norme quadratique du polynôme de Jack  $J_\theta^{(1+b)}$ .

## La conjecture Matchings-Jack (Goulden et Jackson '96)

Les coefficients  $c_{\mu,\nu}^\lambda$  sont des *polynômes* en  $b$  à coefficients *entiers positifs*. D'une manière équivalente, il existe une statistique de non orientabilité  $\vartheta$  sur les cartes étiquetées telle que

$$c_{\mu,\nu}^\lambda = \sum_{\substack{M \text{ carte étiquetée} \\ \text{de profil } (\lambda, \mu, \nu)}} b^{\vartheta(M)}.$$

# Conjectures de Goulden et Jackson

Les coefficients de connexion  $c_{\mu,\nu}^\lambda$  définis par

$$\sum_{\theta \in \mathbb{Y}} \frac{t^{|\theta|}}{j_\theta^{(1+b)}} J_\theta^{(1+b)}(\mathbf{p}) J_\theta^{(1+b)}(\mathbf{q}) J_\theta^{(1+b)}(\mathbf{r}) = \sum_{n \geq 0} t^n \sum_{\lambda, \mu, \nu \vdash n} \frac{c_{\mu,\nu}^\lambda(b)}{z_\lambda (1+b)^{\ell(\lambda)}} p_\lambda q_\mu r_\nu,$$

où  $j_\theta^{(1+b)} := \langle J_\theta^{(1+b)}, J_\theta^{(1+b)} \rangle_b$  est la norme quadratique du polynôme de Jack  $J_\theta^{(1+b)}$ .

## La conjecture Matchings-Jack (Goulden et Jackson '96)

Les coefficients  $c_{\mu,\nu}^\lambda$  sont des *polynômes* en  $b$  à coefficients *entiers positifs*. D'une manière équivalente, il existe une statistique de non orientabilité  $\vartheta$  sur les cartes étiquetées telle que

$$c_{\mu,\nu}^\lambda = \sum_{\substack{M \text{ carte étiquetée} \\ \text{de profil } (\lambda, \mu, \nu)}} b^{\vartheta(M)}.$$

## Remarque

La  $b$ -conjecture est une version "connexe" de la conjecture Matching-Jack.

# Les conjectures de Goulden et Jackson, quelques résultats partiels

## Théorème (Dołęga–Féray '16)

Les coefficients  $c_{\mu,\nu}^\lambda$  sont des *polynômes* en  $b$  à coefficients rationnels.

# Les conjectures de Goulden et Jackson, quelques résultats partiels

## Théorème (Dołęga–Féray '16)

Les coefficients  $c_{\mu,\nu}^\lambda$  sont des *polynômes* en  $b$  à coefficients rationnels.

## Théorème (Chapuy–Dołęga '22)

Il existe une statistique de non orientabilité pour laquelle de la  $b$ -conjecture est vérifiée avec la spécialisation  $r_i = u$  pour tout  $i \geq 1$ .

# Les conjectures de Goulden et Jackson, quelques résultats partiels

## Théorème (Dołęga–Féray '16)

Les coefficients  $c_{\mu,\nu}^\lambda$  sont des *polynômes* en  $b$  à coefficients rationnels.

## Théorème (Chapuy–Dołęga '22)

Il existe une statistique de non orientabilité pour laquelle de la  $b$ -conjecture est vérifiée avec la spécialisation  $r_i = u$  pour tout  $i \geq 1$ .

## Théorème (BD '23)

Les coefficients  $c_{\mu,\nu}^\lambda$  sont des polynômes en  $b$  à coefficients *entiers*.

# Les conjectures de Goulden et Jackson, quelques résultats partiels

## Théorème (Dołęga–Féray '16)

Les coefficients  $c_{\mu,\nu}^\lambda$  sont des *polynômes* en  $b$  à coefficients rationnels.

## Théorème (Chapuy–Dołęga '22)

Il existe une statistique de non orientabilité pour laquelle de la  $b$ -conjecture est vérifiée avec la spécialisation  $r_i = u$  pour tout  $i \geq 1$ .

## Théorème (BD '23)

Les coefficients  $c_{\mu,\nu}^\lambda$  sont des polynômes en  $b$  à coefficients *entiers*.

**Problème :** On ne connaît pas un candidat pour une statistique  $\vartheta$  qui satisfait la  $b$ -conjecture/la conjecture matching-Jack en toute généralité.

# Des conjectures duales

## Conjecture (Hanlon '89)

$J_{\lambda}^{(1+b)}$  a une interprétation en termes de cartes *orientables* avec des  $b$ -poids.

# Des conjectures duales

## Conjecture (Hanlon '89)

$J_\lambda^{(1+b)}$  a une interprétation en termes de cartes *orientables* avec des  $b$ -poids.

## Conjecture (Dołęga–Féray–Śniady '14)

$J_\lambda^{(1+b)}$  a une interprétation en termes de cartes *orientables ou pas* comptées avec des poids de non orientabilité, et munis d'applications vers des diagrammes de Young (cartes à niveaux).

Ils ont démontré cette conjecture pour des partitions  $\lambda$  de forme rectangulaire (cas de cartes avec 1 niveau).



# Polynômes de Jack comme séries de cartes à niveaux

## Théorème (B.D–Dołęga '23)

*Il existe une statistique de non orientabilité  $\vartheta$  explicite sur les cartes à niveaux telle que*

$$J_{\lambda}^{(1+b)}(\mathbf{p}) = \sum_{\substack{\text{cartes étiquetées} \\ M \text{ à } \ell(\lambda) \text{ niveaux}}} \frac{(-1)^{|\lambda|} p_{\diamond(M)} b^{\vartheta(M)}}{2^{|\mathcal{V}_{\bullet}(M)| - cc(M)} (1+b)^{cc(M)}} \prod_{1 \leq i \leq \ell(\lambda)} \frac{(-(1+b)\lambda_i)^{|\mathcal{V}_{\circ}^{(i)}(M)|}}{z_{\mathcal{V}_{\bullet}^{(i)}(M)}},$$

- $|\mathcal{V}_{\bullet}(M)|$  est le nombre de sommets noirs  $M$ .
- $|\mathcal{V}_{\circ}^{(i)}(M)|$  est le nombre de sommets blancs de  $M$  dans le niveau  $i$ .
- $cc(M)$  est le nombre de composantes connexes de  $M$ .
- $p_{\diamond(M)}$  poids des faces.
- $b^{\vartheta(M)}$  poids de non orientabilité.
- $(-(1+b)\lambda_i)^{|\mathcal{V}_{\circ}^{(i)}(M)|}$  poids lié à la structure en niveaux.

# Point de départ : Caractères de Jack

## Théorème (Féray '19)

Soit  $\mu$  un partition. Le caractère de Jack  $\theta_\mu^{(1+b)}(u_1, u_2, \dots)$  est l'unique fonction polynomiale de degré  $|\mu|$  telle que

- $\theta_\mu^{(1+b)}$  est *b-symétrique décalée*; symétrique dans les variables  $u_i - \frac{1+b}{i}$ .
- $\theta_\mu^{(1+b)}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\ell(\lambda)}, 0, \dots) = 0$  pour toute partition  $|\lambda| < |\mu|$ .
- sa partie homogène de plus haut de degré est  $\frac{\alpha^{|\mu| - \ell(\mu)}}{z_\mu} p_\mu(u_1, u_2, \dots)$ .

De plus, pour  $|\lambda| = |\mu|$   $\theta_\mu^{(1+b)}(\lambda) = [p_\mu] J_\lambda^{(1+b)}$ .

# Point de départ : Caractères de Jack

## Théorème (Féray '19)

Soit  $\mu$  un partition. Le caractère de Jack  $\theta_\mu^{(1+b)}(u_1, u_2, \dots)$  est l'unique fonction polynomiale de degré  $|\mu|$  telle que

- $\theta_\mu^{(1+b)}$  est *b-symétrique décalée*; symétrique dans les variables  $u_i - \frac{1+b}{i}$ .
- $\theta_\mu^{(1+b)}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\ell(\lambda)}, 0, \dots) = 0$  pour toute partition  $|\lambda| < |\mu|$ .
- sa partie homogène de plus haut de degré est  $\frac{\alpha^{|\mu|-\ell(\mu)}}{z_\mu} p_\mu(u_1, u_2, \dots)$ .

De plus, pour  $|\lambda| = |\mu|$   $\theta_\mu^{(1+b)}(\lambda) = [p_\mu] J_\lambda^{(1+b)}$ .

- On cherche une statistique de non orientabilité  $\vartheta$  pour la quelle la série génératrice des cartes à niveaux vérifie les trois conditions de caractérisation.

$$F^{(k)}(t, \mathbf{p}, s_1, \dots, s_k) :=$$

$$\sum_{\text{cartes } M \text{ à } k \text{ niveaux}} \frac{p_{\circ(M)}(-t)^{|M|} b^{\vartheta(M)}}{2^{|\nu_\bullet(M)| - cc(M)} (1+b)^{cc(M)}} \prod_{1 \leq i \leq k} \frac{(-(1+b)s_i)^{|\mathcal{V}_\circ^{(i)}(M)|}}{z_{\nu_\bullet^{(i)}(M)}}.$$

# Comment définir une statistique de non orientabilité?

**Méthode générale** (La Croix '09, Dołęga–Féray–Śniady '14, Chapuy–Dołęga'22). Soit  $M$  une carte de taille  $n$ .

- 1 On choisit un algorithme de décomposition, en fixant un ordre sur les arêtes de  $M$ :  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . On note  $M_i := M \setminus \{e_1, e_2, \dots, e_{i-1}\}$ .

# Comment définir une statistique de non orientabilité?

**Méthode générale** (La Croix '09, Dołęga–Féray–Śniady '14, Chapuy–Dołęga'22). Soit  $M$  une carte de taille  $n$ .

- 1 On choisit un algorithme de décomposition, en fixant un ordre sur les arêtes de  $M$ :  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . On note  $M_i := M \setminus \{e_1, e_2, \dots, e_{i-1}\}$ .
- 2 Pour toute arête  $e_i$ , on choisit

$$\vartheta(M_i, e_i) \in \{0, 1\}.$$

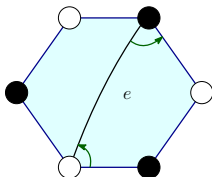
On prend

$$\vartheta(M) = \sum_{1 \leq i \leq n} \vartheta(M_i, e_i).$$

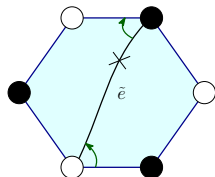
# Types d'arêtes

Soit  $M$  une carte une carte. Il y a deux façons d'ajouter une arête entre deux coins fixés  $M$ .

- 1 Les deux coins sont dans la même face



Une diagonale  
 $\vartheta(M \cup \{e\}, e) = 0$

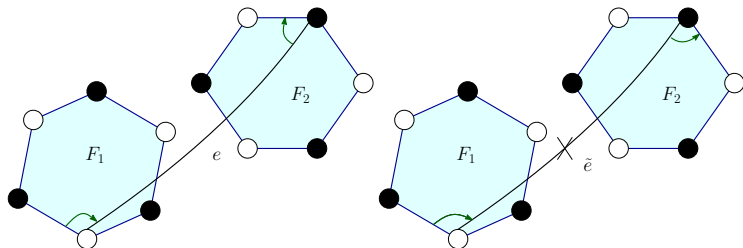


Un twist  
 $\vartheta(M \cup \{e\}, e) = 1$

# Types d'arêtes

Soit  $M$  une carte une carte. Il y a deux façons d'ajouter une arête entre deux coins fixés  $M$ .

- 2 Les deux coins sont dans deux faces différentes dans la même composante connexe.



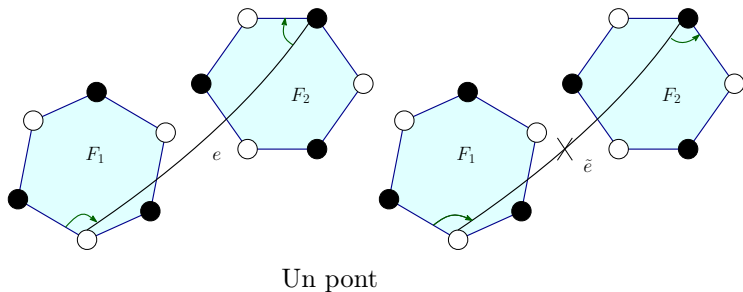
Une anse

- ▶  $\vartheta(M \cup \{e\}, e) + \vartheta(M \cup \{\tilde{e}\}, \tilde{e}) = 1$ .
- ▶ Si  $M$  est orientable alors exactement une des deux cartes  $(M \cup \{e\}, e)$  et  $(M \cup \{\tilde{e}\}, \tilde{e})$  est orientable, on lui associe 0, et à l'autre 1.

# Types d'arêtes

Soit  $M$  une carte une carte. Il y a deux façons d'ajouter une arête entre deux coins fixés  $M$ .

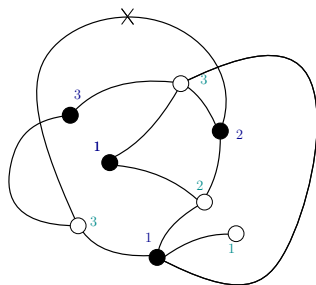
- 3 Les deux coins sont dans deux faces différentes dans deux **composantes connexes différentes**.



►  $\vartheta(M \cup \{e\}, e) = \vartheta(M \cup \{\tilde{e}\}, \tilde{e}) = 0.$



# Notre algorithme de décomposition

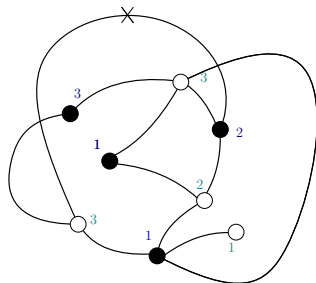


Une carte à 3 niveaux sur la bouteille de Klein

Rappel:

- chaque sommet noir a une valeur dans  $1, 2, \dots, k$ .
- chaque sommet blanc a la valeur maximale parmi celles de tous ses voisins noirs.

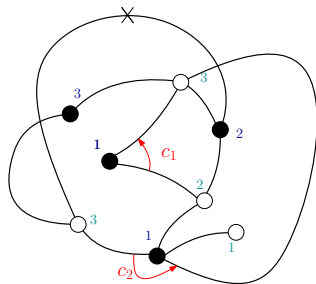
# Notre algorithme de décomposition



Une carte à 3 niveaux sur la bouteille de Klein

- On décompose la carte en commençant par le niveau le plus bas.

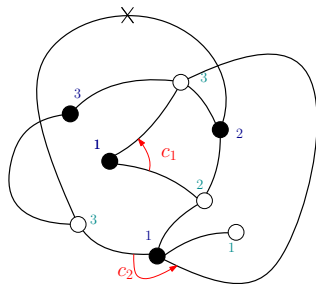
# Notre algorithme de décomposition



Décomposition d'une carte à 3 niveaux

- On décompose la carte en commençant par le niveau le plus bas.
- On se donne un ordre sur les sommets noirs de chaque niveau et une racine sur chaque sommet noir.

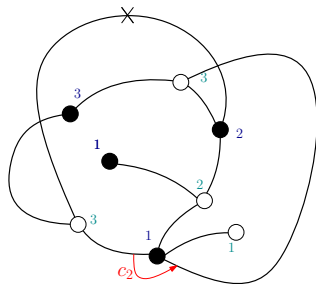
# Notre algorithme de décomposition



Décomposition d'une carte à 3 niveaux

- On décompose la carte en commençant par le niveau le plus bas.
- On se donne un ordre sur les sommets noirs de chaque niveau et une racine sur chaque sommet noir.
- On enlève les sommets noirs un par un en partant des racines.

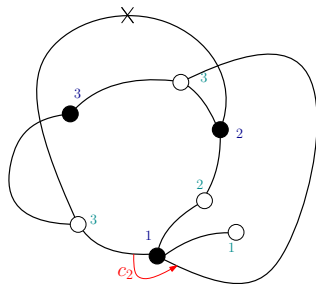
# Notre algorithme de décomposition



Décomposition d'une carte à 3 niveaux

- On décompose la carte en commençant par le niveau le plus bas.
- On se donne un ordre sur les sommets noirs de chaque niveau et une racine sur chaque sommet noir.
- On enlève les sommets noirs un par un en partant des racines.

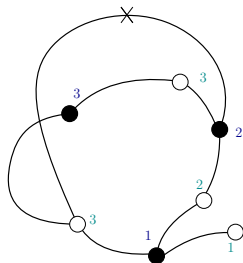
# Notre algorithme de décomposition



Décomposition d'une carte à 3 niveaux

- On décompose la carte en commençant par le niveau le plus bas.
- On se donne un ordre sur les sommets noirs de chaque niveau et une racine sur chaque sommet noir.
- On enlève les sommets noirs un par un en partant des racines.

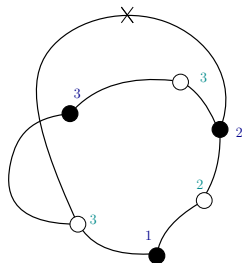
# Notre algorithme de décomposition



Décomposition d'une carte à 3 niveaux

- On décompose la carte en commençant par le niveau le plus bas.
- On se donne un ordre sur les sommets noirs de chaque niveau et une racine sur chaque sommet noir.
- On enlève les sommets noirs un par un en partant des racines.

# Notre algorithme de décomposition

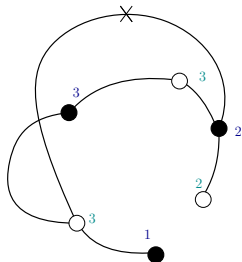


Décomposition d'une carte à 3 niveaux

- On décompose la carte en commençant par le niveau le plus bas.
- On se donne un ordre sur les sommets noirs de chaque niveau et une racine sur chaque sommet noir.
- On enlève les sommets noirs un par un en partant des racines.



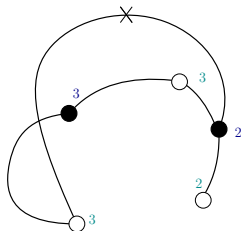
# Notre algorithme de décomposition



Décomposition d'une carte à 3 niveaux

- On décompose la carte en commençant par le niveau le plus bas.
- On se donne un ordre sur les sommets noirs de chaque niveau et une racine sur chaque sommet noir.
- On enlève les sommets noirs un par un en partant des racines.

# Notre algorithme de décomposition



Décomposition d'une carte à 3 niveaux

- On décompose la carte en commençant par le niveau le plus bas.
- On se donne un ordre sur les sommets noirs de chaque niveau et une racine sur chaque sommet noir.
- On enlève les sommets noirs un par un en partant des racines.

# Équation de Tutte

- On considère un alphabet catalytique  $Y := (y_0, y_1, y_2, \dots)$  pour marquer la face racine.

# Équation de Tutte

- On considère un alphabet catalytique  $Y := (y_0, y_1, y_2, \dots)$  pour marquer la face racine.
- On utilise les opérateurs différentielles introduits par Chapuy et Dołęga

$$Y_+ = \sum_{i \geq 0} y_{i+1} \frac{\partial}{\partial y_i} \rightarrow \text{ajouter une feuille.}$$

$$\Gamma_Y = (1+b) \cdot \sum_{i,j \geq 1} y_{i+j} \frac{i \partial^2}{\partial p_i \partial y_{j-1}} + \sum_{i,j \geq 1} y_i p_j \frac{\partial}{\partial y_{i+j-1}} + b \cdot \sum_{i \geq 1} y_{i+1} \frac{i \partial}{\partial y_i} \rightarrow \text{ajouter une arête.}$$

$$\Theta_Y := \sum_{i \geq 1} p_i \frac{\partial}{\partial y_i} \rightarrow \text{oublier la racine.}$$

$$B_n(\mathbf{p}, s_1) := \Theta_Y (\Gamma_Y + s_1 Y_+)^n \frac{y_0}{1+b} \rightarrow \text{ajouter un sommet noir de degré } n \text{ dans le niveau 1.}$$

# Équation de Tutte

- On considère un alphabet catalytique  $Y := (y_0, y_1, y_2, \dots)$  pour marquer la face racine.
- On utilise les opérateurs différentielles introduits par Chapuy et Dołęga

$$Y_+ = \sum_{i \geq 0} y_{i+1} \frac{\partial}{\partial y_i} \rightarrow \text{ajouter une feuille.}$$

$$\Gamma_Y = (1+b) \cdot \sum_{i,j \geq 1} y_{i+j} \frac{i \partial^2}{\partial p_i \partial y_{j-1}} + \sum_{i,j \geq 1} y_i p_j \frac{\partial}{\partial y_{i+j-1}} + b \cdot \sum_{i \geq 1} y_{i+1} \frac{i \partial}{\partial y_i} \rightarrow \text{ajouter une arête.}$$

$$\Theta_Y := \sum_{i \geq 1} p_i \frac{\partial}{\partial y_i} \rightarrow \text{oublier la racine.}$$

$$B_n(\mathbf{p}, s_1) := \Theta_Y (\Gamma_Y + s_1 Y_+)^n \frac{y_0}{1+b} \rightarrow \text{ajouter un sommet noir de degré } n \text{ dans le niveau } 1.$$

- On déduit une formule pour ajouter un niveau

$$F^{(k)}(t, \mathbf{p}, s_1, \dots, s_k) = \exp \left( \sum_{n \geq 1} \frac{(-t)^n}{n} B_n(\mathbf{p}, -(1+b)s_1) \right) \cdot F^{(k-1)}(t, \mathbf{p}, s_2, \dots, s_k).$$

# Relations de commutation

Pour obtenir les conditions du théorème de caractérisation, on les reformule en terme de relations de commutation

$$[B_n(\mathbf{p}, u), B_m(\mathbf{p}, u)] = 0, \text{ pour } n, m \geq 1,$$

$$\left[ \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n} B_n^>(\mathbf{p}, u), \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n} B_n^>(\mathbf{p}, v) \right] = 0,$$

où

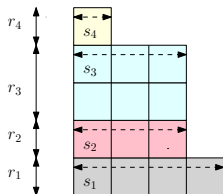
$$B_n^>(\mathbf{p}, u) := B_n(\mathbf{p}, u) - B_n(\mathbf{p}, 0).$$

Combinatoirement ; on peut ajouter deux sommets dans un ordre ou dans l'autre, le poids de non orientabilité est le même.

La preuve utilise des opérateurs à deux alphabets de variables catalytiques  $Y$  et  $Z$ .

# Application : Conjecture de Lassalle 2008

## Coordonnées de Stanley d'une partition



Le diagramme de Young de la partition  $[4, 3, 3, 3, 1]$ , avec  $(4, 3, 3, 1)$  et  $(1, 1, 2, 1)$  comme coordonnées de Stanley.

## Théorème (B.D–Dołęga '22)

Les caractères de Jack normalisés  $(-1)^{|\mu|} z_\mu \theta_\mu^{(1+b)}$  sont des polynômes en  $b$  et les coordonnées de Stanley  $r_1, r_2, \dots, -s_1, -s_2, \dots$ , avec des coefficients entiers positifs.

Preuve:

- Positivité: on utilise l'interprétation combinatoire en termes de cartes.
- Integralité: (une approche différente) système intégrable de Nazarov–Sklyanin.