Algorithmique des graphes

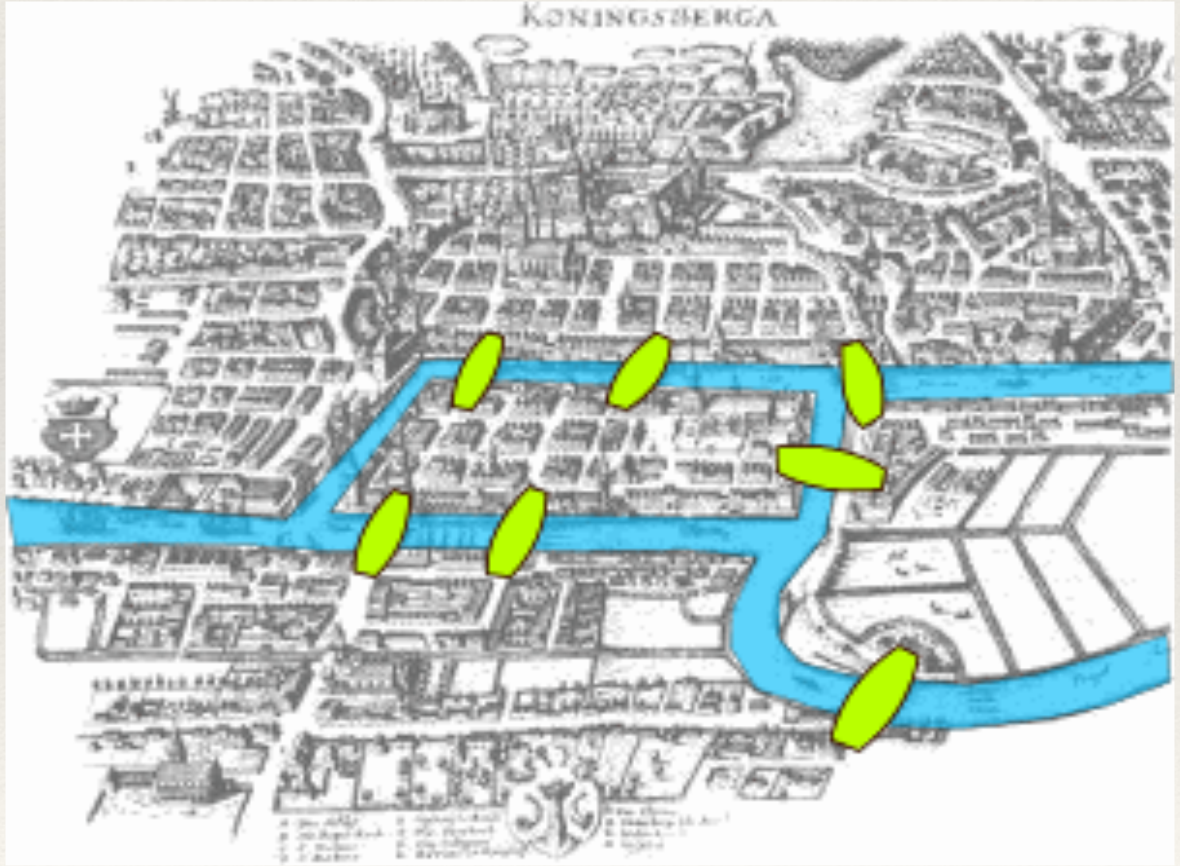
Cours de Lélia Blin
3eme année de Licence

Historique

- Un bon dessin vaut mieux qu'un bon discours
- La théorie des graphes est née des préoccupations qui n'étaient pas directement des préoccupations mathématiques

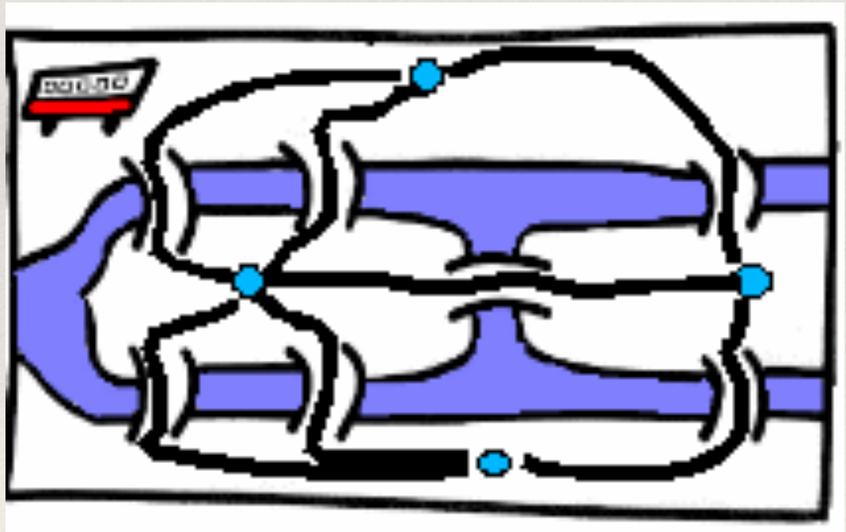
Les sept ponts de Königsberg

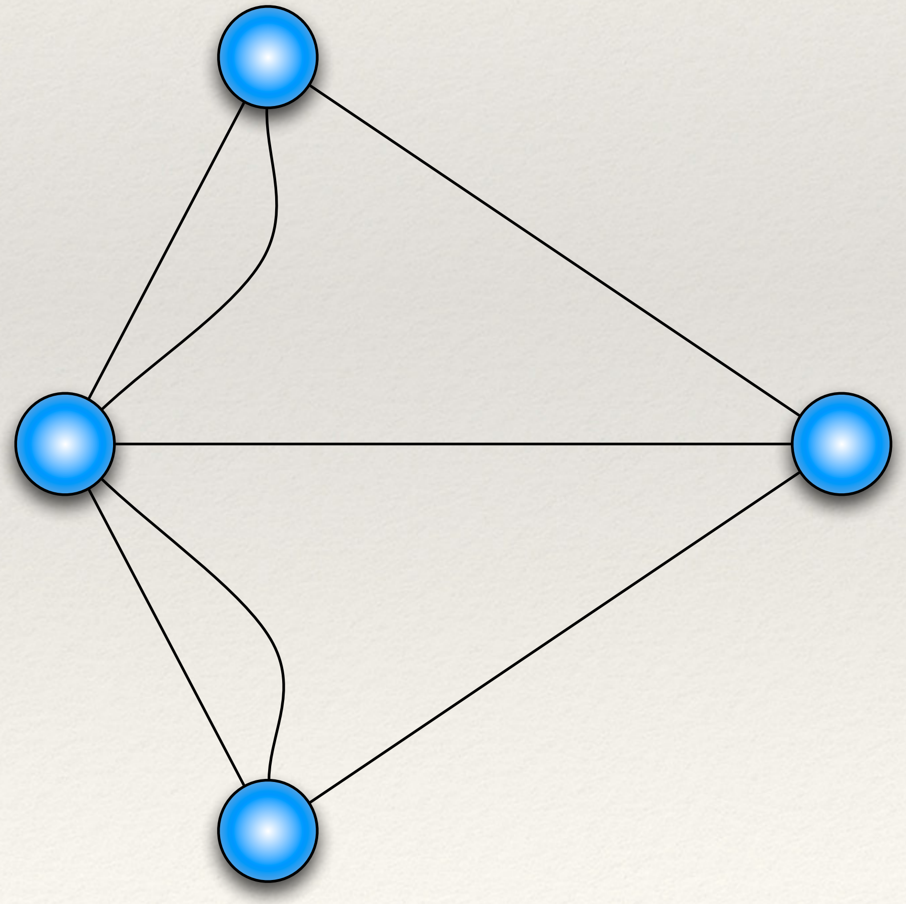
- Peut on se promener en passant une fois et une seule par tous les ponts et revenir au point de départ?



Les sept ponts de Königsberg

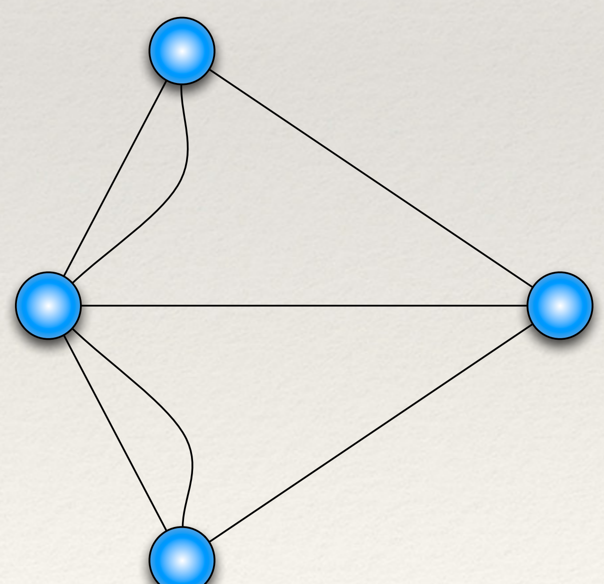
- Cette configuration des ponts de Königsberg se modélise par des relations binaires





Graphes

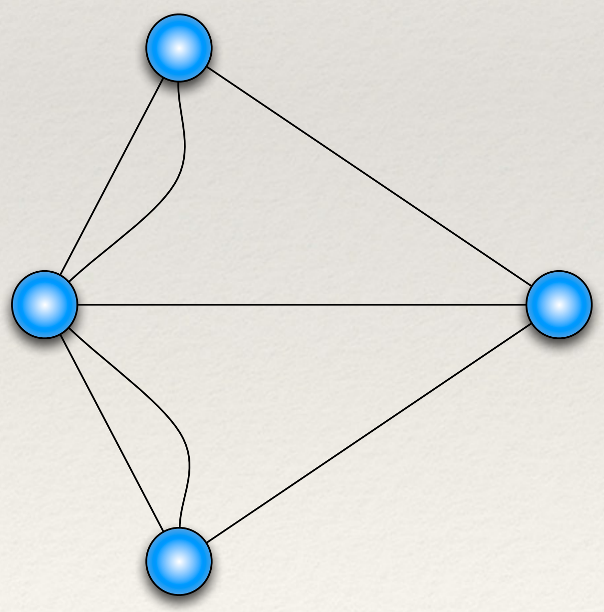
- Cette modélisation des relations binaires s'appelle un graphe:
  - L'élément représenté par un point: sommet
  - La relation représenté par un lien: arête



Leonhard Euler (1707-1783)

Preuve de Leonhard Euler

- En 1736 Leonhard Euler prouve:
  - Qu'il est impossible de traverser chacun des sept ponts de la ville de Königsberg une fois exactement et de revenir au point de départ
- De plus il prouve:
  - Que pour traverser il aurait fallu pour chaque rive un nombre de pont pair.



Preuve de Leonhard Euler

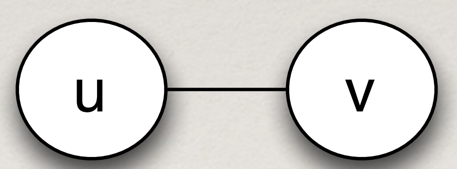
- Ce qui ce traduit en théorie des graphes par:
  - Pour qu'un trajet passe une fois et une seule sur chaque arête et revienne au point de départ sur un graphe, il faut que chaque sommet du graphe soit de degré pair.
  - La résolution de ce problème est considérée comme le premier théorème de la théorie des graphes.

Euler a démontré qu'un graphe ne pouvait être parcouru d'un seul trait s'il avait plus de deux sommets avec des degrés impairs.

Utilisations

Relation binaire

- Les graphes capturent essentiellement une relation binaire entre deux éléments.
- Il existe une arête entre u et v si il existe une relation binaire entre u et v



Relation binaire

- Une relation peut dans la vie courante lier des objets divers:
- Relation binaire symétrique
  - Pierre connaît Jean
  - Marie est PACSée avec Pierre
  - Il existe une route à double sens entre Lyon et Grenoble
- Relation asymétrique:
  - Pierre est plus grand que Jean
  - Pierre est client de Jean
  - Il existe une route à sens unique entre Lyon et Grenoble

Utilisations

- Un graphe de ces relations met à jour les contraintes structurelles de l'organisation des objets entre eux via une relation particulière.
- Lorsqu'un graphe est donné on veut généralement pouvoir dire des choses sur lui.
- Ces besoins s'expriment sous forment différentes:
    - En plus court chemin pour un réseau routier
    - En distance d'un individu à un autre pour un graphe des connaissances.
    - ….

Historique

- Plus récemment (60,70) vision plus unifié
  - des concepts
  - des objets
  - des résultats obtenus
- Les graphes sont devenus une branche des mathématiques discrète

Historique

- Développement des ordinateurs
- Problématique de la manipulation automatique de telles structures
- Algorithmique des graphes

Lorem Ipsum Dolor

Graphes non orientés

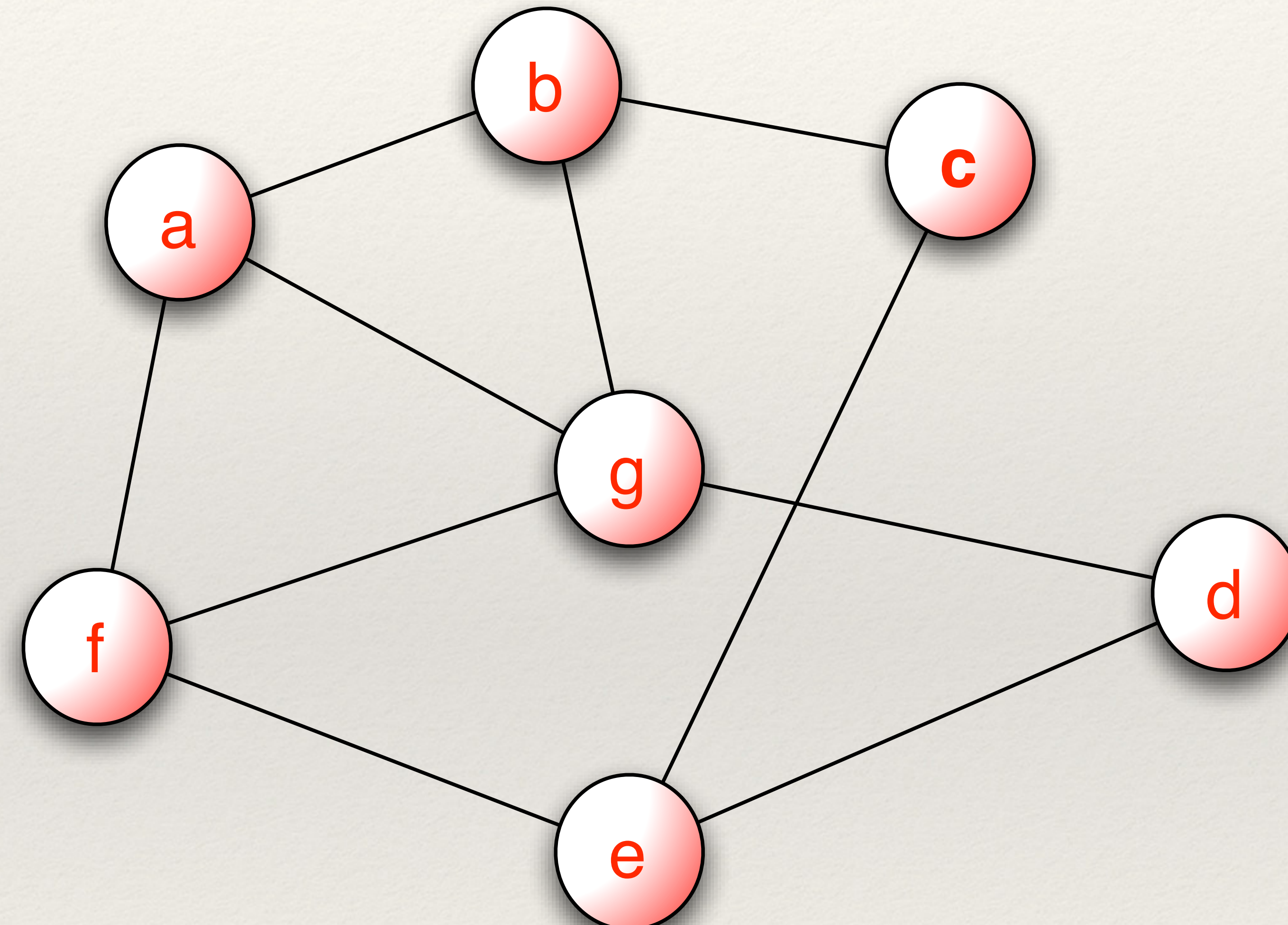
Graphes non orientés

- Un graphe G(V,E) est composé
  - D'un ensemble fini de sommets, noté V(G)
  - D'un ensemble fini d'arêtes E(G)
    - $E(G) \subseteq \{(a,b) : a \in V \text{ et } b \in V\}$

Graphe simple

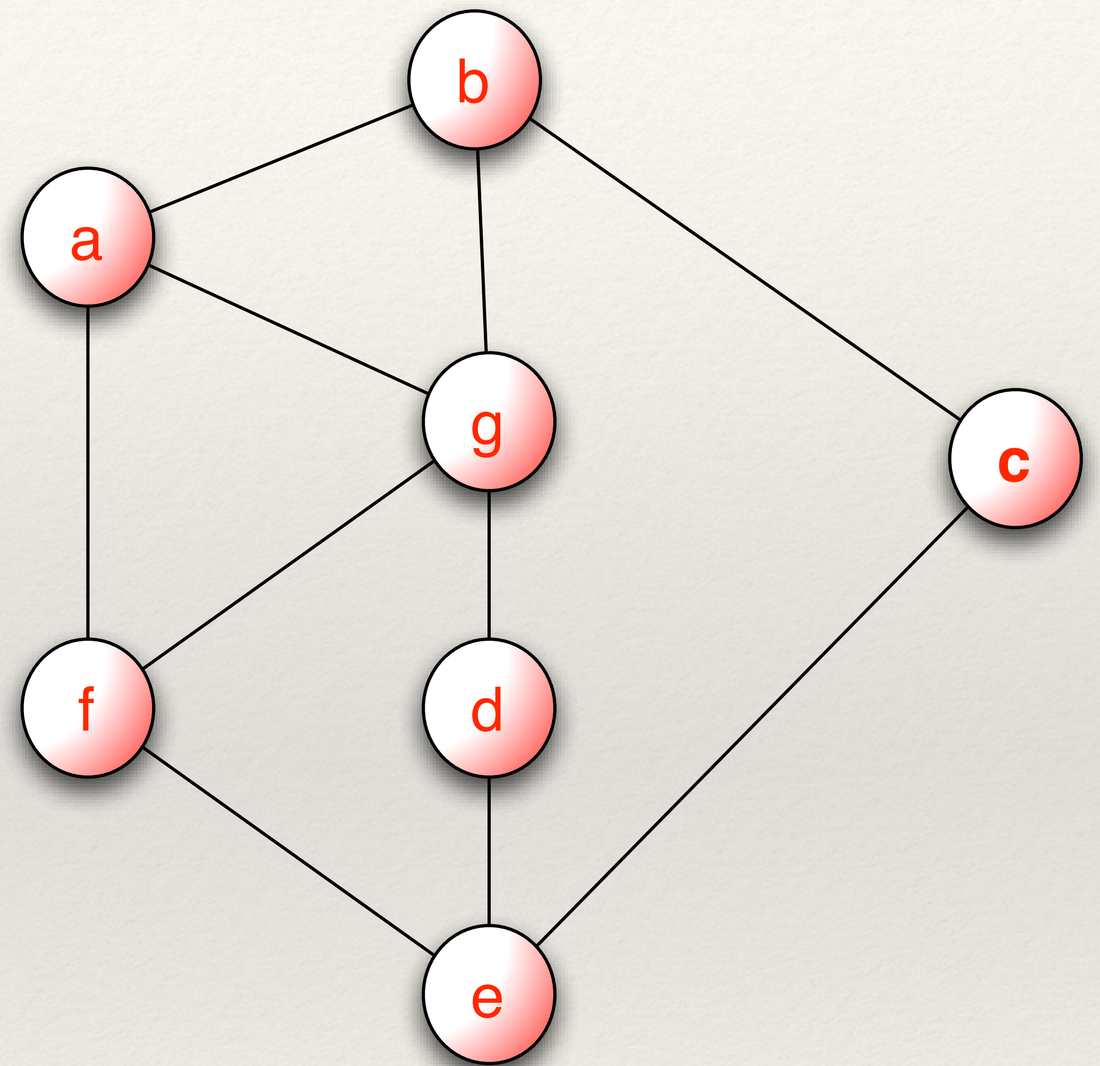
- On dit qu'un graphe est simple si pour tout sommet a du graphe il n'existe pas d'arête de a vers a.
- Autrement dit: $E(G) \subseteq \{\{a,b\}: a \in V \text{ et } b \in V \text{ et } a \neq b\}$

Représentation



- V={a,b,c,d,e,f,g}
- E={{a,b},{a,f},{a,g},{b,c},{b,g},{c,e},{d,e},{d,g},{e,f},{f,g}}

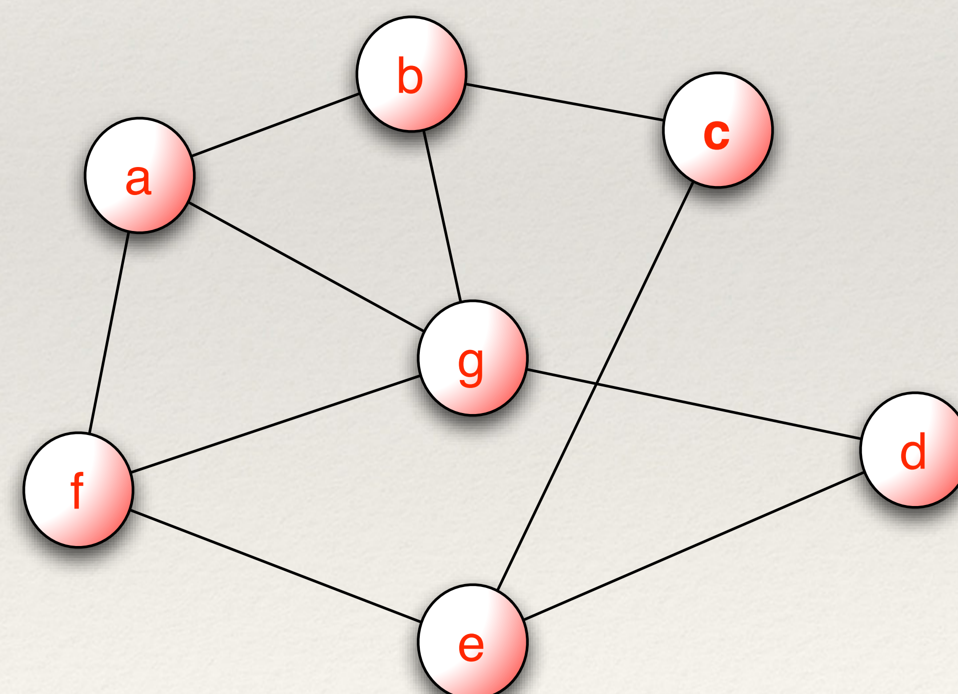
Représentation



La représentation graphique d'un graphe n'est pas unique

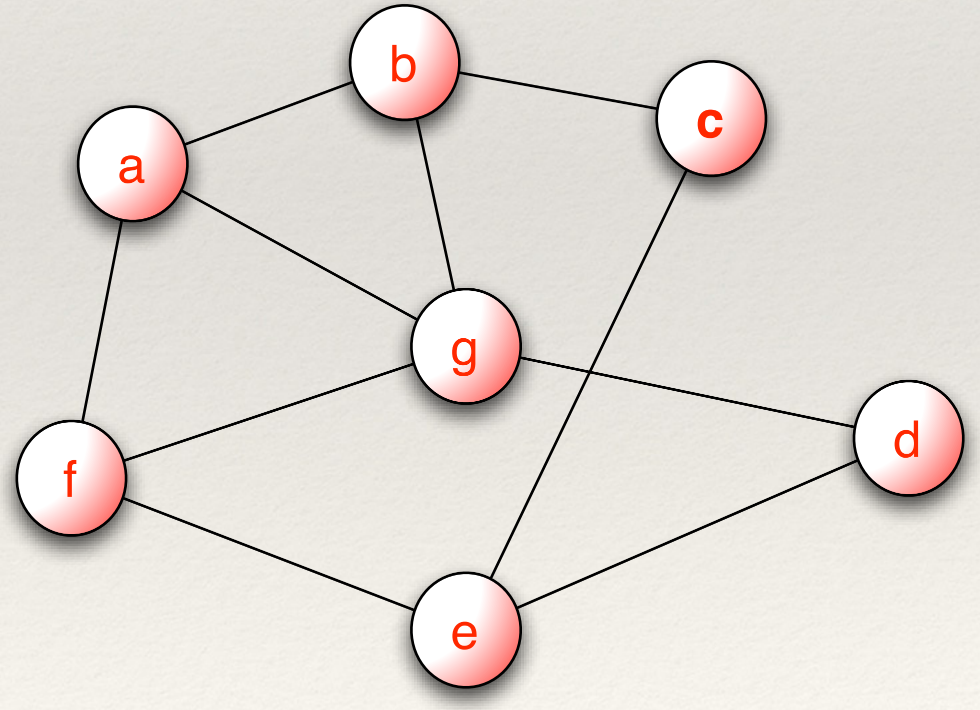
Arêtes incidentes

- Soit G=(V,E) un graphe non orienté simple (sans boucle)
- Des arêtes sont incidentes si elles ont une extrémité en commun.
- Exemples:
  - {a,b},{a,f},{a,g} sont incidentes à a
  - {c,e} et {e,f} sont incidentes à e
  - ……



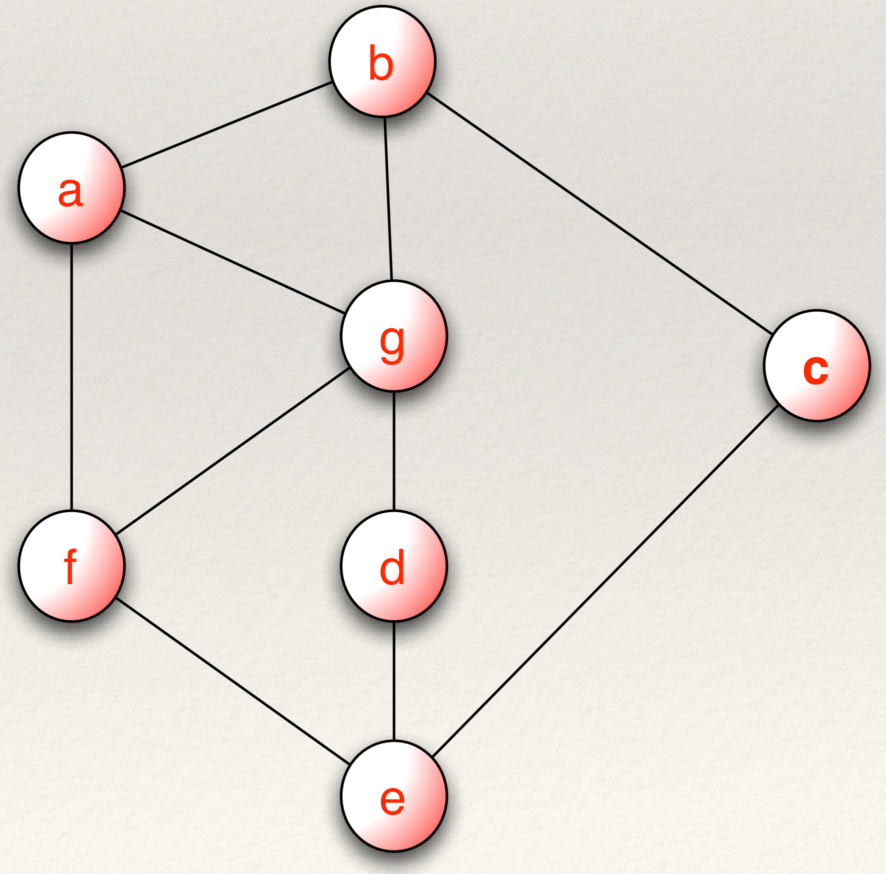
Sommets adjacents

- Soit G=(V,E) un graphe non orienté simple (sans boucle)
- Deux arêtes sont adjacentes si elles partagent une même extrémité
- Exemples de sommets adjacents:
  - {a,b},{a,f},{a,g},{b,g},{c,e},{e,f}



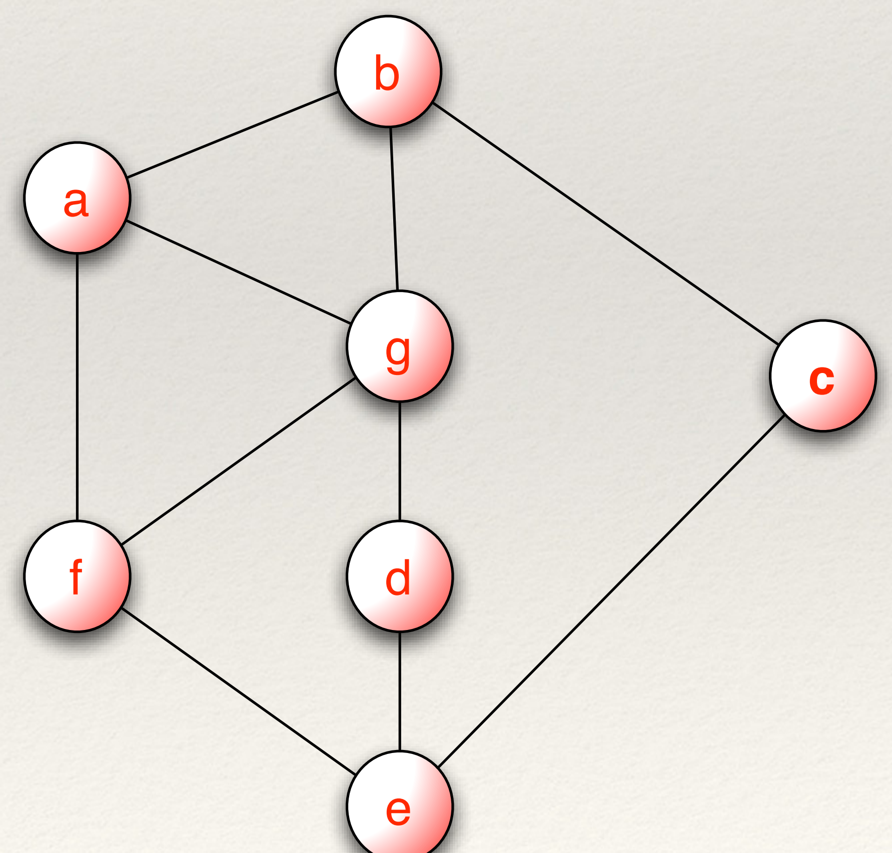
Voisins d'un sommet

- Soit G=(V,E) un graphe non orienté simple
- Les voisins d'un sommet u est l'ensemble des sommets adjacents à u.
- $N(u)=\{v \in V: \{u,v\} \in E\}$
- Exemples:
  - $N(a)=\{b,g,f\}$
  - $N(b)=\{a,g,c\}$
  - ……



Degré d'un sommet

- G=(V,E) un graphe non orienté simple.
- Le degré d'un sommet u dans G est le nombre de ses voisins
- d(u)=|N(u)| où N(u) est l'ensemble des sommets voisins de u
- Exemples:
  - N(a)={b,g,f}, d(a)=3
  - N(b)={a,g,c}, d(b)=3
  - ……



Degré minimum d'un graphe

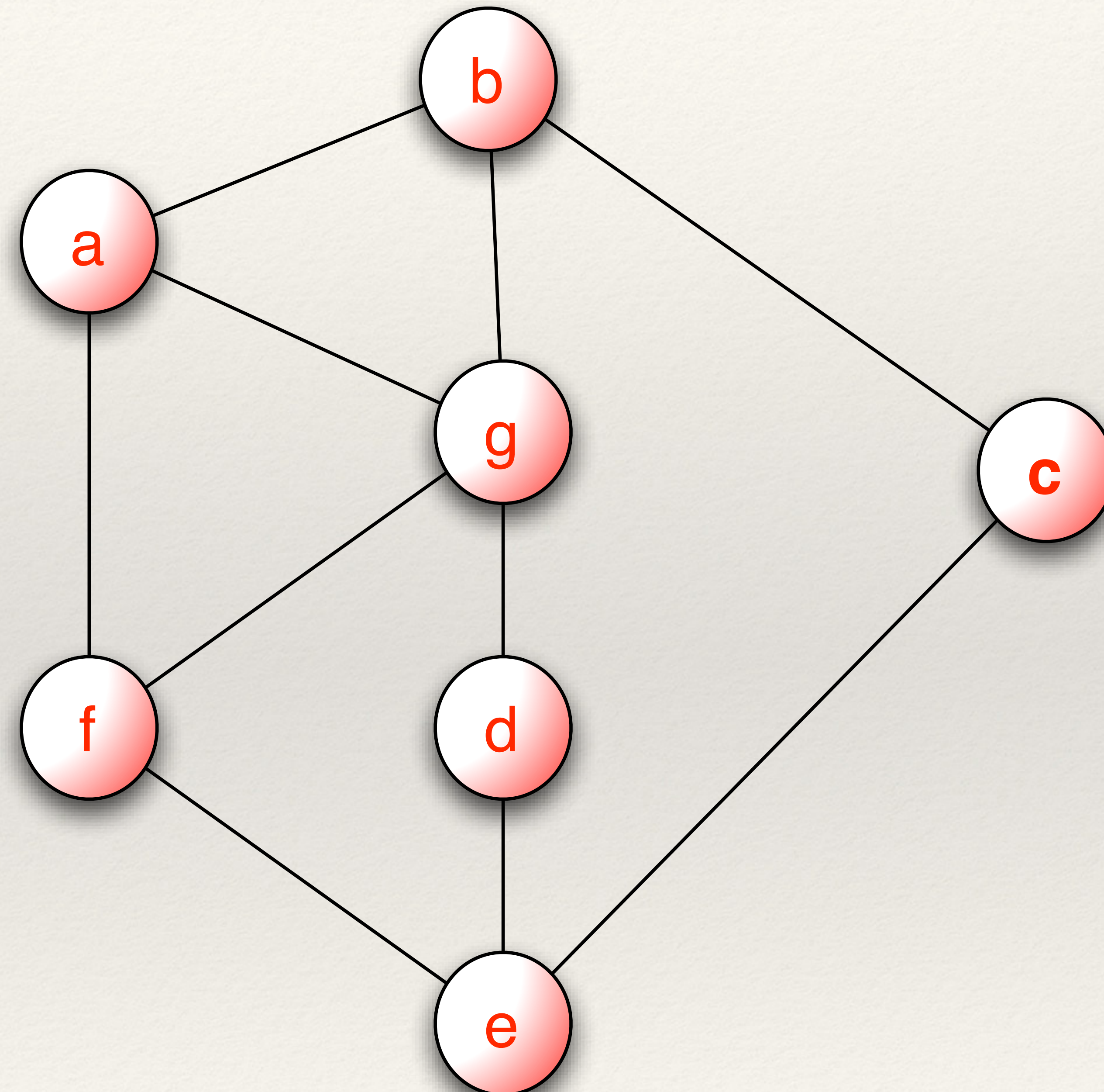
- Soit G=(V,E) un graphe non orienté simple.
- Le degré minimum du graphe est $\delta=\mathrm{Min}\{d(u):u\in V\}$

Degré d'un graphe

- Soit G=(V,E) un graphe non orienté simple.
- Le degré du graphe est $\Delta = \mathrm{Max}\{d(u) : u \in V\}$

Degré (exemple)

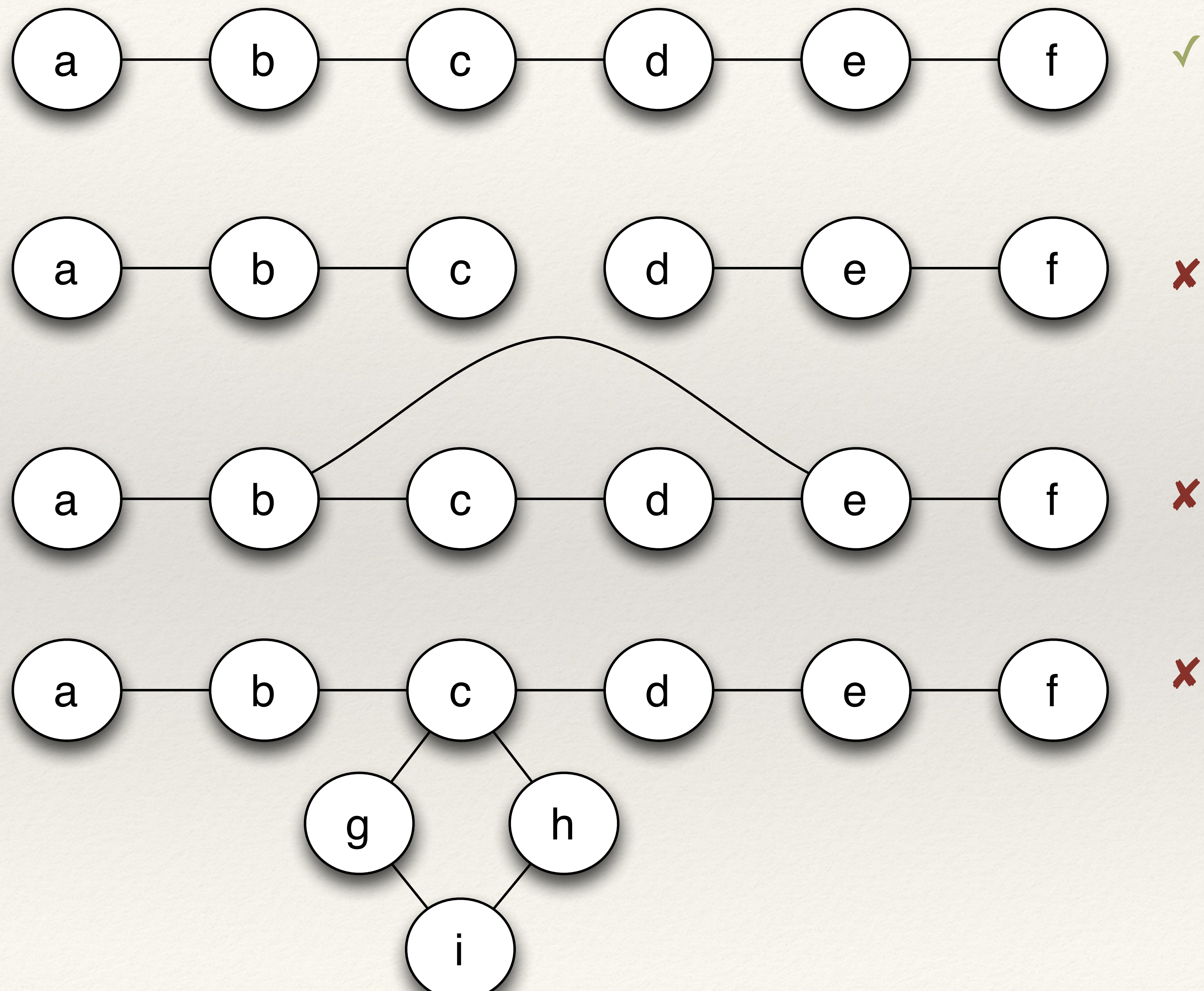
- N(b)={a,g,c}
- d(b)=3
- δ=2
- Δ=4



Chemin

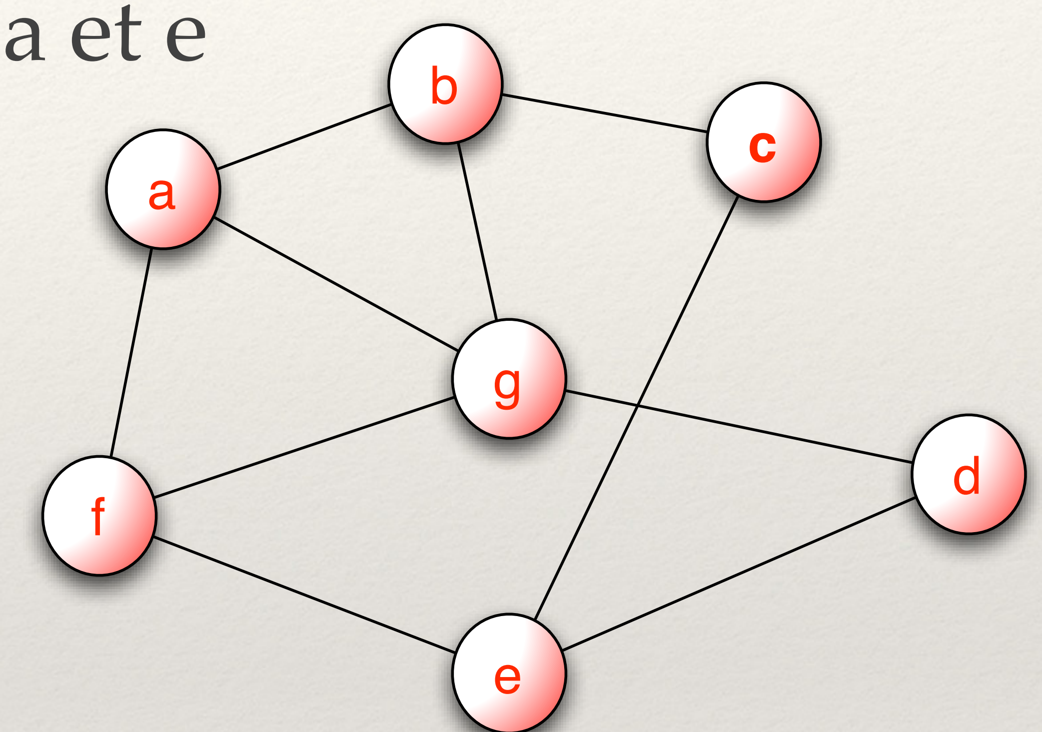
- Soient u et v deux sommets distincts d'un graphe G(V,E)
- Un chemin de u à v ($u \neq v$) dans G est:
- Une suite $u, u_0, u_1, \ldots, u_k, v$ de sommets 2 à 2 distincts tel que:
  - $\{u,u_0\} \in E$, $\{u_k,v\} \in E$ et $\forall i \in \{1,\ldots,k\}$ on ai $\{u_{i-1},u_i\}$
- Le sommet u est **l'origine** du chemin
- Le sommet v est **l'extrémité** du chemin
- La **longueur** d'un chemin est le nombre d'arête qu'il possède

Chemin (Exemple)



Chemin (exemple)

- Il y a de nombreux chemins entre a et e
  - a,b,c,e
  - a,f,g,d,e
  - a,d,c,g,f,e
  - ….



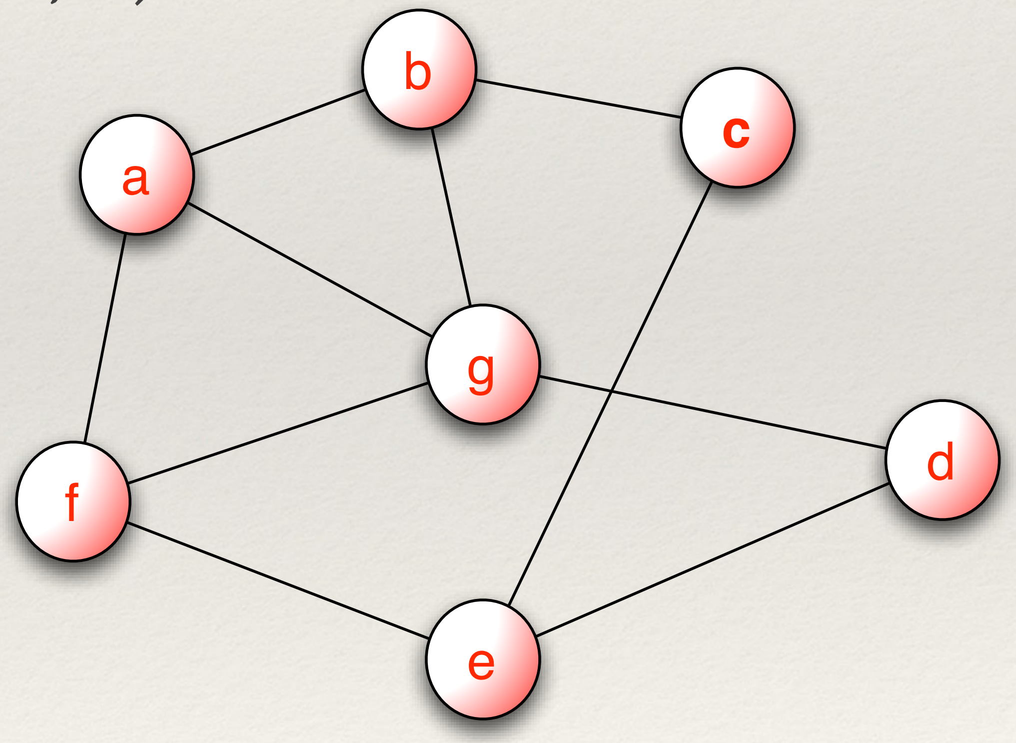
- Tous ces chemins ne sont pas de même longueur
- La **distance** est la longueur la plus courte entre a et e dans G

Distance

- Soit un graphe simple non orienté G(V,E)
- Soit u et v deux sommets distincts de V
- Soit P(u,v) l'ensemble des chemins de u à v dans G
- La distance entre u et v est :
  - $d(u,v)=\min\{\text{longueur } P : P \in P(u,v)\}$

Distance (exemple)

- La distance entre 2 sommets est le plus court des chemins qui les relie
- Si $P(u,v)=\emptyset$ avec $u \neq v$ on pose $d(u,v)=+\infty$
- Exemples:
  - $d(a,b)=1$
  - $d(a,e)=2$
  - $d(a,d)=2$



Excentricité

- Soit un graphe simple non orienté G(V,E)
- $\forall u \in V$ l'excentricité de u est:
  - $exc(u)=Max\{d(u,v): u,v \in V\}$
- Autrement dit:
  - l'excentricité de u désigne la distance qui sépare u du sommet le plus éloigné de u dans G
  - l'excentricité d'un sommet est la distance maximum de ce sommet aux autres sommets

Rayon

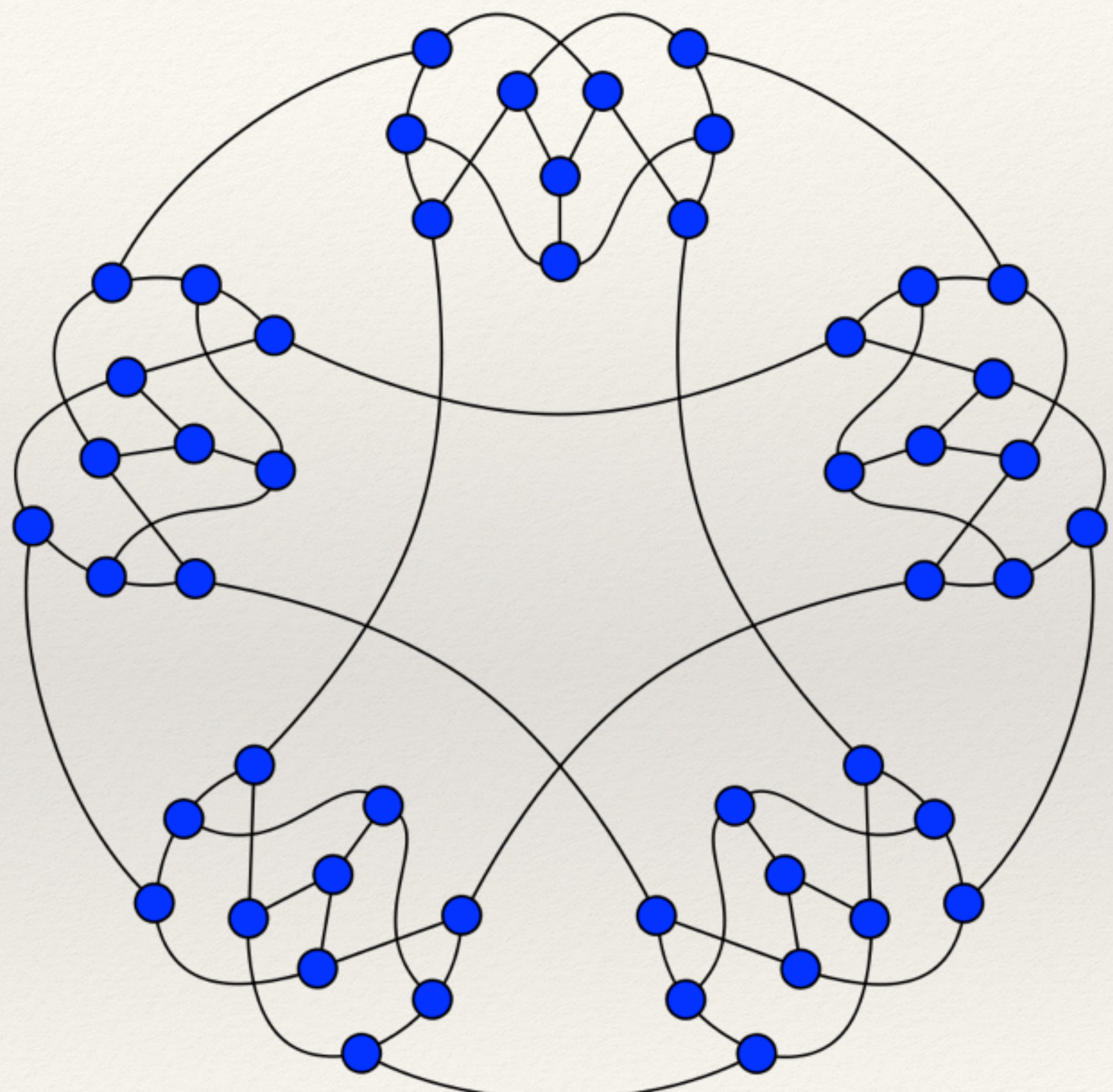
- Soit un graphe simple non orienté G(V,E)
- $\forall u \in V$ le rayon de u est:
  - $R(u)=\min\{exc(u): \forall u \in V\}$
- Autrement dit:
  - Le rayon est la plus petite distance à la quelle puisse se trouver un sommet de tous les autres.
  - Le centre d'un graphe est formé de l'ensemble de ses sommets d'excentricité minimale.

Diamètre

- Soit un graphe simple non orienté G(V,E)
- $\forall u \in V$ le diamètre de u est:
  - $D(u)=\max\{exc(u): \forall u \in V\}$
- Autrement dit:
  - D désigne la plus grande distance entre 2 sommets du graphe.

Excentricité, Rayon, diamètre

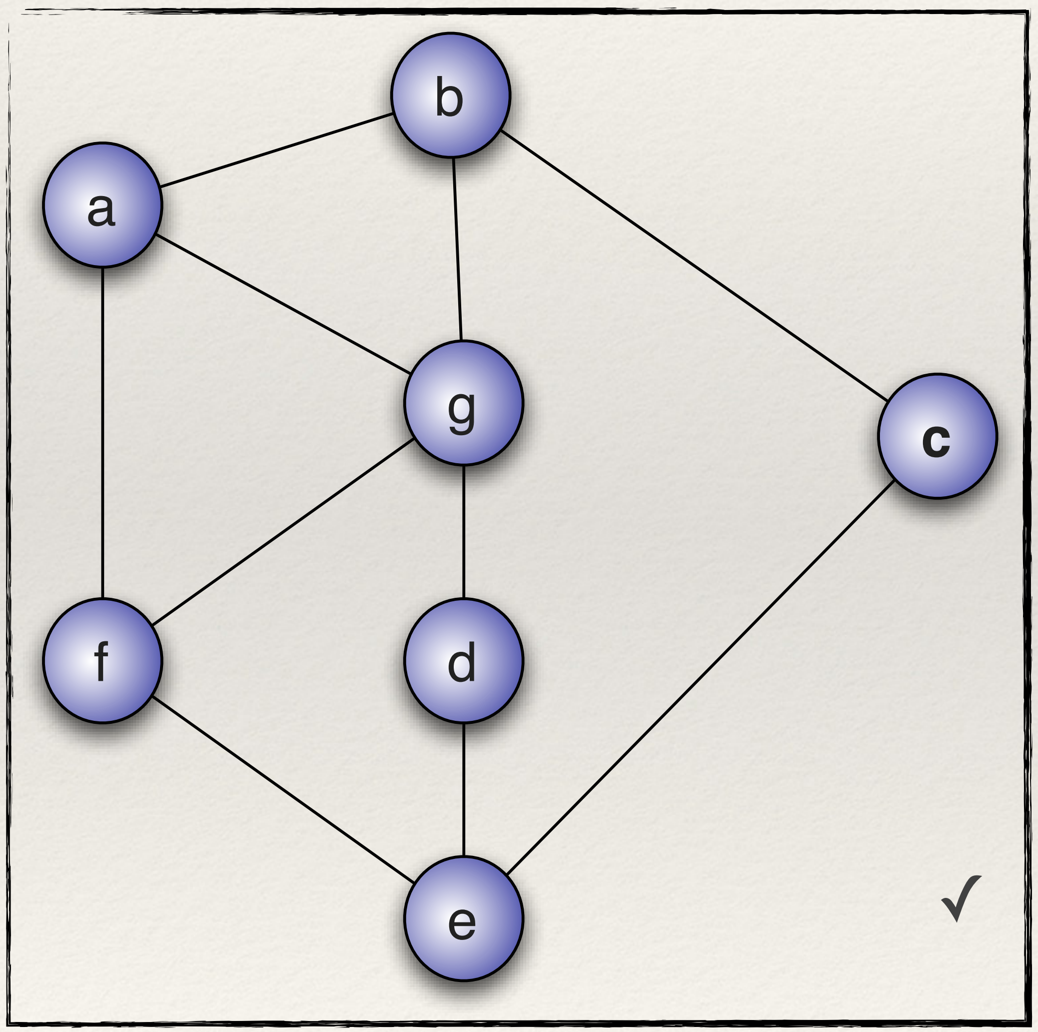
- R(G)=6
- D(G)=7

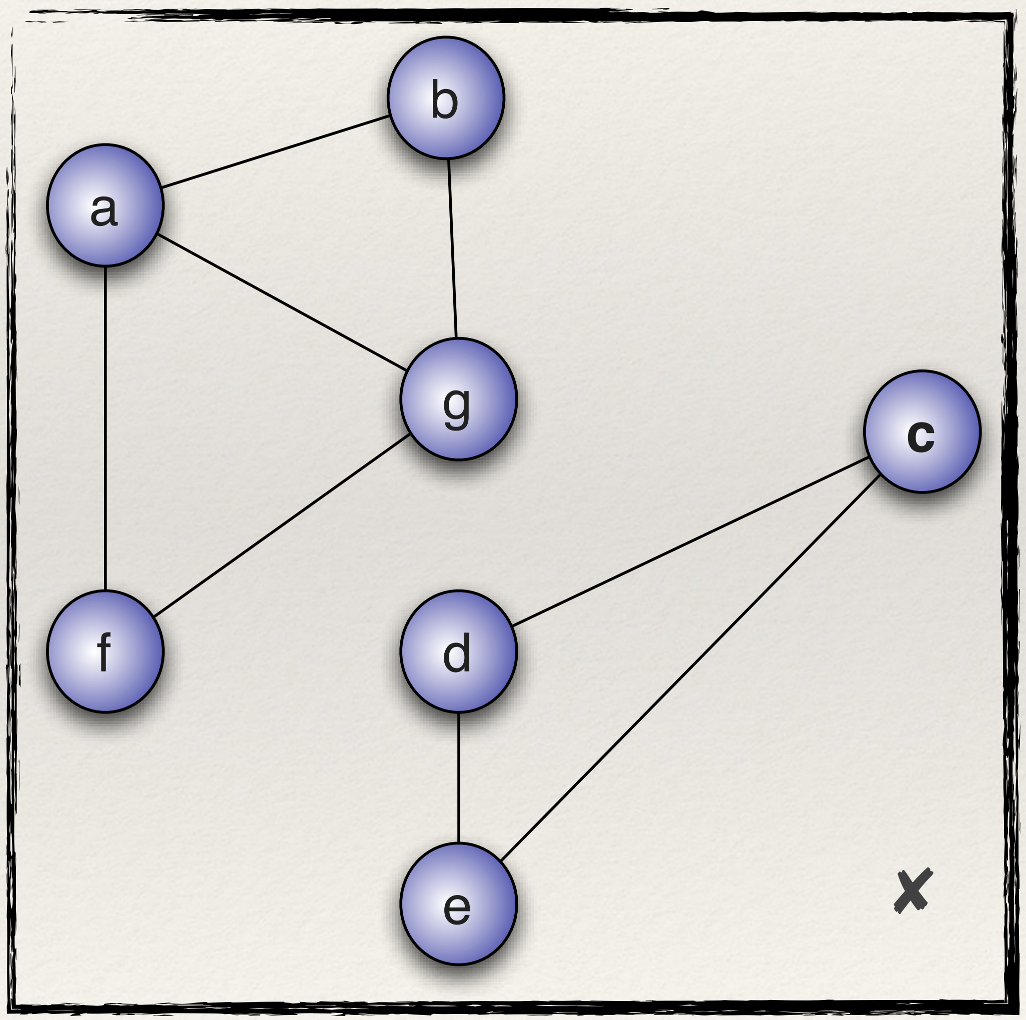


http://fr.wikipedia.org/wiki/Snark_de_Szekeres

Graphe connexe

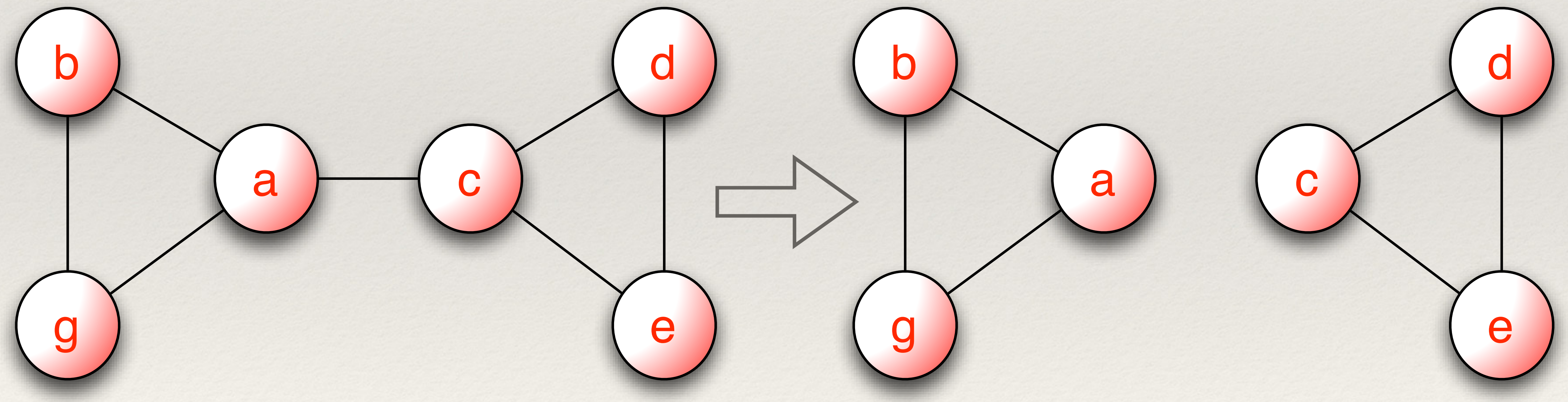
- Un graphe est connexe si il existe un chemin dans G entre toutes paires de sommets (distincts).





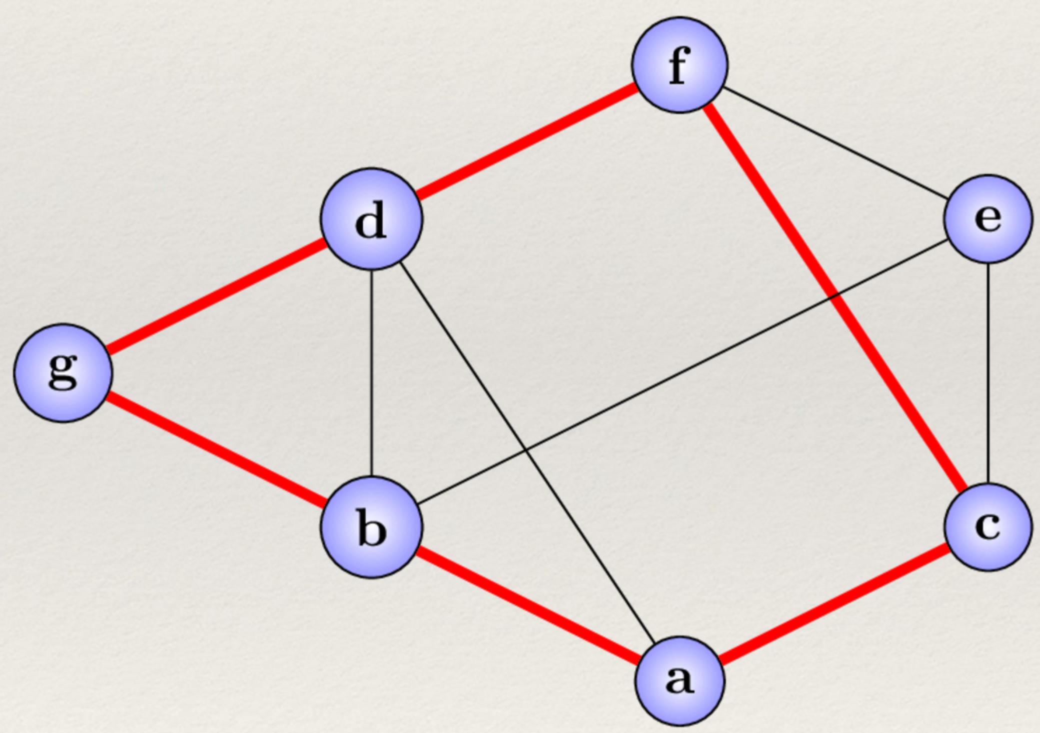
Isthme

- Soit un graphe G=(V,E) connexe.
- Une arête {x,y} est appelée isthme si le graphe G'(V,E-{x,y}) n'est pas connexe



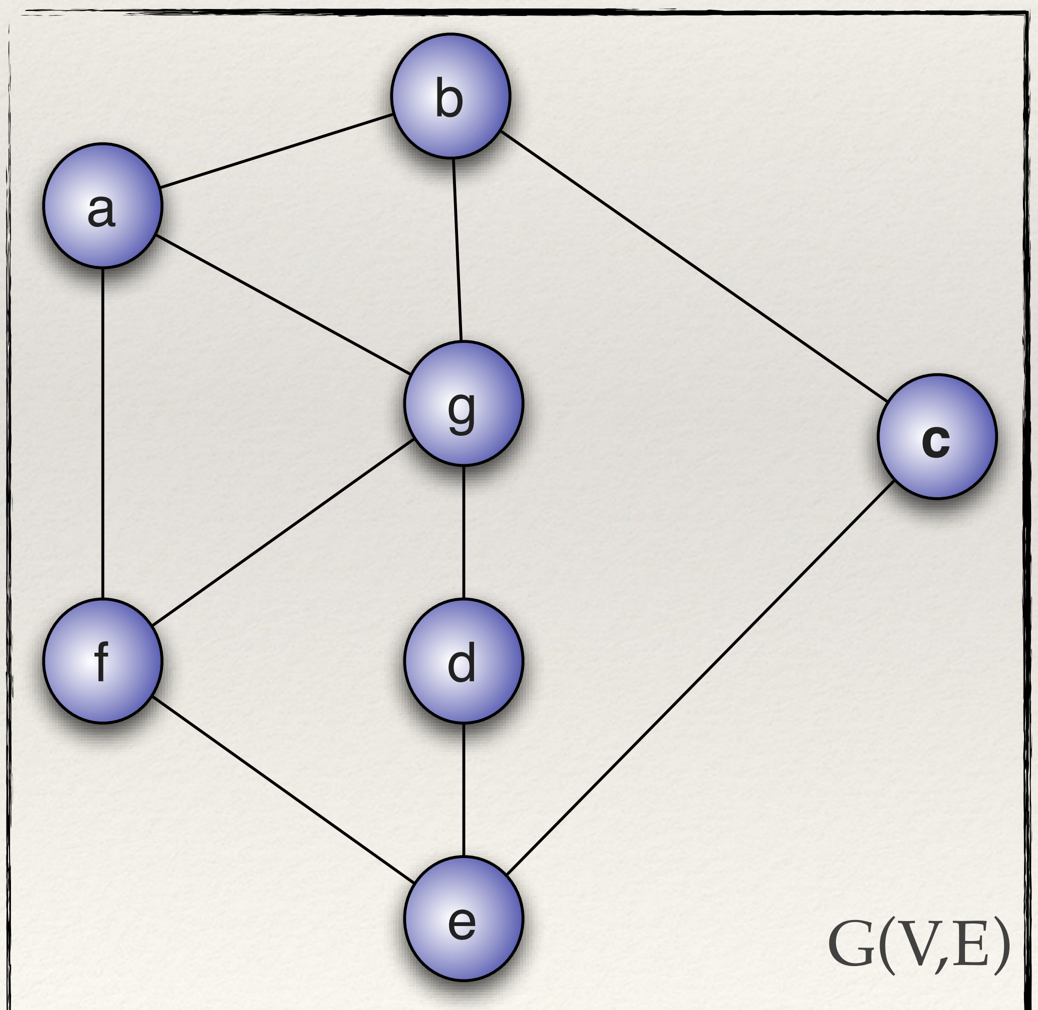
Cycle

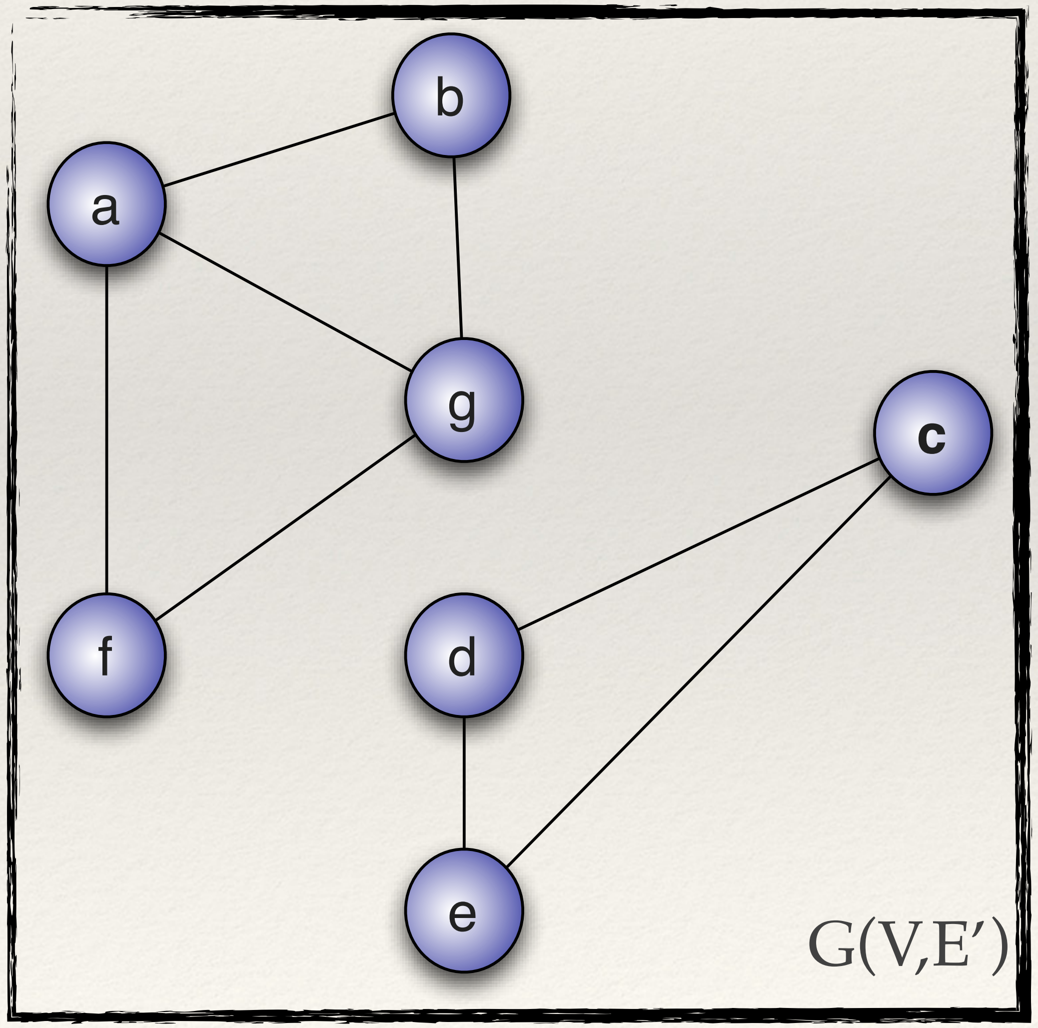
- Un cycle est un chemin dont l'origine et l'extrémité sont confondues



Graphe partiel

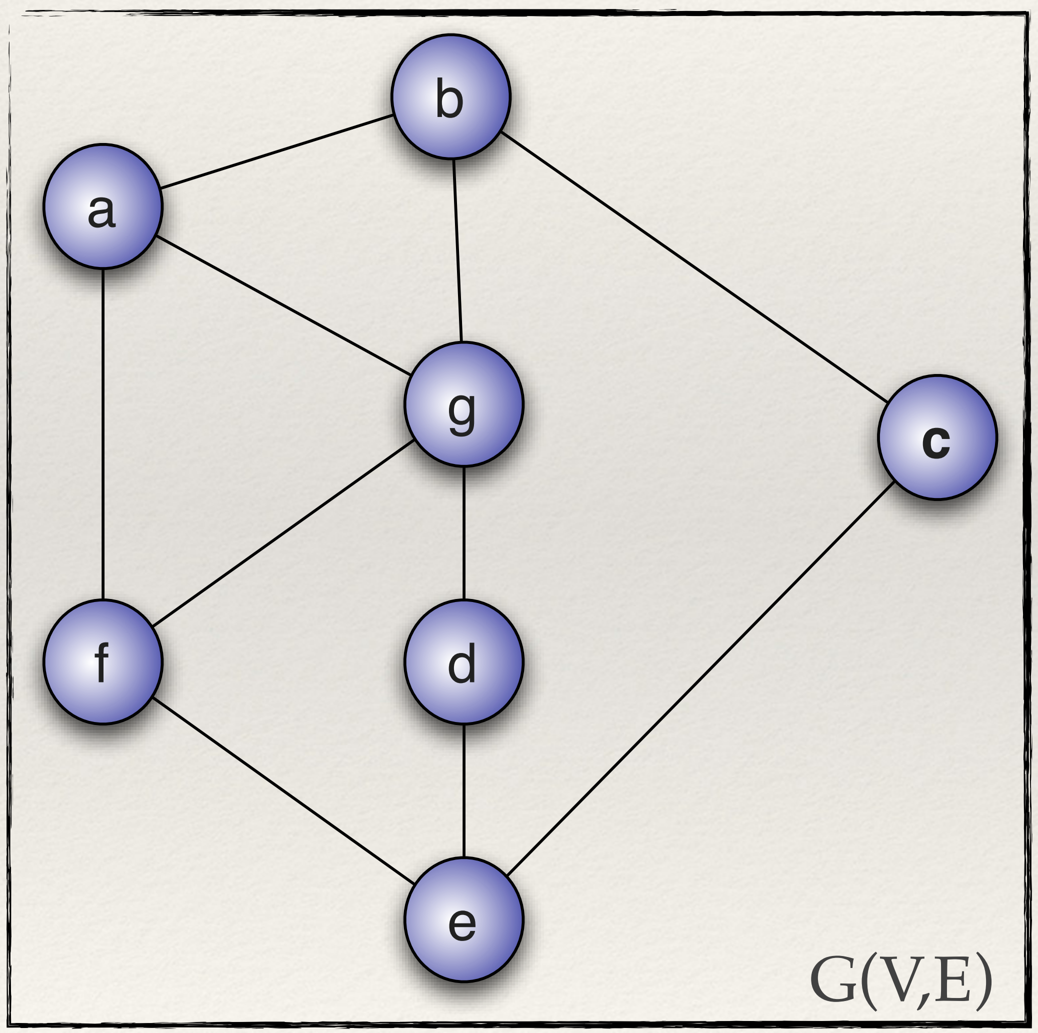
- Soit G(V,E) un graphe, le graphe partiel de G engendré par $E' \subseteq E$ est le graphe G(V,E')

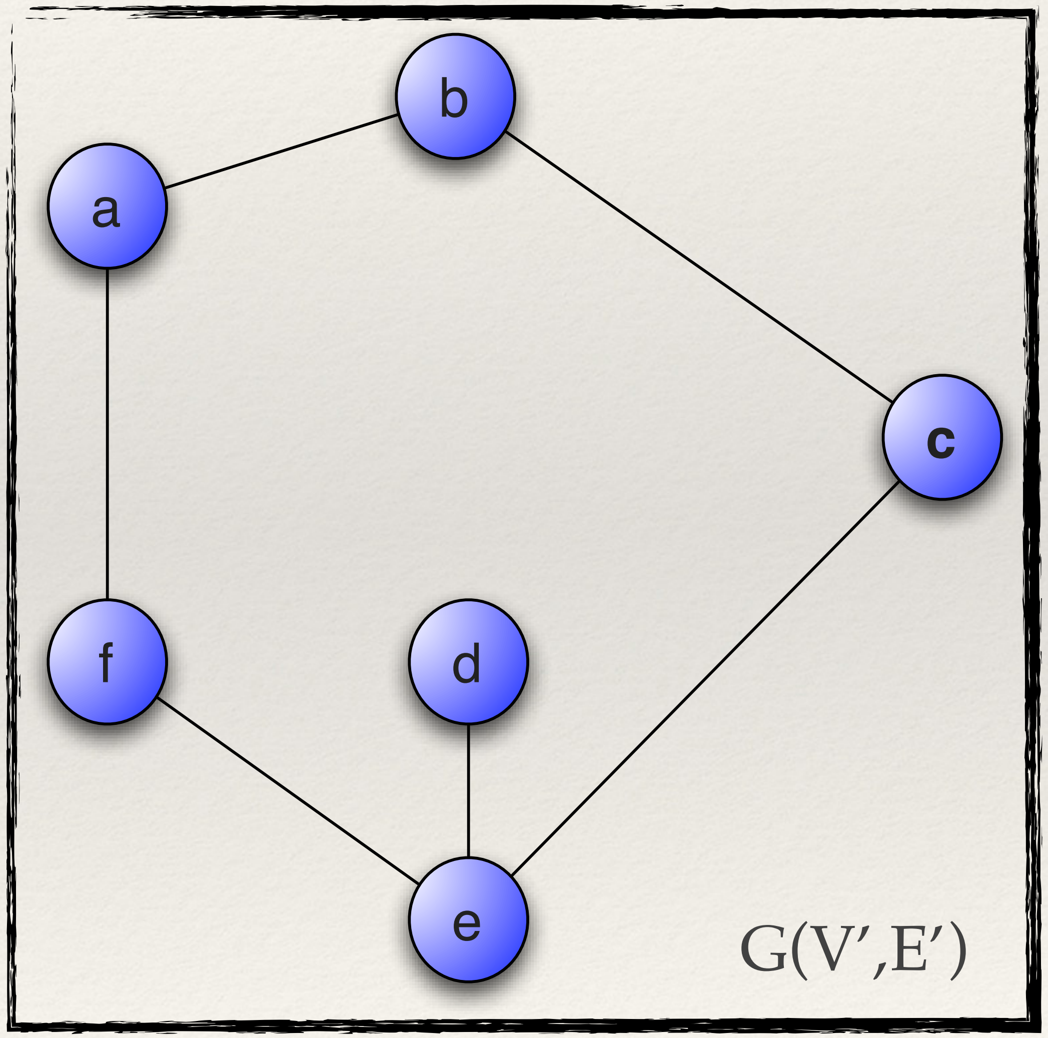




Sous-graphe

- Soit G(V,E) un graphe, le sous-graphe de G engendré par V′⊆V est le graphe G(V′,E′)



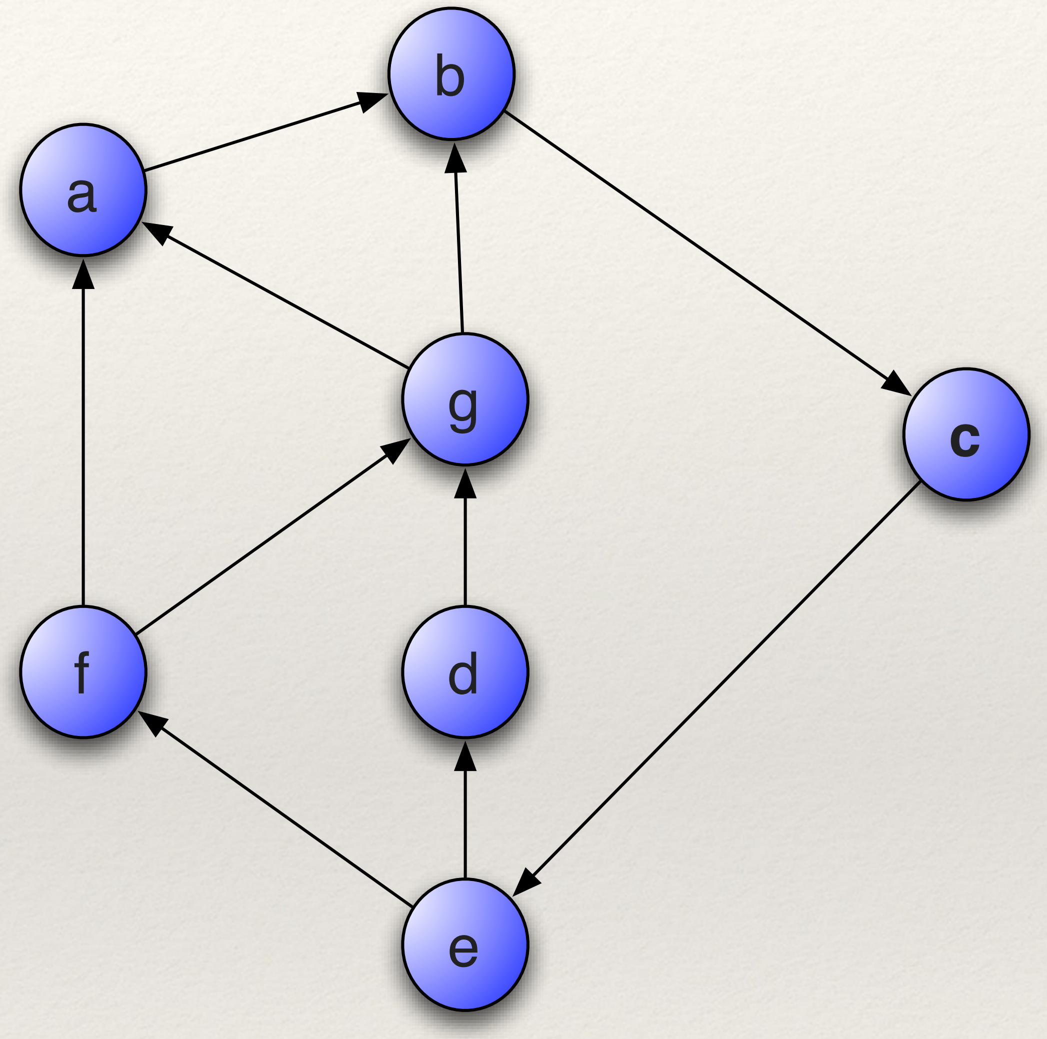


Graphes orientés

Graphes orientés

- Un graphe orienté G=(V,A) est composé
  - D'un ensemble fini de sommets, noté V
  - D'un ensemble fini d'arcs, noté A
- Un arc est une paire orienté de sommets
  - $A(G) \subseteq \{(a,b): a \in V \text{ et } b \in V\}$
- Remarque:
  - Un graphe orienté peu être appelé digraphe pour «directed graph» en anglais

Représentation



- V=(a,b,c,d,e,f,g)
- A={(a,b),(b,c),(c,e),(d,g),(e,d),(e,f),(f,a),(f,g),(g,a),(g,b)}

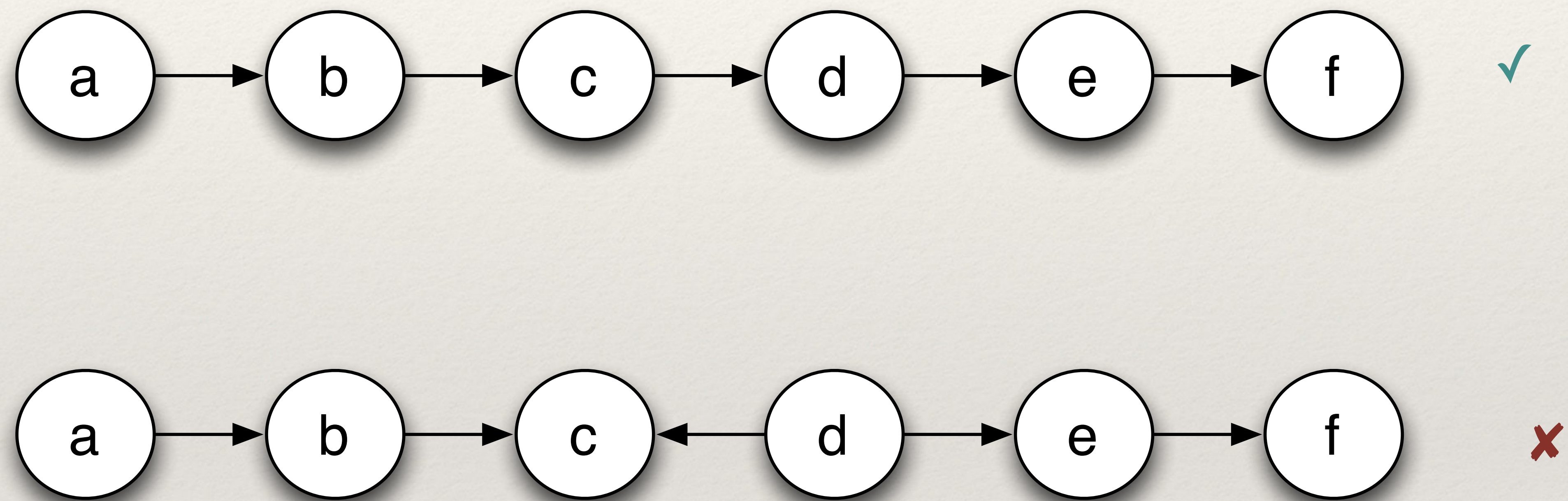
Voisinage

- Soit un graphe orienté G(V,A) et soit un sommet u, on a:
- $N^+(u)=\{v: (u,v) \in A)$ Voisins sortants (aussi noté Γ+)
- $N^-(u)=\{v: (v,u) \in A)$ Voisins entrants (aussi noté Γ-)
- $d^+(u)=|N^+(u)|$ Degré sortants
- $d^-(u)=|N^-(u)|$ Degré entrant
- $d(u)=d^+(u)+d^-(u)$
- On a de même δ^+, δ^-,Δ^+, Δ^-

Chemin

- Soient u et v deux sommets distincts d'un graphe G(V,E)
- Un chemin de u à v dans G est:
  - Une suite $u,u_0,u_1,\ldots,u_k,v$ de sommets 2 à 2 distincts tel que:
  - $(u,u_0)\in A$, $(u_k,v)\in E$ et $\forall i\in\{1,\ldots,k\}$ on ai (u_{i-1},u_{i})
- Le sommet u est l'origine du chemin
- Le sommet v est l'extrémité du chemin
- La longueur d'un chemin est le nombre d'arête qu'il possède

Chemin (Exemple)

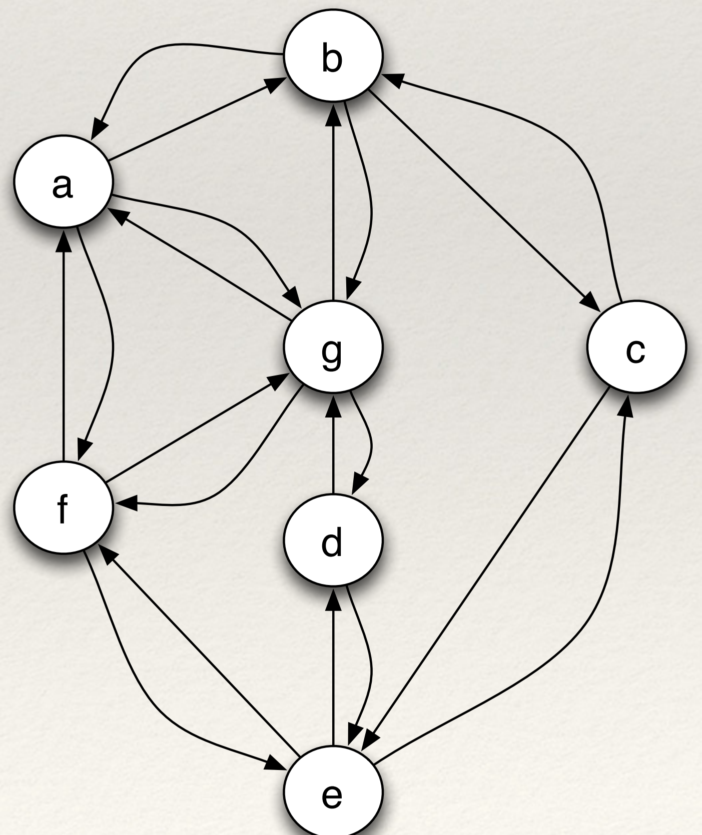


Définitions analogues

- Il y a analogie avec les graphes non orientés pour:
  - La distance
  - L'excentricité
  - Le rayon
  - Le diamètre
- De plus:
  - On parle de circuit et non de cycle

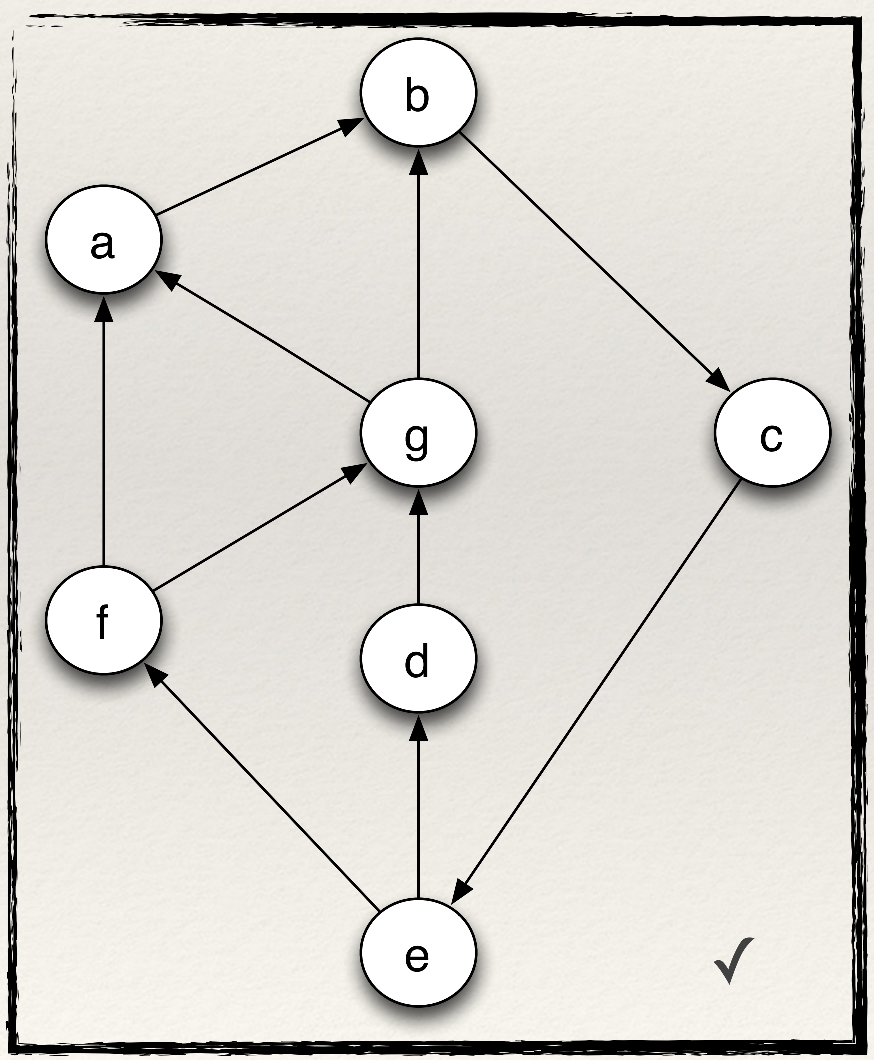
Graphe orienté symétrique

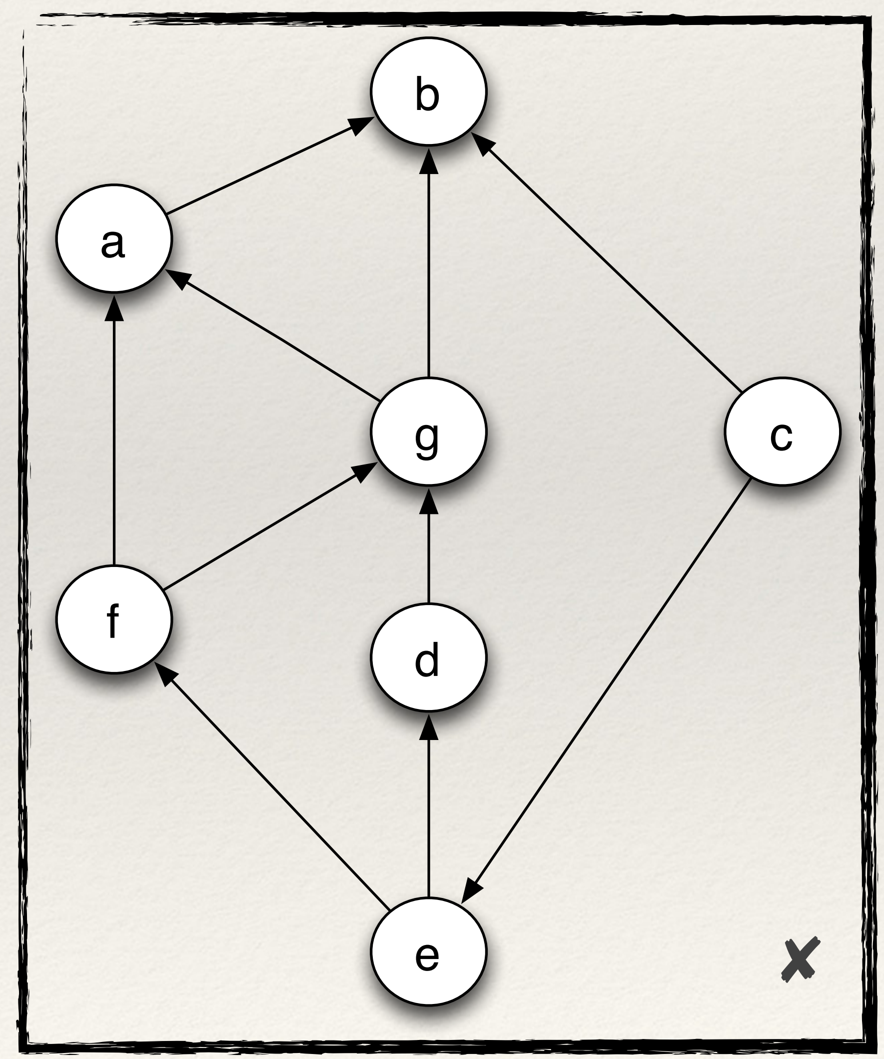
- Un graphe orienté G=(V,A) est symétrique ssi:
    - $\forall u,v \in V$, $u \neq v$, $(u,v) \in A$ et $(v,u) \in A$
- Remarque: Un graphe non orienté peu être vu comme un graphe orienté symétrique



Graphes orientés fortement connexes

- Un graphe orienté G(V,A) est fortement connexe si pour tout couple de sommets u,v il existe un chemin de u vers v.





Représentations machine

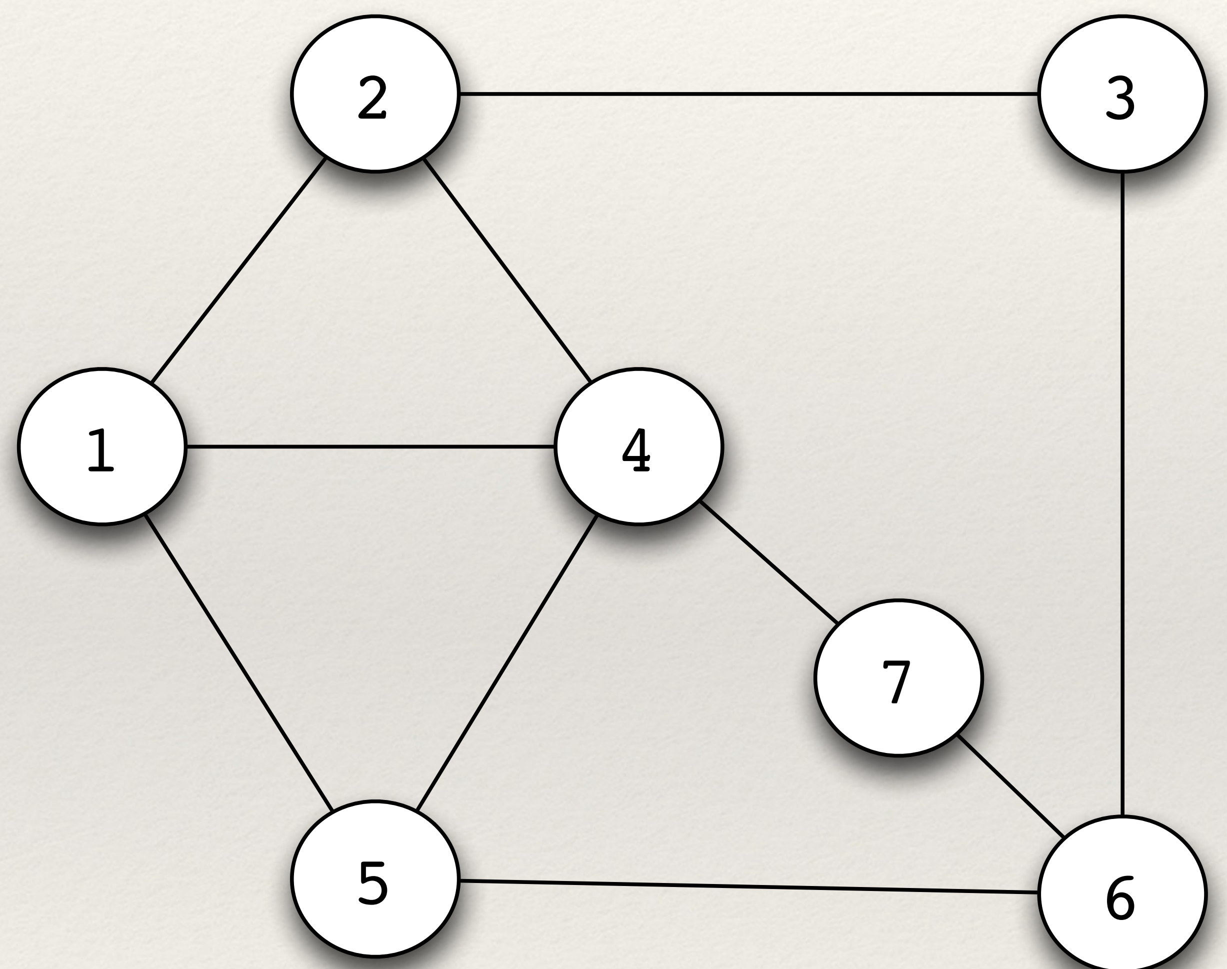
Représentation machine

- Une des difficulté pour travailler sur les graphes est de les représenter correctement en mémoire.
    - Sans utiliser trop de mémoire
    - En ayant un temps d'accès courts
- Remarque:
    - On codera souvent un graphe non orienté comme un graphe orienté symétrique.

Matrice d'adjacence

- Le plus simple des codages est une matrice carrée nxn (ou n=|V(G)|) d'éléments binaires
- Les n sommets du graphes sont représentés par des entiers de 1 à n
- Les arcs sont représenté de la façon suivante:
  - G[i][j]=1 si il y a un arc de i vers j dans G
  - G[i][j]=0 sinon

Matrice d’adjacence (exemple)



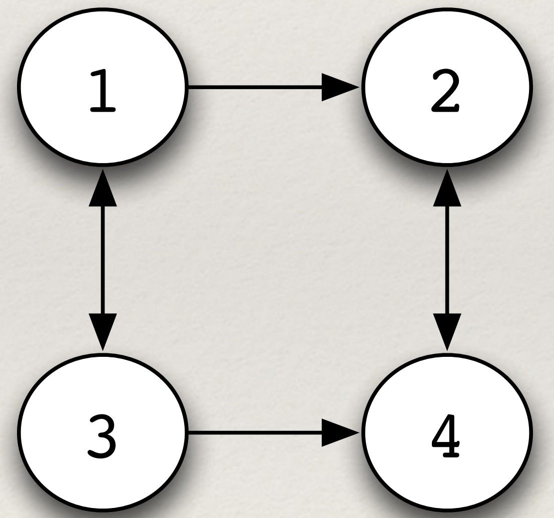
	1	2	3	4	5	6	7
1		1		1	1		
2	1		1	1			
3		1				1	
4	1	1			1		1
5	1			1		1	
6			1		1		1
7				1		1	

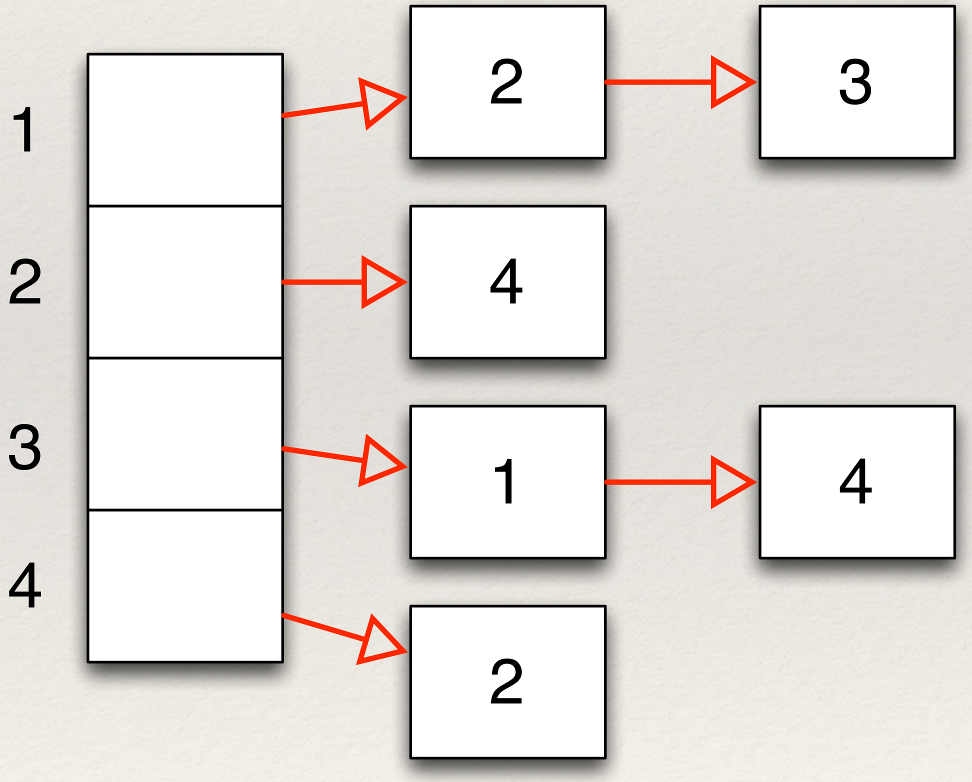
Matrice d'adjacence (Bilan)

- Avantages:
  - Très facile à construire
  - Accès très rapide à un arc particulier (constant)
  - Souple d'utilisation
- Inconvénients:
  - Occupation n^2 cases alors que le nombre d'arcs peut être bien moindre (beaucoup de 0)
  - Donc occupation mémoire importante

Liste d'adjacence

- On peut utiliser un tableau à n cases de pointeurs, chaque case i pointant vers la liste chaînés des voisins sortants (ou entrants)





Liste d'adjacence

- Avantages:
  - On ne code que les arcs réellement présent dans le graphe
- Inconvénients:
  - Plus compliqué à mettre en œuvre
  - Temps de recherche dépendant du degré du sommet

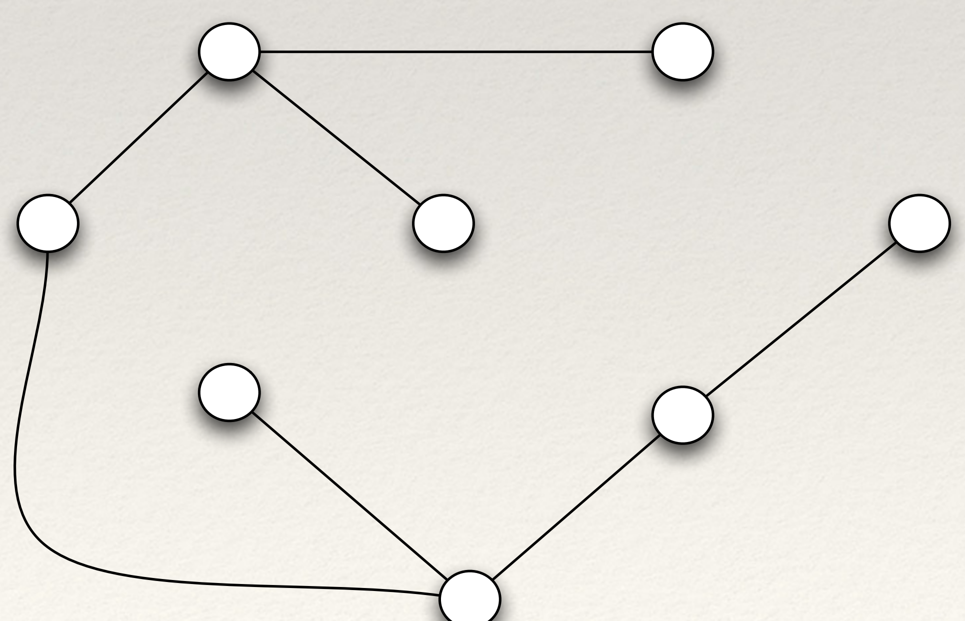
Familles particulières de graphes
Les Arbres

Les arbres

- Les arbres constituent une famille très importante des graphes
- Ils sont « minimaux » pour un certain nombre de propriétés.

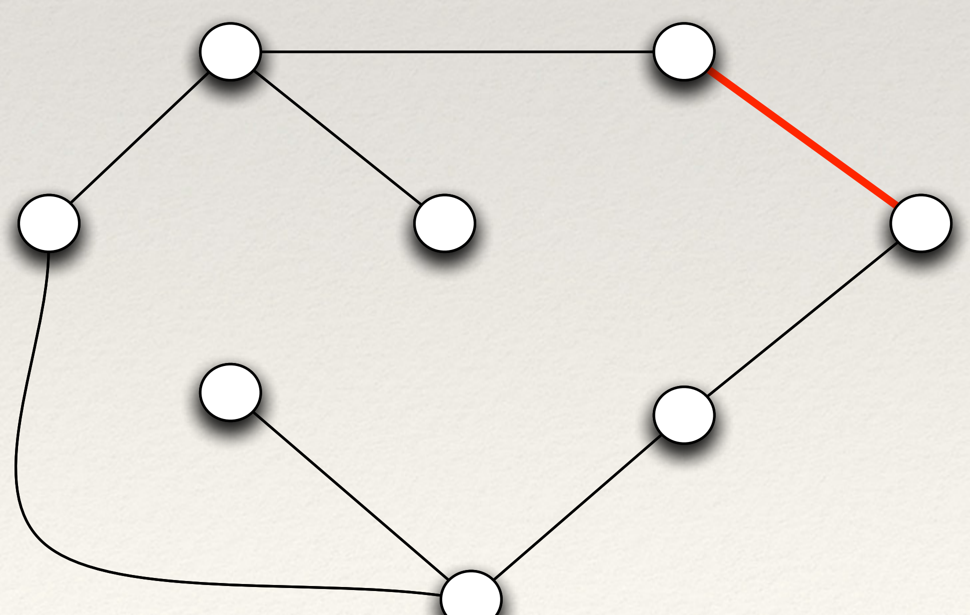
Caractérisation des arbres

- Soit T=(V,E) un graphe à n sommets ces propriétés sont équivalentes
  - T est un arbre
  - T est connexe et sans cycle
  - T est sans cycle et admet n-1 arêtes
  - T est connexe et admet n-1 arêtes



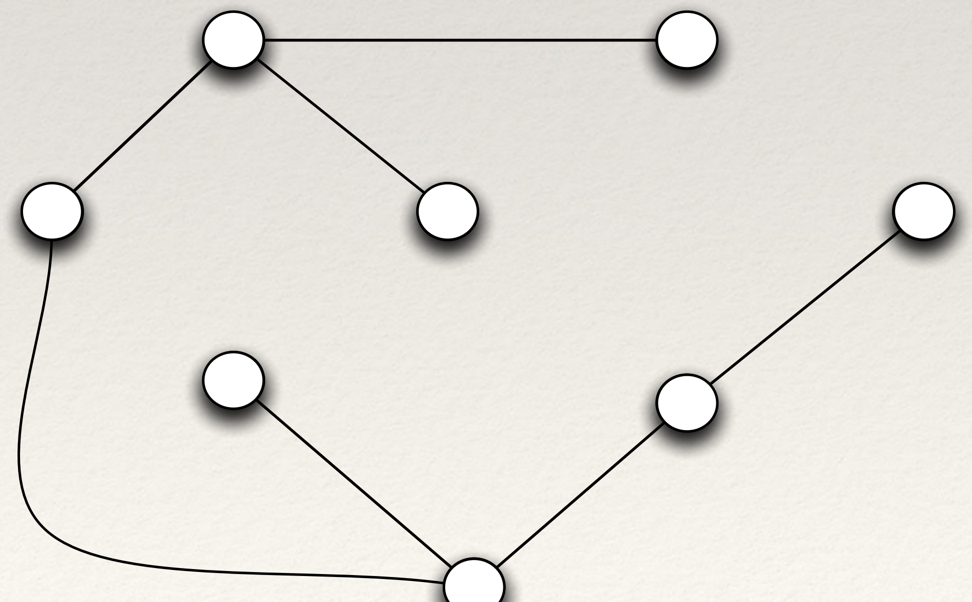
Caractérisation des arbres

- Soit T=(V,E) un graphe à n sommets ces propriétés sont équivalentes
  - T est un arbre
  - T est connexe et sans cycle
  - T est sans cycle et admet n-1 arêtes
  - T est connexe et admet n-1 arêtes
  - T est sans cycle et en ajoutant une arête on crée un cycle et 1 seul



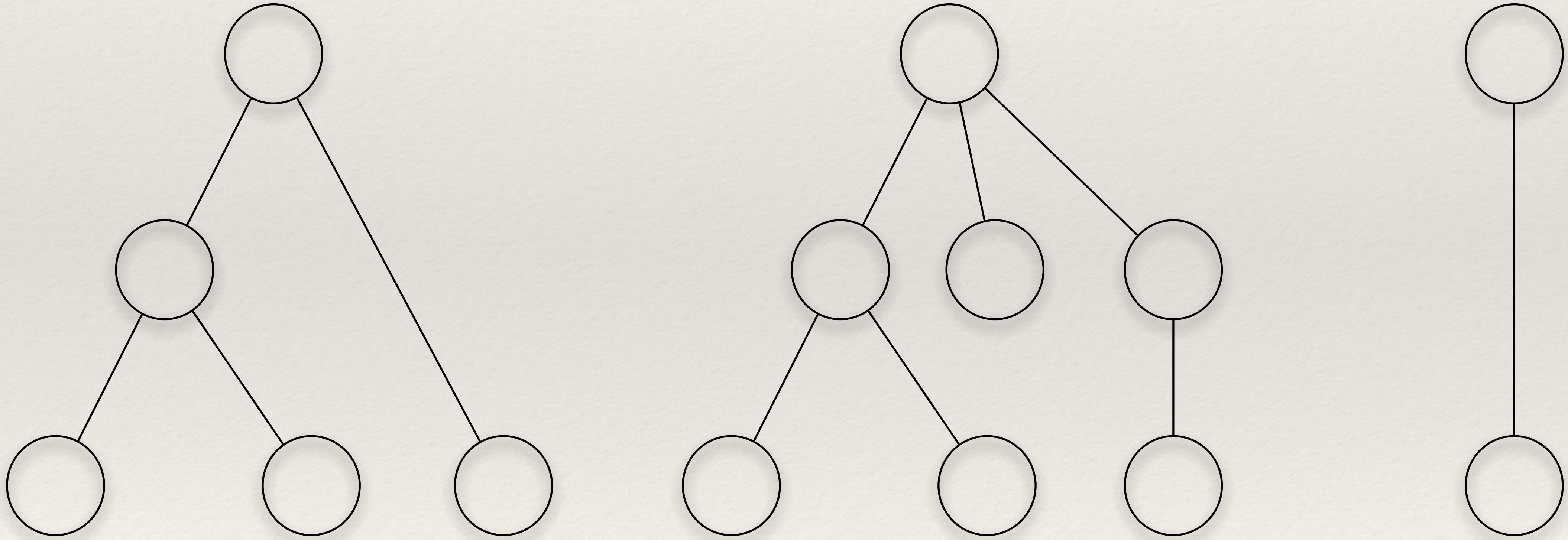
Caractérisation des arbres

- Soit T=(V,E) un graphe à n sommets ces propriétés sont équivalentes
  - T est un arbre
  - T est connexe et sans cycle
  - T est sans cycle et admet n-1 arêtes
  - T est connexe et admet n-1 arêtes
  - T est sans cycle et en ajoutant une arête on crée un cycle et 1 seul
  - T est connexe et si on supprime une arête quelconque, il ne l'est plus



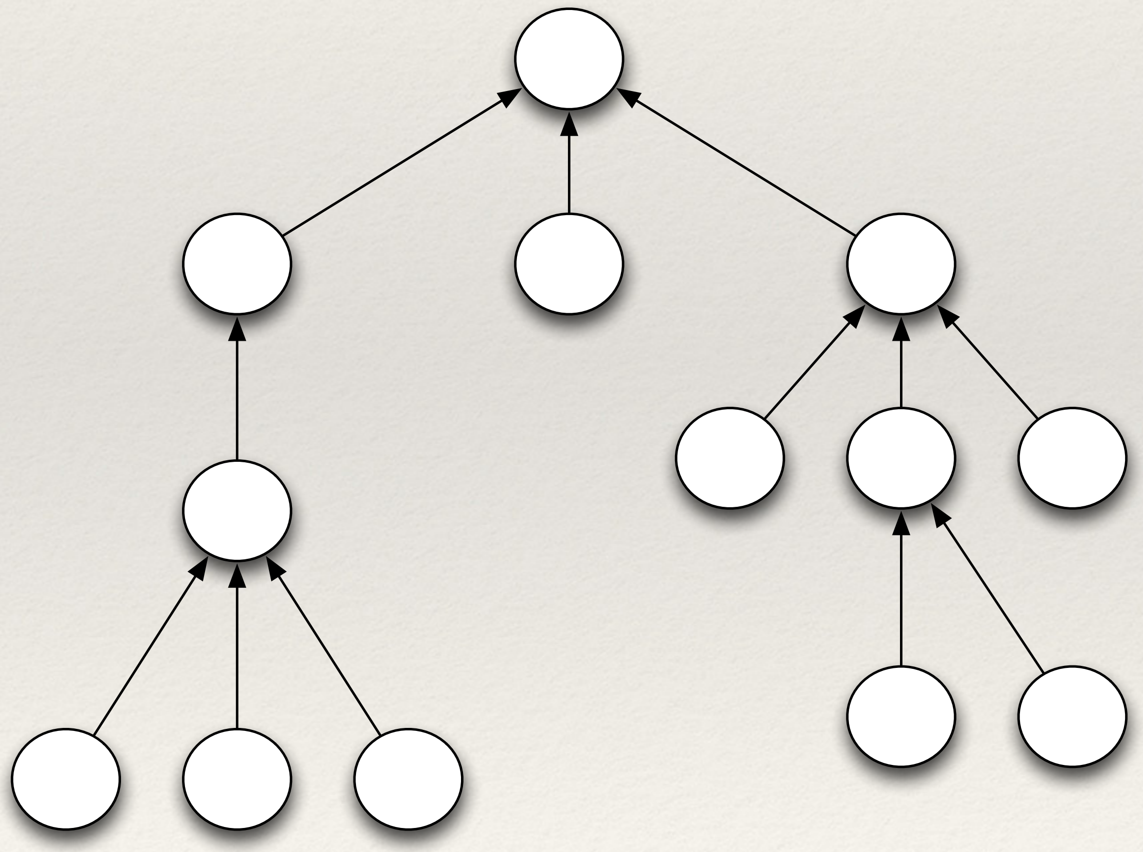
Forêt

Une forêt est un graphe dont les composantes connexes sont des arbres



Arborescence terminologie

- Un sommet peut avoir 0 ou plusieurs enfants
- Un sommet (sauf la racine) a exactement un parent



Chemins, ancêtres, descendants …

- Les ancêtres d'un sommet sont les sommets trouvés sur le chemin unique entre ce sommet et la racine
- Le sommet d est un descendant de a si et seulement si a est un ancêtre de d.
- Soit m_1, m_2, m_3, …, m_k une séquence de sommets :
  - Longueur du chemin = nombre d'arcs parcourus (k-1)

Généalogie

- La racine est un ancêtre de tous les sommets
- Chaque sommet est un descendant de la racine
- Les nœuds ayant le même parents sont une fratrie
- Un sommet n et tous ses descendants = sous-arbre

Feuilles et sommets internes

- La racine est ancêtre de tous les sommets
- Une feuille est sommet qui n’a pas d’enfant
- Un sommet interne est un sommet qui a au moins un enfant
- Tout nœud de l’arbre est :
  - Soit une feuille
  - Soit un sommet interne

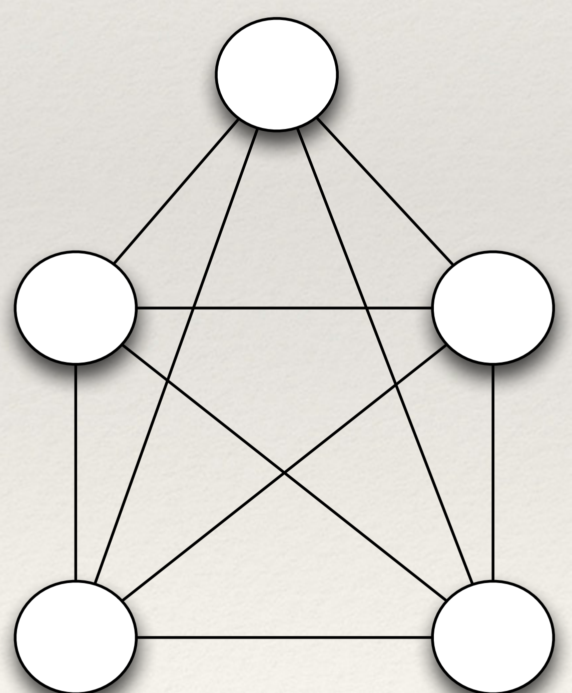
Hauteur et profondeur

- La hauteur d'un sommet n est la longueur du plus long chemin depuis la racine jusqu'à n.
- La hauteur d'un arbre :
  - max {h(x), x sommet de l'arbre}

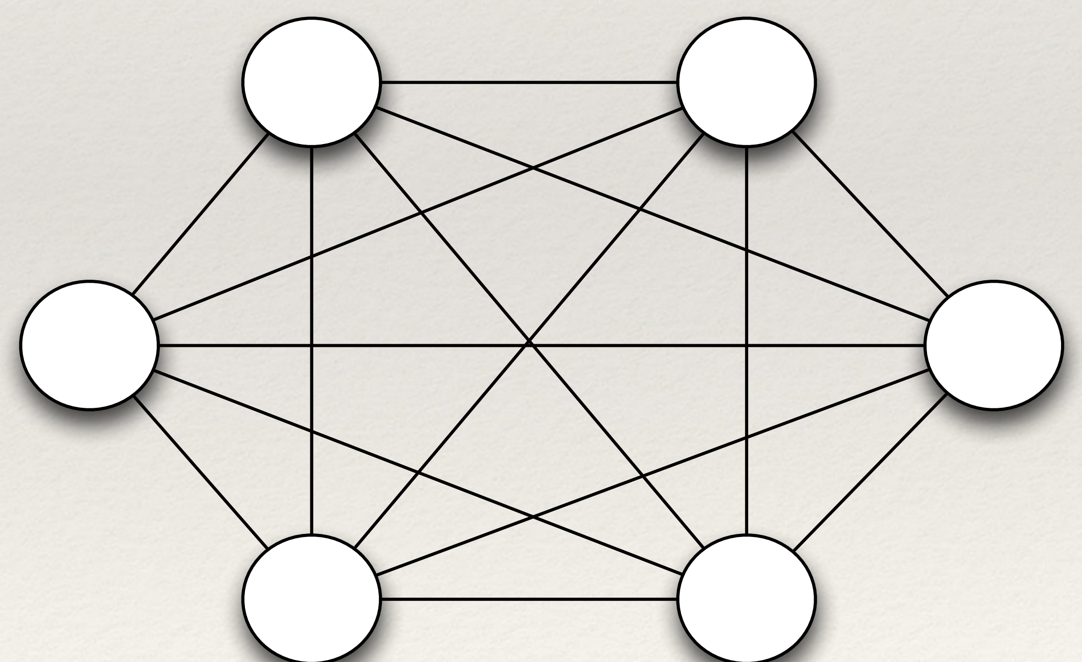
Autres familles particulières de graphes

Graphe complet

- Soit K_n un graphe à n sommets, (n entier) tel que:
- $V=\{1,\ldots,n\}$ et $E=\{(i,j):\forall i,j\in V, i\neq j\}$
- Autrement dit il existe une arête entre chaque paire de sommets.



K5

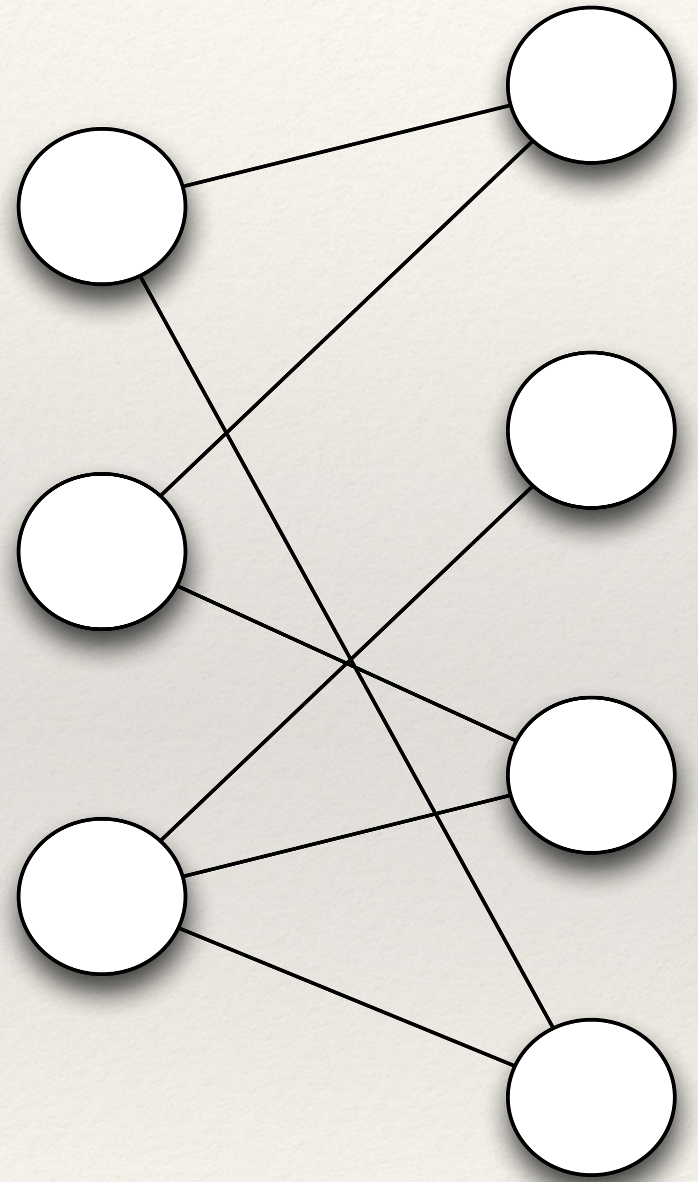


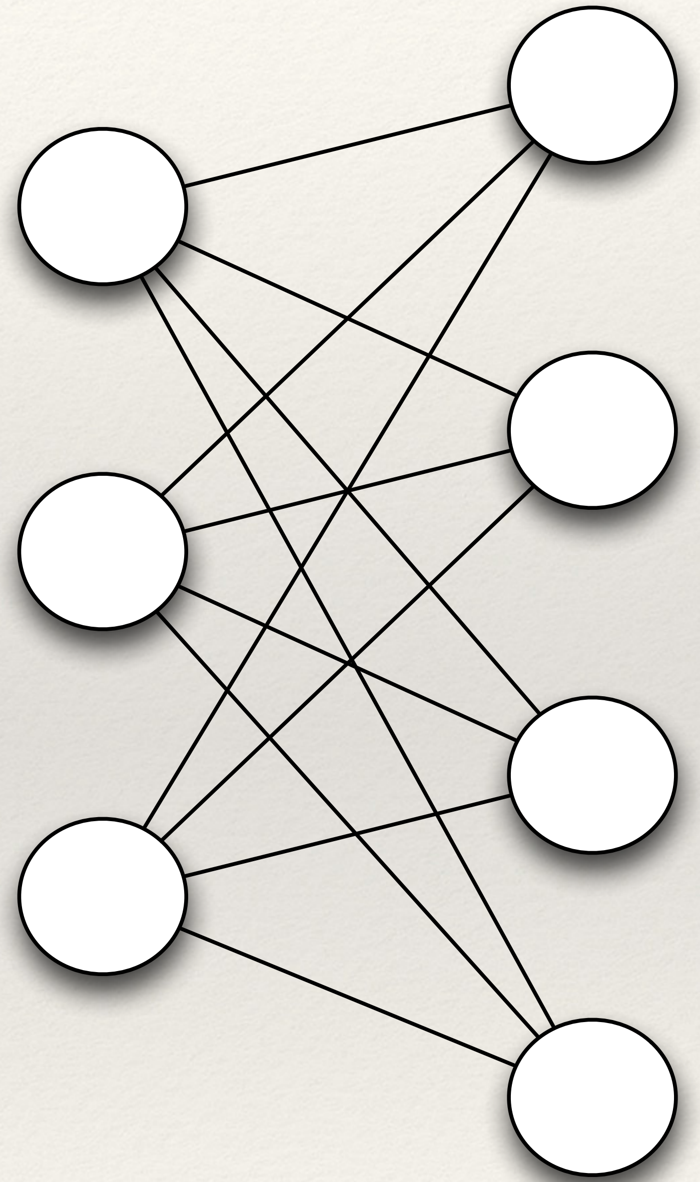
K6

Graphe biparti

- Un graphe G(V,E) est dit biparti si
- On peut diviser l'ensemble de ses sommets en 2 sous-ensemble X_1 et X_2 tel que
- $X_1 \cup X_2 = V$ et $X_1 \cap X_2 = \emptyset$
- Toute arête $a \in E$ a une extrémité dans X_1 et l'autre dans X_2.
- On note se graphe par G=(X1,X2,E)

Biparti représentation

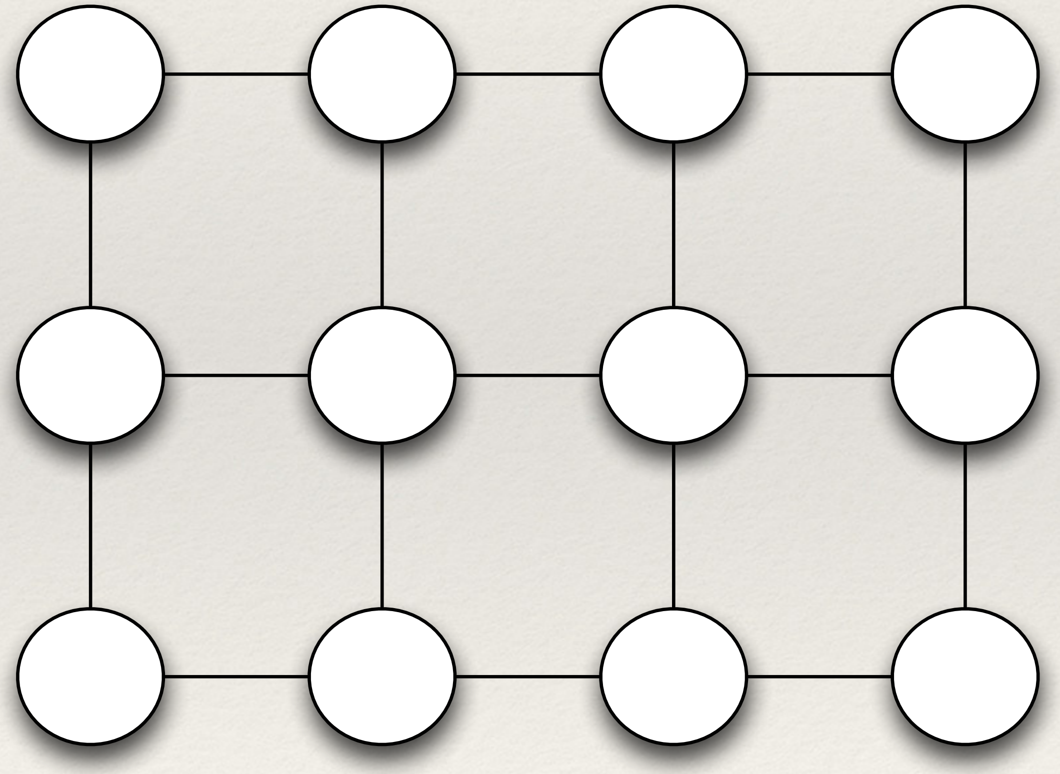




Biparti complet

Grille

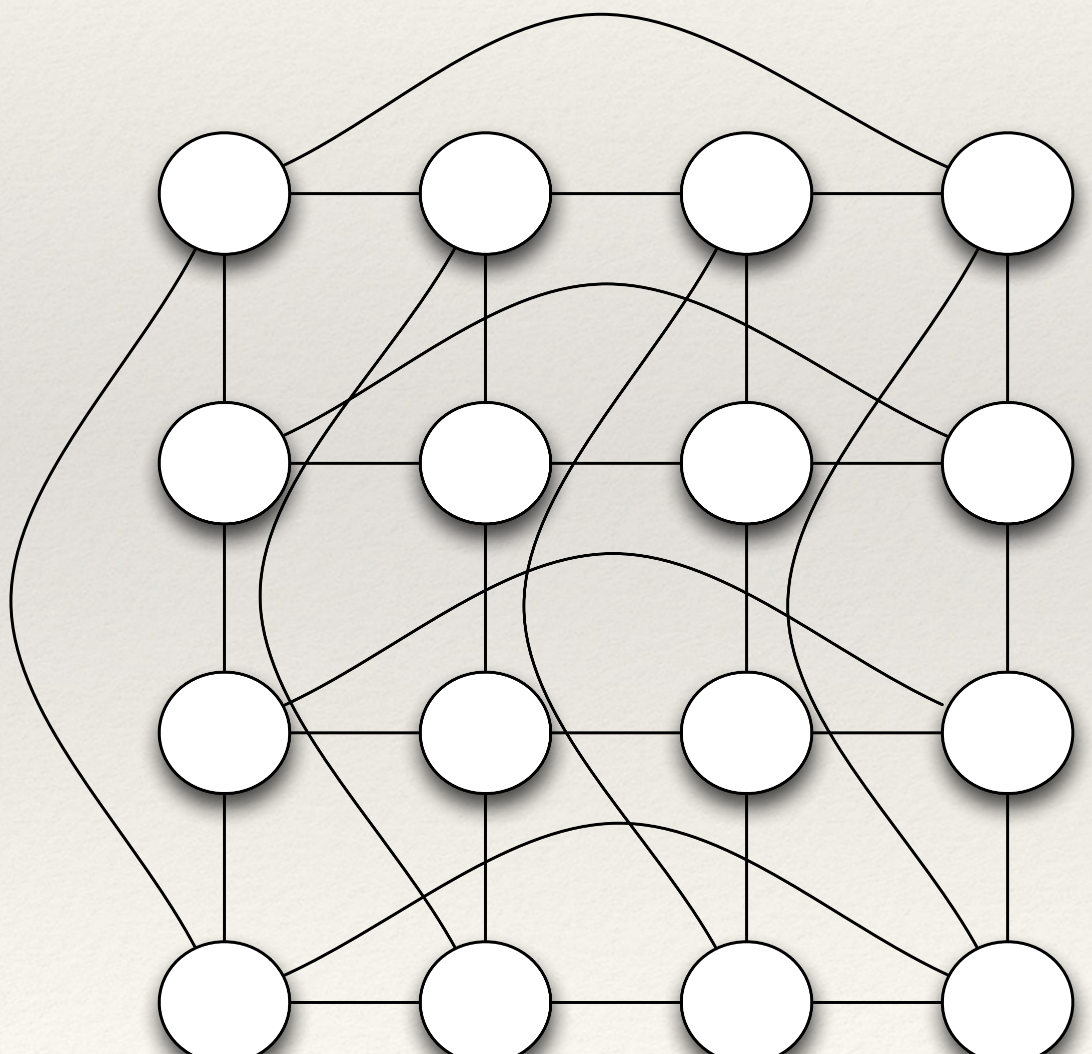
- Soit Gr_{pxq} un graphe à n=p.q sommets, (p,q entiers).
- V={(i,j): 0≤i≤p-1, 0≤j≤q-1}
- E={(i,j)(i,j+1): 1≤i≤p, 1≤j≤q-1 }∪ {(i,j)(i+1,j): 1≤i≤p-1, 1≤j≤q }



Gr3x4

Tore

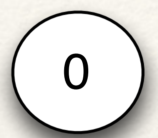
- Soit Tr_{pxq} un graphe à n=p.q sommets, (p,q entiers).
- V={(i,j): 0≤i≤p-1, 0≤j≤q-1}
- E={(i,j)(i,j+1mod p): 0≤i≤p-1, 0≤j≤q-1 }∪ {(i,j)(i+1mod q,j): 0≤i≤p-1, 0≤j≤q-1 }



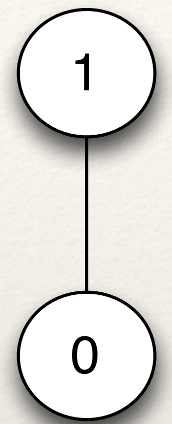
Hypercube

- Soit H_d un graphe à n=2d sommets, (d entier).
- L'ensemble fini des sommets de H_d sont tous des d-uplets (ordonnés) de 0 et de 1.
- Autrement dit:
  - chaque sommet porte une étiquette utilisant un alphabet {0,1} de longueur d,
  - Deux sommets sont adjacents si leurs étiquettes ne diffèrent que d'un symbole.
- $V=\{(x_1,\ldots,x_d): \forall i \in \{1,\ldots,d\}\ xi \in \{0,1\}$
- $E=\{(x_1,\ldots,x_d)(y_1,\ldots,y_d)\ \exists! i\ x_i \neq x_j)$

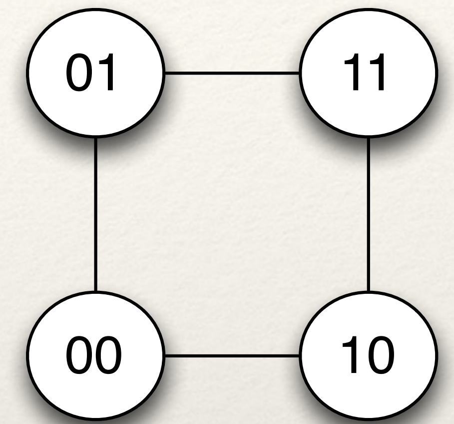
Hypercube représentation



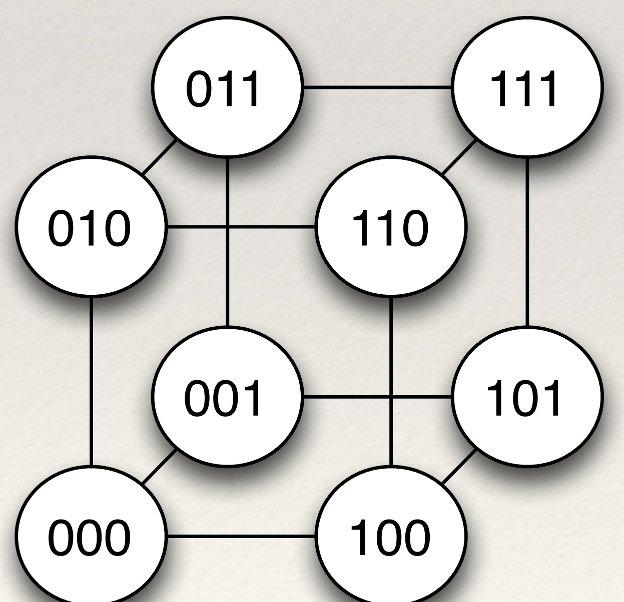
H_0



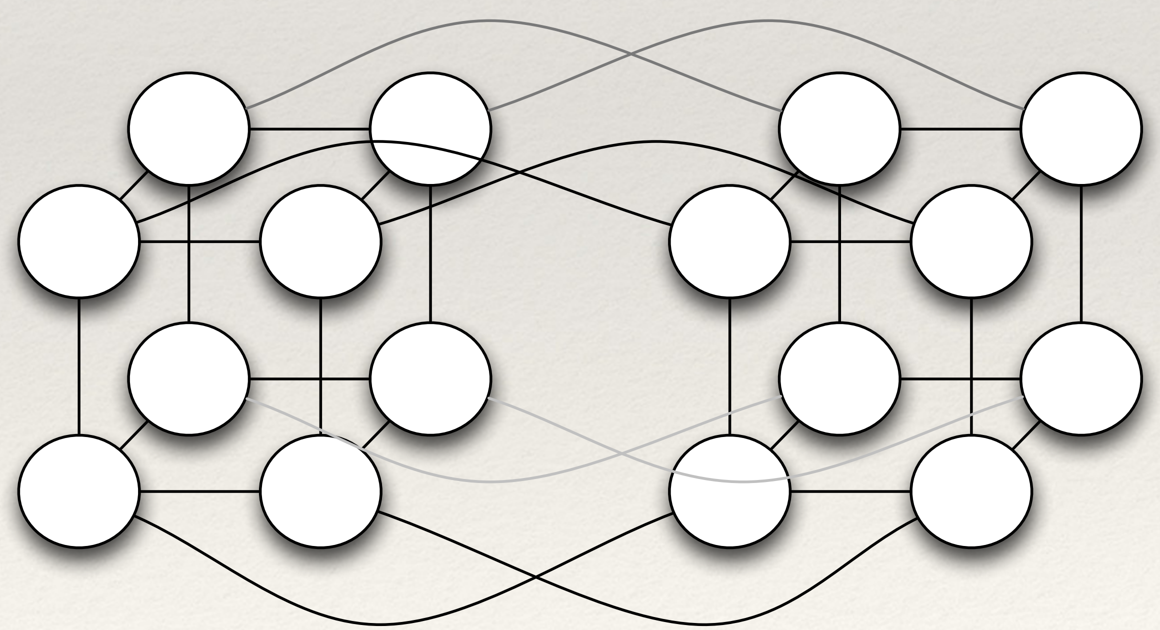
H_1



H_2



H_3



H_4

Remarque