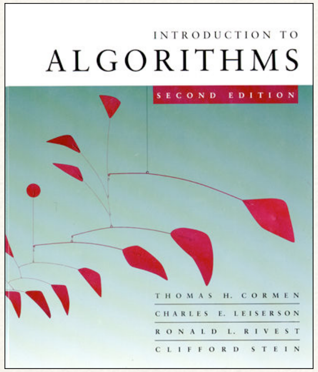
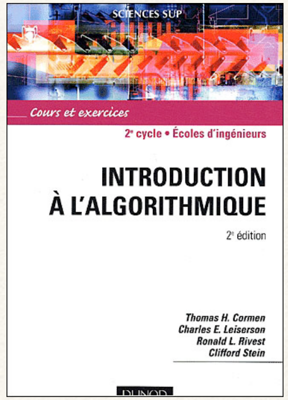




Flots maximum

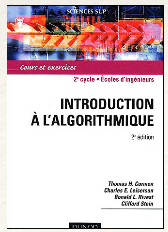
Théorie des graphes

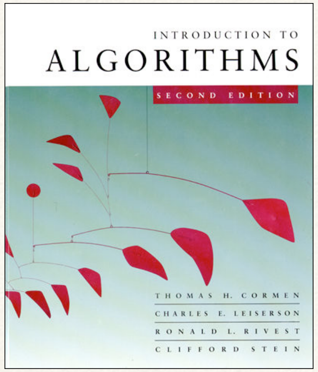
Cours de Lélia Blin

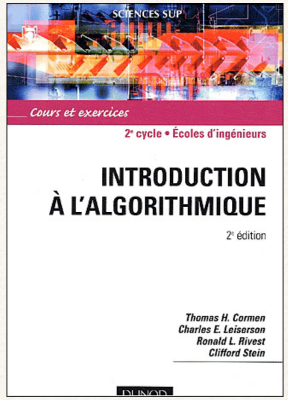
3eme année de Licence

Plan

- Réseaux de transport
  - Notions de réseaux de transport et de flot,
  - Définition du problème du flot maximum
- Méthode de Ford-Fulkerson
  - Flots maxima







Réseaux de transport

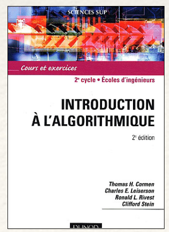
Théorie des graphes

Cours de Lélia Blin

3eme année de Licence

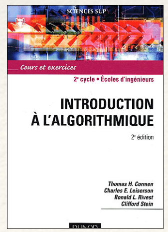
Flots et réseaux de transport

- Un réseau de transport $G = (S, A)$:
  - Graphe orienté
  - Chaque arc $(u, v) \in A$ a une **capacité** $c(u, v) \geq 0$.
  - Si $(u, v) \notin A$, on suppose que $c(u, v) = 0$.

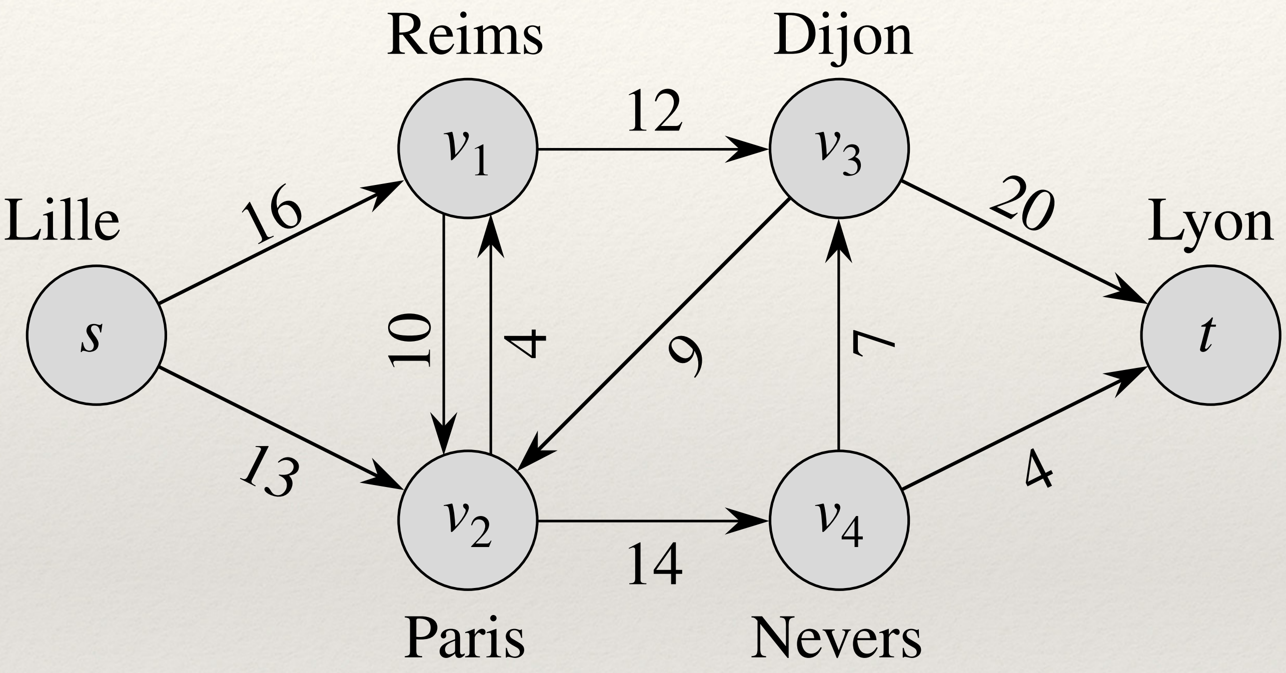


Source et puits

- Dans un réseau de transport, deux sommets ont un statut particulier :
  - La **source** s et le **puits** t.
- Chaque sommet se trouve sur un certain chemin reliant la source au puits.
  - Pour tout sommet $v \in S$, il existe un chemin depuis s passant par v et allant à t.
- Le graphe est donc connexe et $|A| \geq |S| - 1$.

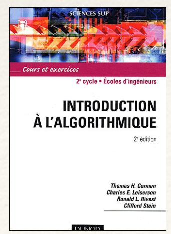


Exemple (problème du transporteur Max & Fils)

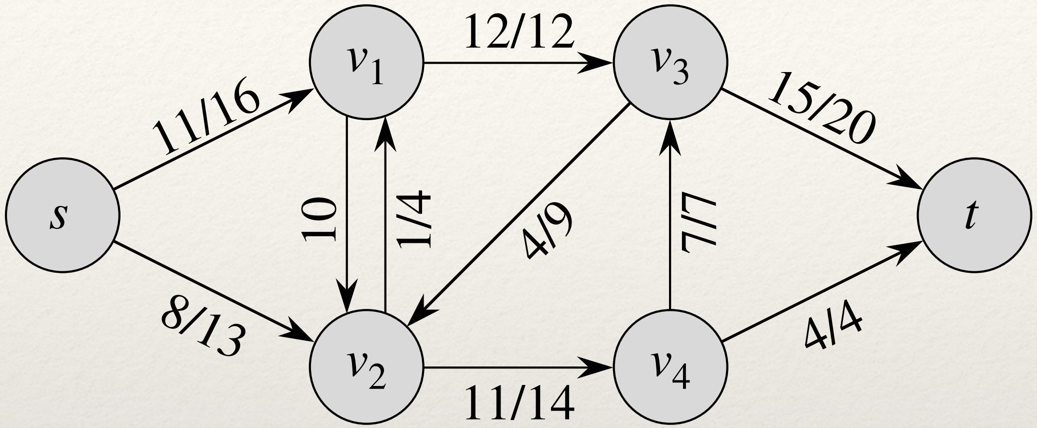


(a)

- L'usine de Lille est la source s et l'entrepôt de Lyon est le puits t.
- Le trajet traverse plusieurs villes intermédiaires, mais on ne peut convoyer plus de c(u, v) rouleaux entre les villes u et v
- Figure (a): chaque arc est étiqueté avec sa capacité.

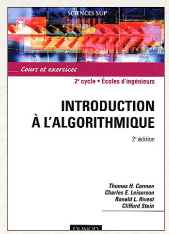


Exemple



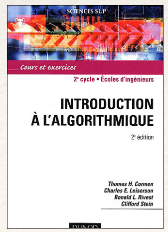
(b)

- Figure (b): Un flot f de G de valeur | f | = 19.
- Seuls les flots positifs du réseau sont montrés.
- Si f(u,v) > 0, l'arc (u,v) est étiqueté par f(u,v)/c(u,v).
- La notation slash sert simplement à séparer le flot et la capacité
- Si f(u, v) 0, l'arc (u, v) est étiqueté uniquement avec sa capacité.



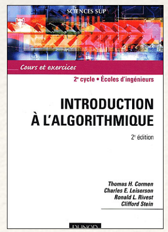
Flots

- Soit G = (S, A) un réseau de transport avec une fonction de capacité c.
- Le sommet s est la source du réseau et le sommet t le puits.
- Un flot de G est une fonction à valeurs réelles $f : S \times S \rightarrow R$ qui satisfait aux trois propriétés suivantes :
  - **Contrainte de capacité**
  - **Symétrie**
  - **Conservation du flot**



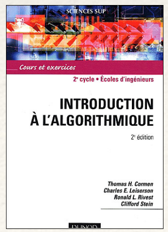
Contrainte de capacité

Pour tout $u, v \in S$, on exige $f(u,v) \leqslant c(u,v)$



Symétrie

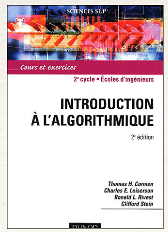
Pour tout $u, v \in S$, on exige $f(u, v) = -f(v, u)$.



Conservation du flot

Pour tout $u \in S - \{s, t\}$, on exige

$$\sum_{v \in S} f(u, v) = 0 \, .$$



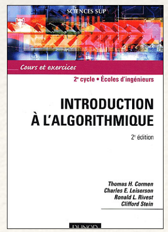
Flux

- La quantité f (u, v), qui peut être positive, nulle ou négative, est appelée flux du sommet u au sommet v.

- La valeur d'un flot f est définie par

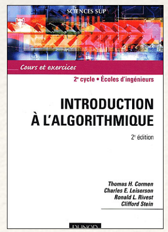
$$|f| = \sum_{v \in S} f(s, v) \,, \qquad (1)$$

- Autrement dit, le flot total partant de la source.
- Ici, la notation $|\cdot|$ indique la valeur de flot, pas une valeur absolue ni un cardinal d'ensemble.
- Dans le problème du flot maximum, on part d'un réseau de flot G de source s et de puits t et on souhaite trouver un flot de valeur maximum.



Les trois propriétés des flots

- La contrainte de capacité dit simplement que le flux d'un sommet vers un autre ne doit pas excéder la capacité donnée.
- La propriété de symétrie est une commodité de notation qui dit que le flux d'un sommet u vers un sommet v est égal à l'opposé du flux allant en sens inverse.
- La propriété de conservation du flot dit que le flot total sortant d'un sommet autre que la source ou le puits à pour valeur 0.



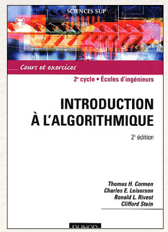
Les trois propriétés des flots

- En s'aidant de la symétrie, on peut réécrire la propriété de conservation du flot sous la forme

$$\sum_{u \in S} f(u, v) = 0$$

  - pour tout $v \in S - \{s, t\}$. Autrement dit, le flot total entrant dans un sommet vaut 0.

- Si ni (u,v) ni (v,u) n'est dans A, il ne peut pas y avoir de flot entre u et v et $f(u, v) = f(v, u) = 0$.

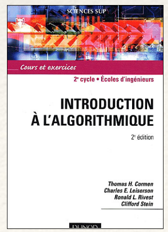


Les trois propriétés des flots

- Notre dernière observation sur les propriétés de flot concerne les flots à valeur positive.
- Le flux positif total entrant dans un sommet v est défini par

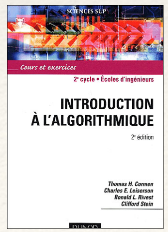
$$\sum_{\substack{u \in S \\ f(u,v)>0}} f(u,v) \,. \qquad (2)$$

- Le flux positif total sortant d'un sommet est défini symétriquement.
- Le flux net total en un sommet est égal au flux positif total sortant du sommet, moins le flux positif total entrant dans le sommet.



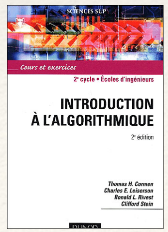
Interprétation

- Interprétation de la propriété de conservation du flux
  - Le flux positif total entrant dans un sommet autre que la source ou le puits doit être égal au flux positif total sortant du sommet.
  - Cette propriété, selon laquelle le flux net total en un sommet doit valoir 0, porte souvent le nom informel de « flux entrant égale flux sortant ».



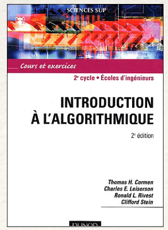
Exemple (problème du transporteur Max & Fils)

- Un réseau de flot peut modéliser
  - Un problème de convoyage.
- L'entreprise Max & Fils possède:
  - Une usine (source s) à Lille
    - Fabrication du tissu
  - Un entrepôt (puits t) à Lyon
    - Stockage.



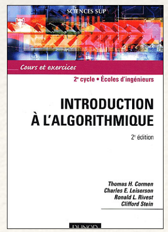
Exemple (problème du transporteur Max & Fils)

- Max & Fils fait appel à une autre entreprise pour convoyer par camion le tissu entre l'usine et l'entrepôt.
- Les camions ne peuvent pas emprunter n'importe quelle route (arc)
- Les camions ont des tonnages limités
- Max & Fils peut convoyer au plus c(u, v) rouleaux par jour entre chaque paire de villes u et v de la figure (a).



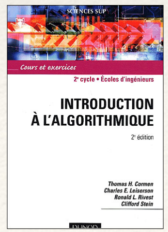
Exemple (problème du transporteur Max & Fils)

- Max & Fils ne peut décider
  - ni des routes empruntées
  - ni des limites de tonnage
- Le réseau de transport montré à la figure(a) ne peut plus être modifié.
- Le but de Max & Fils est de déterminer:
  - Le plus grand nombre p de rouleaux qui peuvent être convoyés par jour
  - Produire en conséquence cette quantité
  - Rm: Il est inutile de produire plus de tissu qu'il n'en sera convoyé vers l'entrepôt.



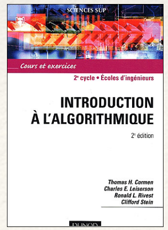
Exemple (problème du transporteur Max & Fils)

- Max & Fils n'est pas concerné par le temps requis pour acheminer un rouleau donné entre la fabrique et l'entrepôt ;
- Il s'occupe uniquement de faire sortir p rouleaux par jour de l'usine et de faire arriver p rouleaux par jour à l'entrepôt.



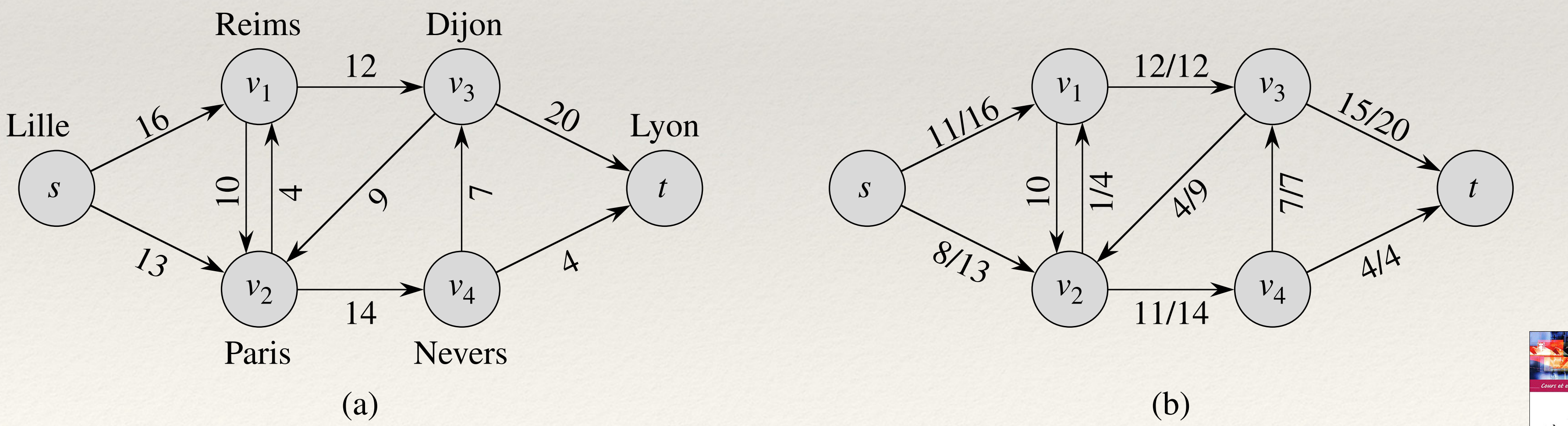
Modélisation (Max & Fils)

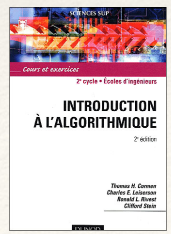
- Il semble approprié de modéliser le « flux » de livraisons par un flot de transport;
- En effet:
  - le nombre de rouleaux expédiés chaque jour d'une ville à l'autre est soumis à une contrainte de capacité.
- En outre:
  - Il faut respecter la conservation de flot car, dans un état stable, le débit de produits entrants dans une ville intermédiaire doit être égal au débit de produits qui en partent. Sinon, les produits s'accumuleraient dans les villes intermédiaires.



Modélisation (Max & Fils)

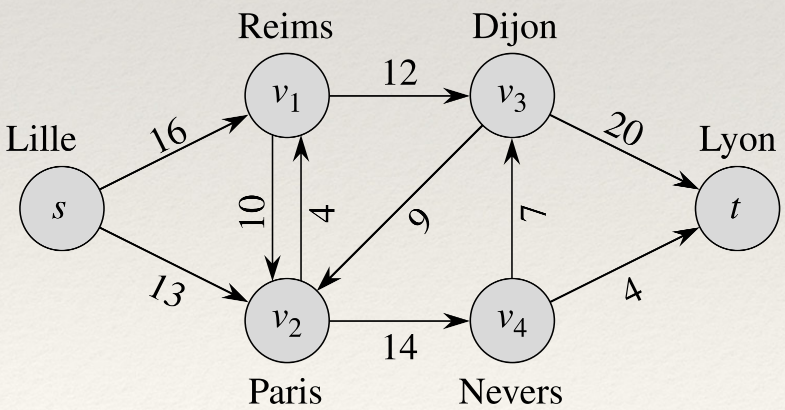
- Il y a une différence subtile entre les livraisons et les flots.
- Max et Fils peut
  - Expédier du tissu de Reims (v_1) à Paris (v_2),
  - Mais peut aussi faire des expéditions en sens inverse.



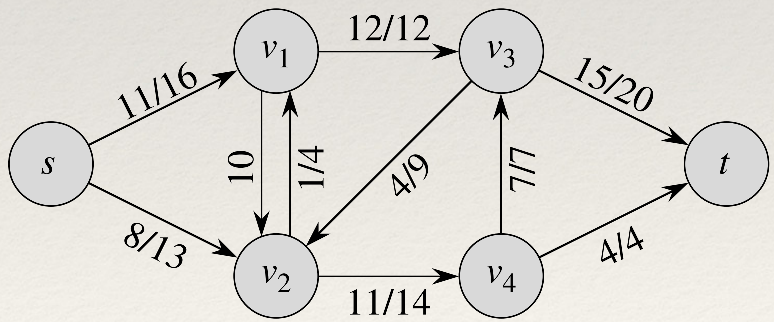


Modélisation (Max & Fils)

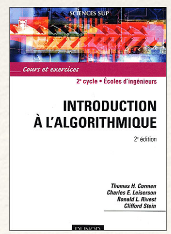
- Supposez qu'ils expédient
  - 8 rouleaux par jour de Reims à Paris
  - et 3 rouleaux par jour de Paris à Reims.
- Il peut sembler naturel de représenter ces expéditions directement par des flux.
- Impossible.
  - La contrainte de symétrie exige que $f(v_1,v_2) = -f(v_2,v_1)$, ce qui n'est visiblement pas le cas si l'on a $f(v_1,v_2) = 8$ et $f(v_2,v_1) = 3$.



(a)

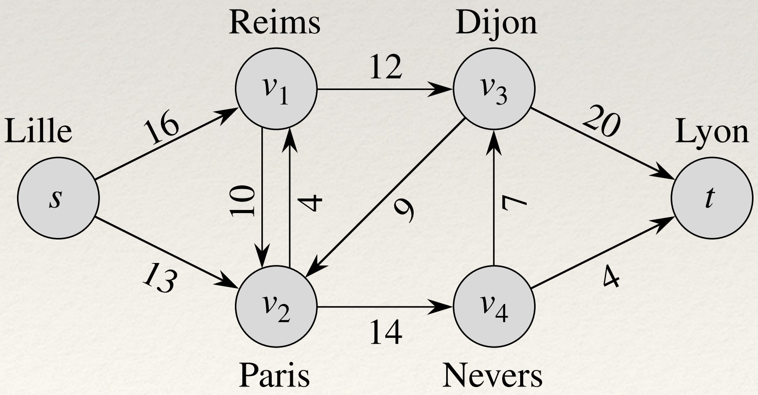


(b)

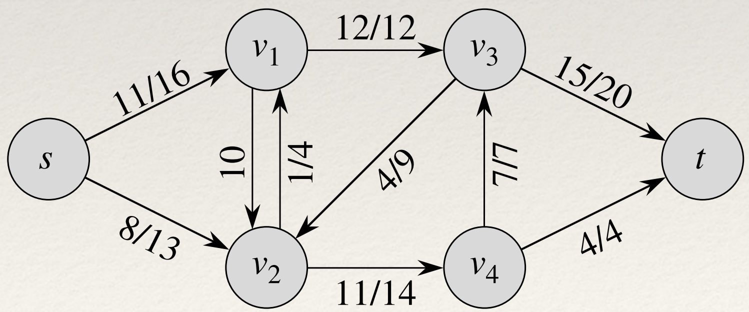


Modélisation (Max & Fils)

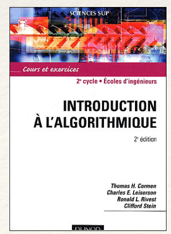
- Max et Fils pourrait comprendre qu'il est inutile d'expédier
  - 8 rouleaux par jour de Reims à Paris
  - et 3 rouleaux par jour de Paris à Reims,
- Alors qu'il suffit d'expédier
  - 5 rouleaux de Reims à Paris
  - et 0 rouleaux de Paris à Reims



(a)

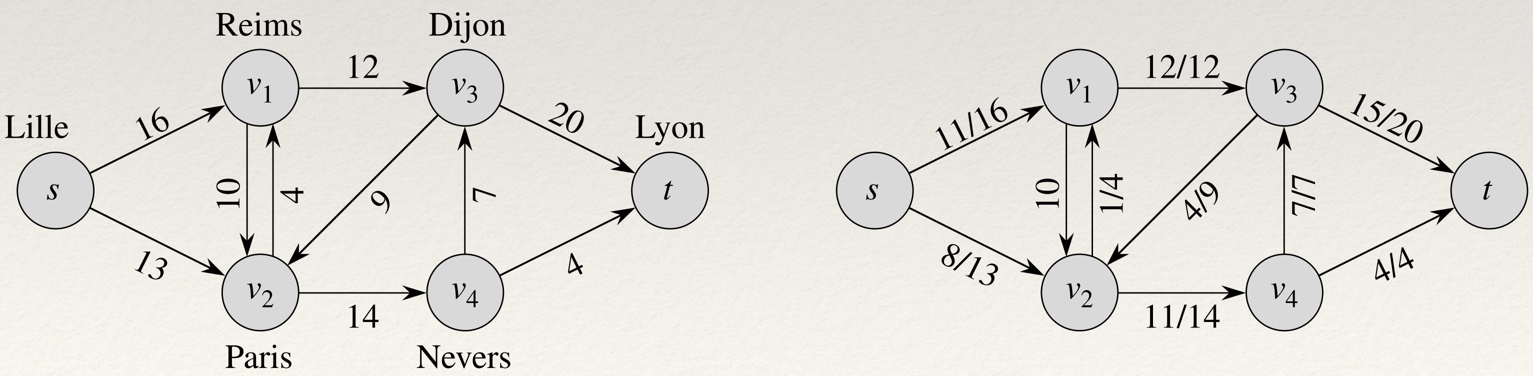


(b)

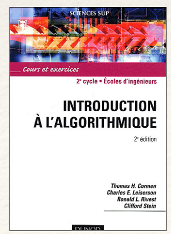


Modélisation (Max & Fils)

- Représentons ce dernier scénario par un flux :
  - On a $f(v_1,v_2)= 5$ et $f(v_2,v_1) = -5$.
  - En fait, 3 des 8 rouleaux quotidiens de v_1 à v_2 sont annulés par 3 rouleaux quotidiens de v_2 à v_1.

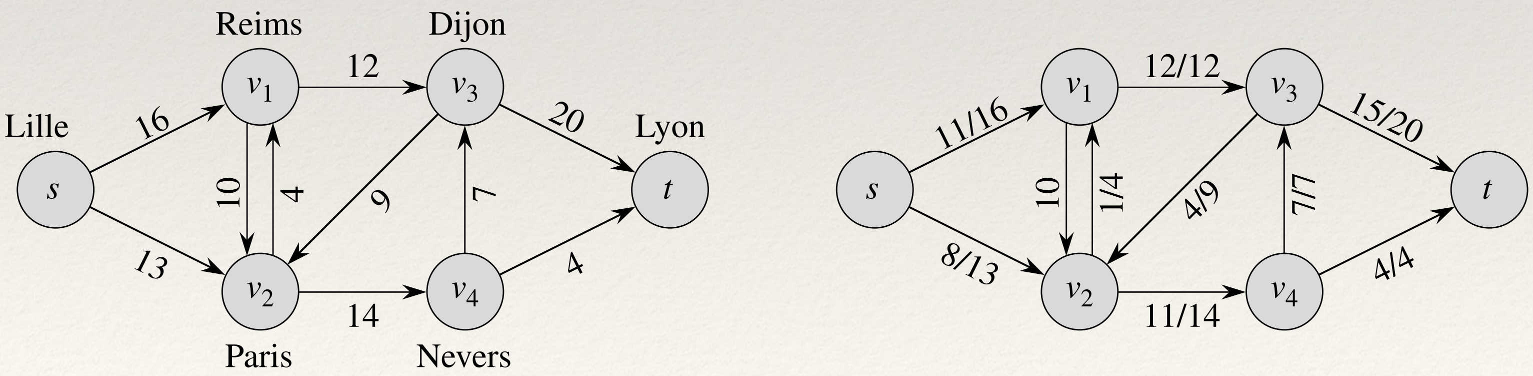


(a) (b)

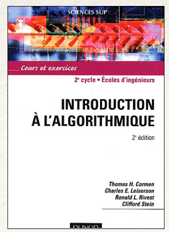


Modélisation (Max & Fils)

- En général, l'annulation permet de représenter les expéditions entre deux villes par un flux qui est positif le long d'un au plus des deux arcs reliant les sommets concernés.

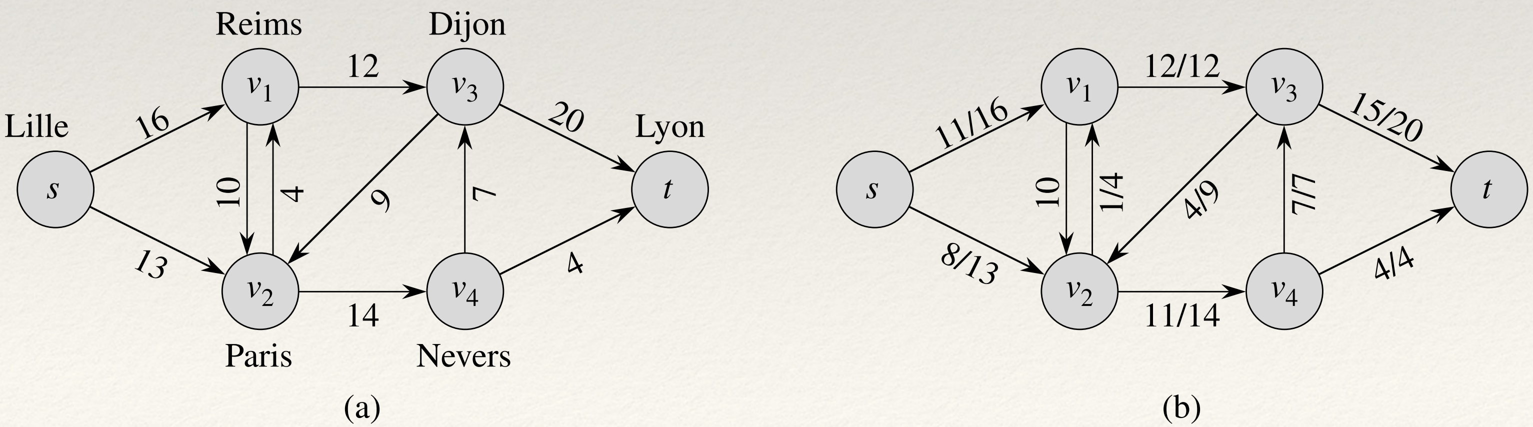


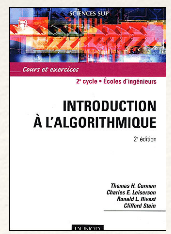
(a) (b)



Modélisation (Max & Fils)

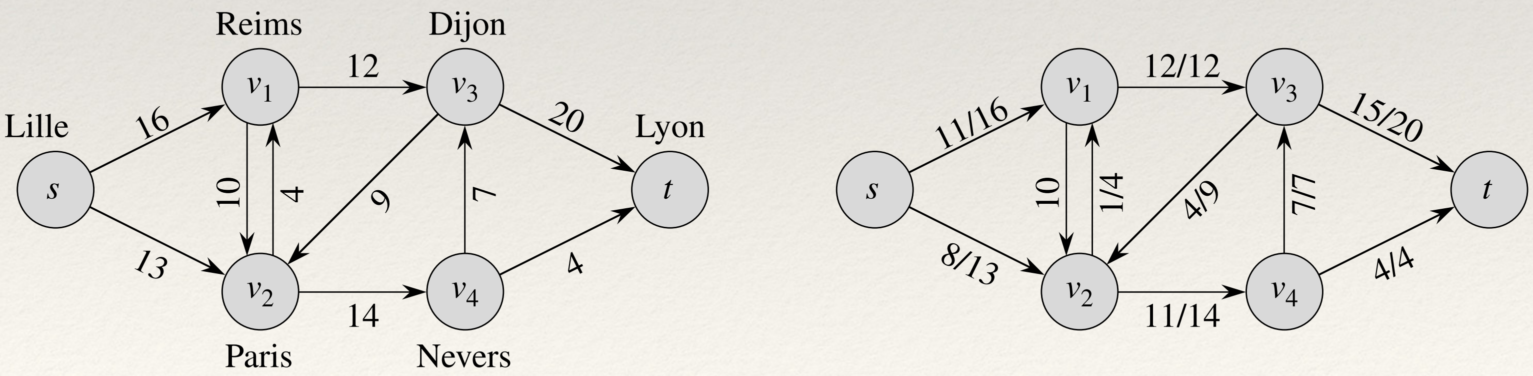
- En clair :
  - Toute situation dans laquelle il y a des expéditions dans les deux sens
  - Peut être transformée, moyennant annulation,
  - En une situation équivalente dans laquelle
    - Les expéditions se font dans un seul sens (le sens du flux positif).



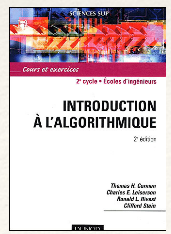


Modélisation (Max & Fils)

- Etant donné un flot f engendré, par exemple, par des expéditions physiques, on ne peut pas reconstruire les expéditions exactes.
- Si l'on sait que f(u,v) = 5, cela peut venir de ce que 5 unités ont été expédiées de u à v, ou de ce que 8 unités ont été expédiées de u à v et 3 de v à u.

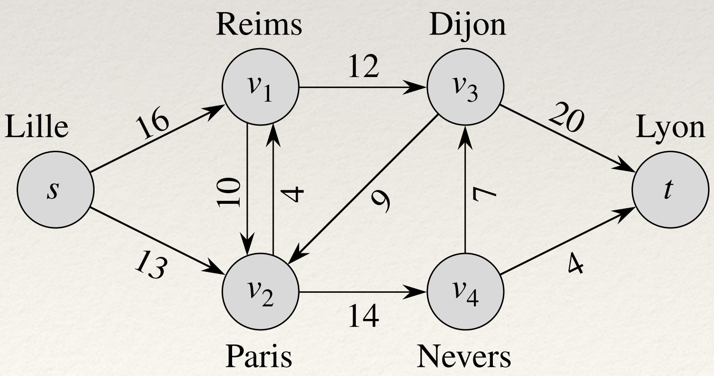


(a) (b)

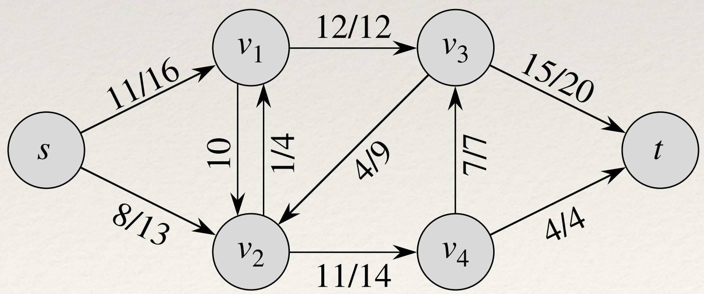


Modélisation (Max & Fils)

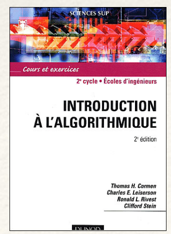
- En général, on ne se soucie pas des détails concrets sous-jacents à la circulation des produits ; pour chaque paire de sommets, on s'intéresse uniquement au montant net qui circule entre ces deux sommets.



(a)

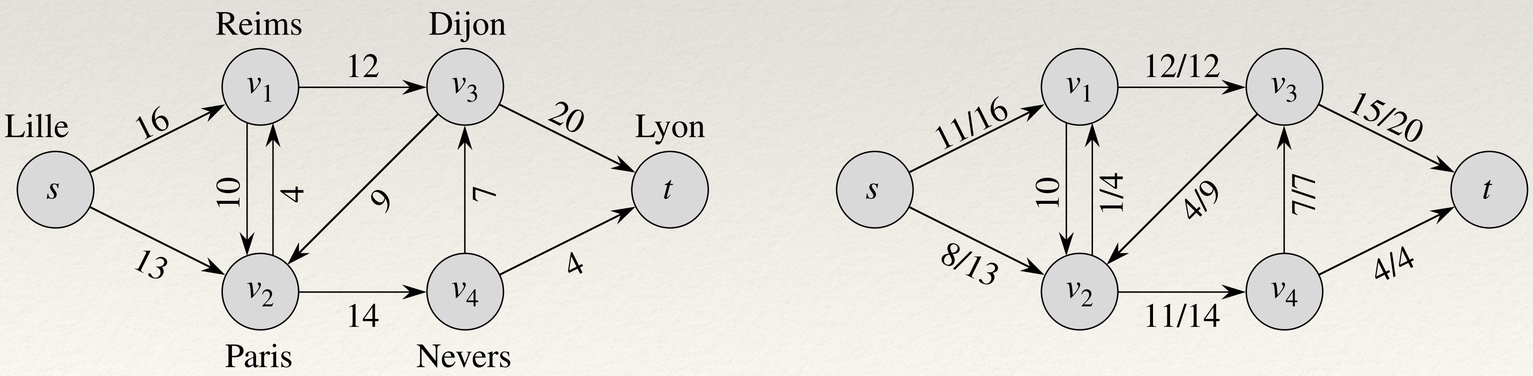


(b)

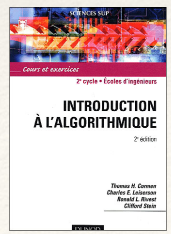


Modélisation (Max & Fils)

- Si, en revanche, l'on se soucie des détails concrets sous-jacents au transport,alors il faut employer un modèle différent, un qui conserve des informations sur les expéditions dans les deux sens.

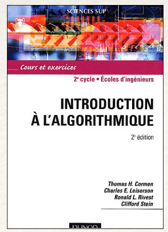


(a) (b)



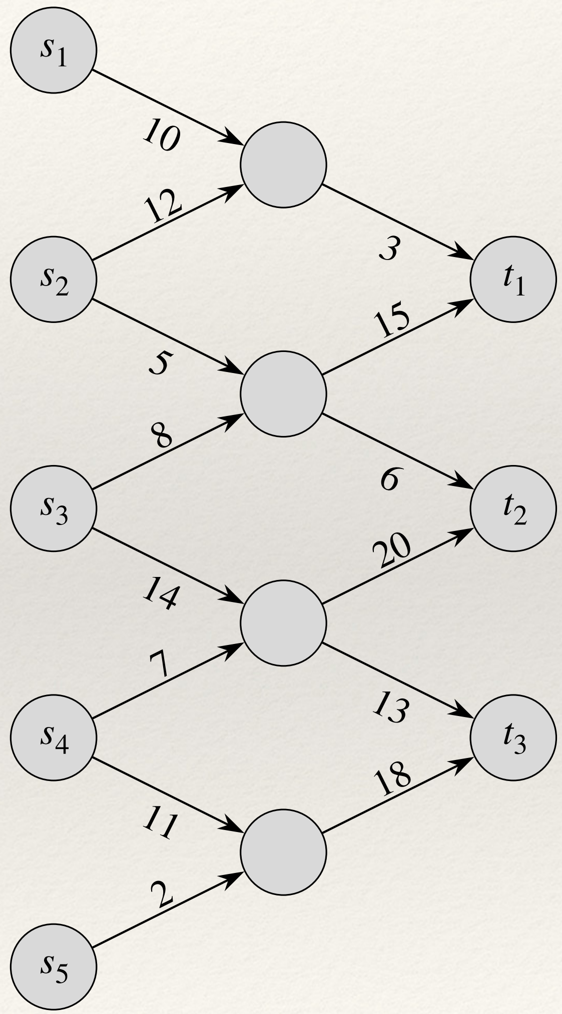
Annulation

- L'annulation sera toujours implicite dans les algorithmes par la suite.
- Supposez que l'arc (u, v) ait une valeur de flux f (u, v).
- Au cours du développement de l'algorithme, on peut accroître le flux sur l'arc (v, u) d'une certaine quantité d.
- Mathématiquement, cette opération doit décroître f (u, v) de d et, sur le plan conceptuel, on peut penser que ces d unités annulent d unités de flux qui sont déjà sur l'arc (u, v).

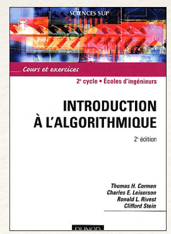


Réseaux à sources et puits multiples

- Un problème de flot maximum peut comporter plusieurs sources et puits.
- L'entreprise Max & Fils, par exemple, pourrait en réalité posséder
  - un ensemble $\{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ de m usines
  - et un ensemble $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ de n entrepôts.
- Heureusement, ce problème n'est pas plus difficile que celui à source et puits uniques.

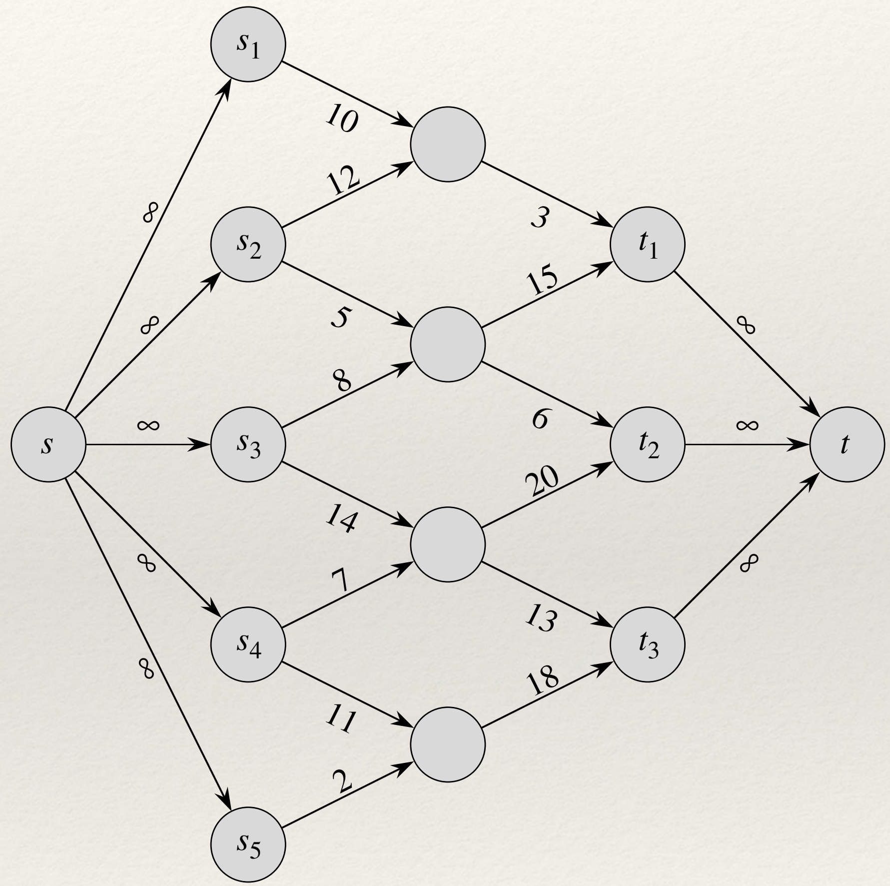


(a)

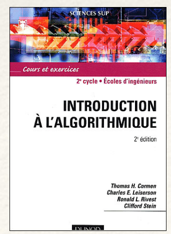


Réduction

- Le problème du flot maximum à sources et puits multiples peut être réduit à un problème de transport maximum ordinaire.
- La figure(b) montre comment le réseau (a) peut être converti en un réseau de transport ordinaire, avec une source et un puits uniques.

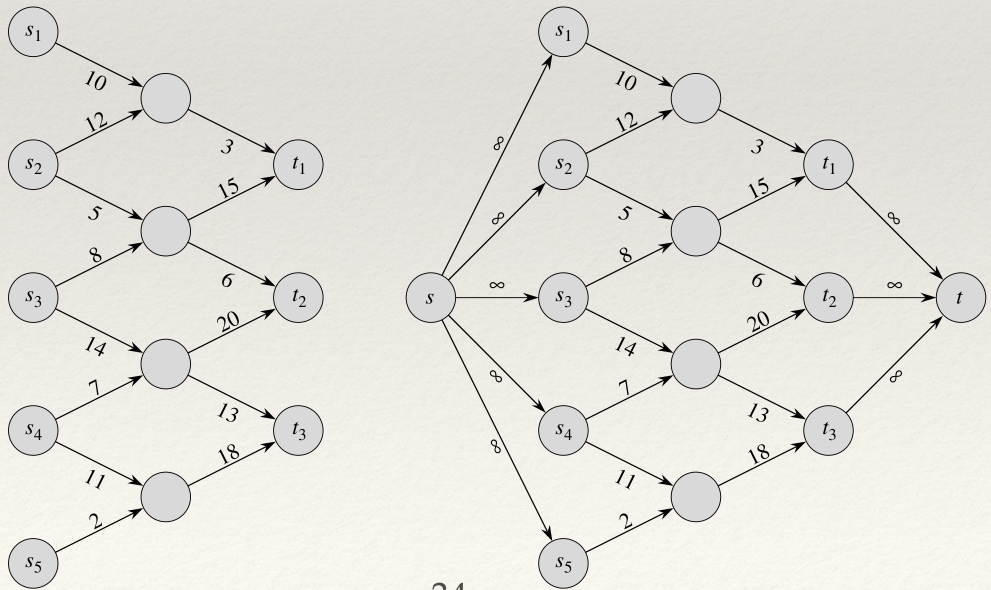


(b)

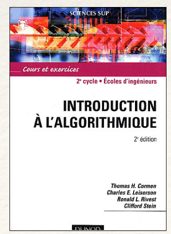


Réduction

- On ajoute une supersource s et un arc (s, s_i) de capacité
  - $c(s, s_i) = \infty$ pour chaque $i = 1, 2, \ldots, m$.
- On crée également un nouveau superpuits t et on ajoute un arc (t_i, t) de capacité
  - $c(t_i,t) = \infty$ pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Intuitivement, tout flot du réseau (a) correspond à un flot du réseau (b) et vice versa.
- La source unique s fournit autant de flot que désiré aux multiples sources s_i et le puits unique t consomme de la même façon autant de flot que désiré par les puits multiples t_i.

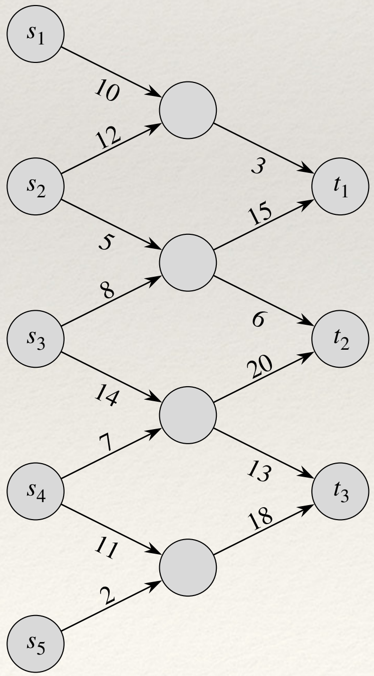


(a) (b)

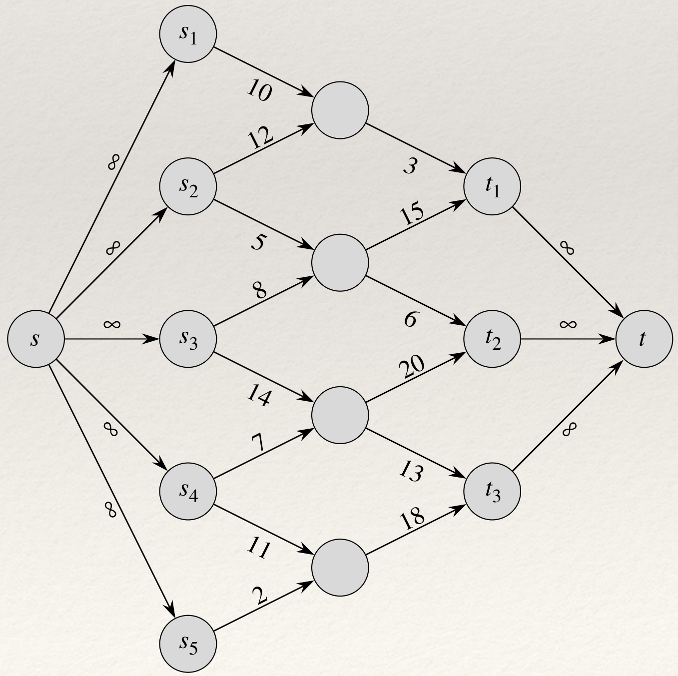


Réduction

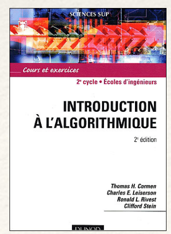
- Conversion d'un problème à sources multiples et puits multiples en un problème à source et puits uniques.
- (a) Un réseau transport comportant cinq sources $S = \{s_1,s_2,s_3,s_4,s_5\}$ et trois puits $T = \{t_1,t_2,t_3\}$.
- (b) Un réseau de transport équivalent avec une seule source et un seul puits.
    - On ajoute une supersource s′ et un arc de capacité infinie partant de s′ et reliant chacune des multiples sources.
    - On ajoute également un superpuits t′ et un arc de capacité infinie partant de chacun des puits initiaux et reliant t′.



(a)



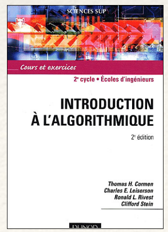
(b)



Travail avec les réseaux

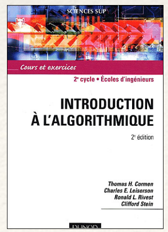
- On travaille avec plusieurs fonctions (comme f) qui prennent comme argument deux sommets d'un réseau de transport.
- On utilise une notation de sommation implicite dans laquelle l'un ou l'autre des arguments, ou les deux, peut être un ensemble de sommets, avec pour interprétation que la valeur indiquée représente la somme de toutes les façons possibles de remplacer les arguments par leurs membres.
- Par exemple, si X et Y sont des ensembles de sommets, alors

$$f(X, Y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} f(x, y) .$$



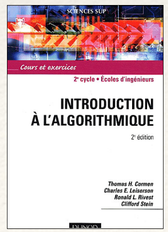
Travail avec les réseaux

- Ainsi, la conservation de flot peut être exprimée comme la condition $f(u,S) = 0$ pour tout $u \in S - \{s, t\}$.
- Par commodité, les accolades seront généralement omises dans cette notation, là où elles devraient être utilisées.
- Par exemple, dans l'équation $f(s,S - s) = f(s,S)$,
  - le terme $S - s$ représente l'ensemble $S - \{s\}$.



Notation ensembliste

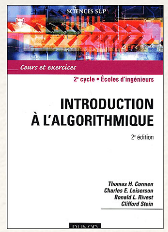
- La notation ensembliste implicite simplifie souvent les équations mettant en jeu des flots.
- Le lemme suivant reprend quelques-unes des identités les plus courantes mettant en jeu les flots et la notation ensembliste implicite.



Lemme 1

Lemme .1 *Soit $G = (S, A)$ un réseau de transport et soit f un flot de G. On a alors les égalités suivantes :*

1) *Pour tout $X \subseteq S$, on a $f(X, X) = 0$.*
2) *Pour tout $X, Y \subseteq S$, on a $f(X, Y) = -f(Y, X)$.*
3) *Pour tout $X, Y, Z \subseteq S$ avec $X \cap Y = \varnothing$, on a les sommes $f(X \cup Y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z)$ et $f(Z, X \cup Y) = f(Z, X) + f(Z, Y)$.*

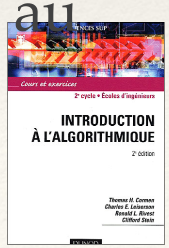


Application du lemme

- Comme exemple de travail avec la notation implicite, on peut démontrer que la valeur d'un flot est égale au flot total arrivant dans le puits ; c'est-à-dire

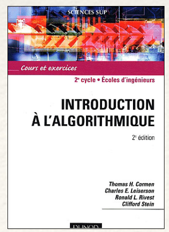
$$|f| = f(S, t)$$

- Cela paraît vrai intuitivement.
- En effet, d'après la conservation du flot, tous les sommets autres que la source et le puits ont un flux net total égal à zéro.
- La source a, par définition, un flux net total supérieur à 0 :
  - il y a plus de flux positif qui part de la source qu'il n'y a de flux qui arrive à la source.
- Pour le puits, c'est exactement l'inverse :
  - le flux net total est négatif, car il y a plus de flux positif qui arrive au puits qu'il n'y a de flux positif qui en part.



Preuve

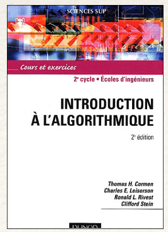
$$
\begin{array}{rcll}
|f| & = & f(s,S) & \text{Par définition} \\
 & = & f(S,S) - f(S-s,S) & \text{D'après lemme 1 partie 3} \\
 & = & -f(S-s,S) & \text{D'après lemme 1 partie 1} \\
 & = & f(S,S-s) & \text{D'après lemme 1 partie 2} \\
 & = & f(S,t) + f(S,S-s-t) & \text{D'après lemme 1 partie 3} \\
 & = & f(S,t) & \text{D'après conservation du flot}
\end{array}
$$

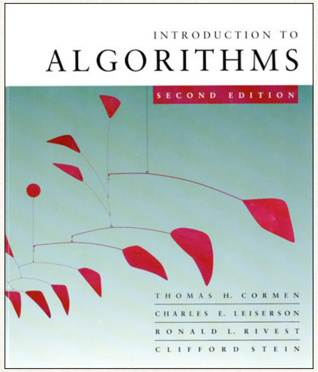


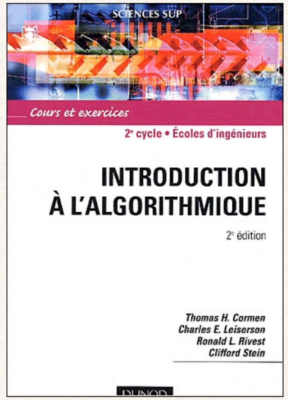
Somme des flots

- Etant donné un réseau de transport G = (S, A), soient f_1 et f_2 deux fonctions de S × S vers R.
- La somme des flots $f_1 + f_2$ est la fonction de S×S vers R pour tout u, v ∈ S, définie par

$$(f_1 + f_2)(u, v) = f_1(u, v) + f_2(u, v) \quad (4)$$







Méthode de Ford-Fulkerson

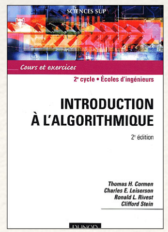
Théorie des graphes

Cours de Lélia Blin

3eme année de Licence

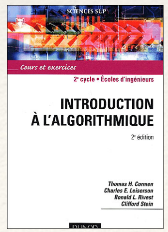
Méthode de Ford-Fulkerson

- Cette partie présente la méthode de Ford-Fulkerson, qui permet de résoudre le problème du flot maximum.
- Elle est appelé « méthode » plutôt que « algorithme », car elle comporte plusieurs implémentations de temps d'exécution différents.
- La méthode de Ford-Fulkerson dépend de trois concepts majeurs, qui transcendent la méthode et sont applicables à de nombreux algorithmes et problèmes de flot ;



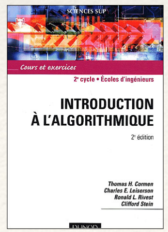
Méthode de Ford-Fulkerson

- Ces trois concepts sont:
  - Les réseaux résiduels,
  - Les chemins améliorant
  - Les coupes.
- Ces idées sont essentielles pour le théorème important du flot maximum & coupe minimum qui caractérise la valeur d'un flot maximum en terme de coupes du réseau de transport.



Méthode de Ford-Fulkerson

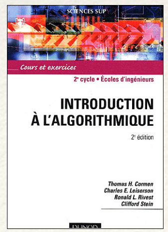
- La méthode de Ford-Fulkerson est itérative.
- On commence avec f (u, v) = 0 pour tout u, v $\in$ S,
  - ce qui donne un flot initial de valeur 0.
- A chaque itération, on augmente la valeur de flot en trouvant un
  - « chemin améliorant »,
  - qu'on peut voir simplement comme un chemin reliant la source s au puits t le long duquel on peut augmenter la quantité de flot.
- On réitère ce processus jusqu'à ce que l'on ne trouve plus de chemin améliorant.
- Le théorème du flot maximum & coupe minimum montre que ce processus finit par engendrer un flot maximum.



Méthode de Ford-Fulkerson

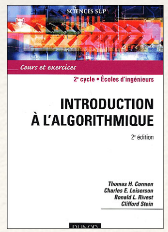
MÉTHODE-FORD-FULKERSON(G, s, t)

initialiser flot f à 0
tant que il existe un chemin améliorant p
    faire augmenter le flot f le long de p
retourner f



Réseaux résiduels

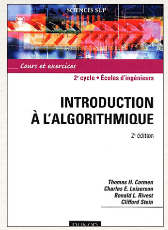
- Intuitivement:
  - Etant donné un réseau de transport et un flot,
  - Le réseau résiduel est constitué des arcs qui peuvent supporter un flot plus important.



Capacité résiduelle

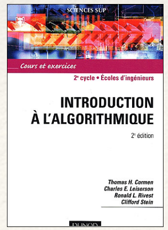
- Plus formellement, supposons qu'on ait un réseau de flux G = (S, A) de source s et de puits t.
- Soit f un flot de G et considérons un couple de sommets u, v ∈ S.
- La quantité de flux supplémentaire qu'il est possible d'ajouter entre u et v sans dépasser la capacité c(u, v) est la capacité résiduelle de (u, v), donnée par

$$c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v) \; . \qquad (5)$$



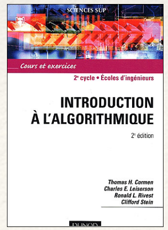
Capacité résiduelle (Exemple)

- si $c(u,v) = 16$ et $f(u,v) = 11$, on peut convoyer $c_f(u,v) = 5$ unités de flux supplémentaires sans excéder la contrainte de capacité sur l'arc (u, v).



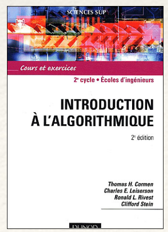
Capacité résiduelle (Exemple)

- Quand le flux net $f(u, v)$ est négatif,
  - la capacité résiduelle $c_f(u, v)$ est supérieure à la capacité $c(u, v)$.
- Par exemple, si $c(u, v) = 16$ et $f(u, v) = -4$, la capacité résiduelle $c_f(u, v)$ vaut 20.



Capacité résiduelle (Exemple)

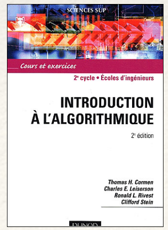
- On peut interpréter cela de la manière suivante :
  - Il existe un flux de 4 unités de v vers u, qui peut être annulé en envoyant un flux de 4 unités de u vers v.
  - On peut ensuite envoyer 16 unités supplémentaires de u vers v sans violer la contrainte de capacité sur l'arc (u, v).
  - On a donc pu ajouter 20 unités de flux, en commençant avec un flux f (u, v) = −4, avant d'atteindre la contrainte de capacité.



Réseaux résiduels

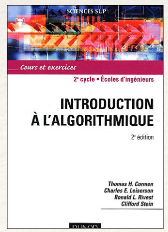
- Étant donné
  - Un réseau de transport G = (S, A)
  - Un flot f ,
- Le réseau résiduel de G induit par f est $G_f = (S, A_f)$, où

$$A_f = \{(u, v) \in S \times S : c_f(u, v) > 0\}$$



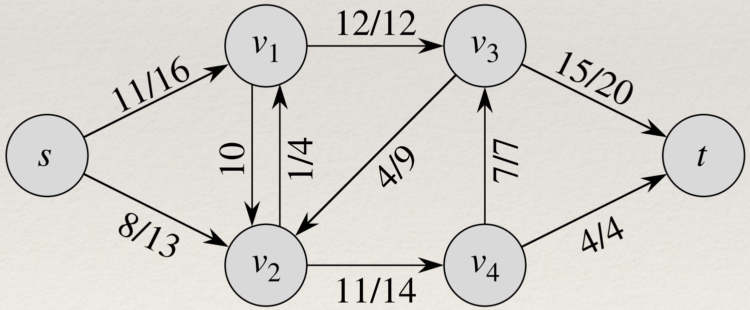
Réseaux résiduels

- Autrement dit chaque arc du réseau résiduel, ou arc résiduel, peut admettre un flux strictement positif.

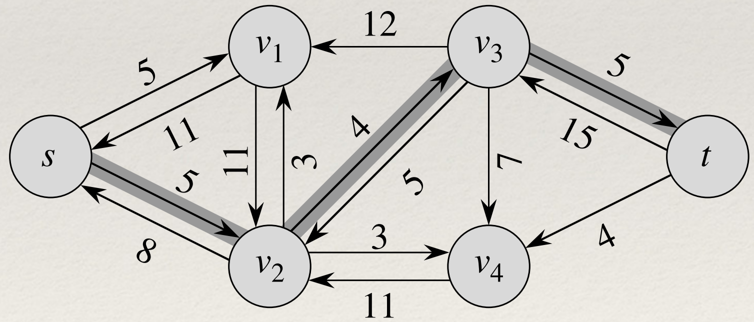


Réseaux résiduels (Exemple)

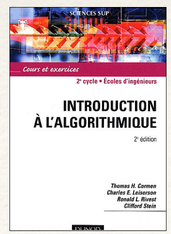
- La figure suivante (a) reprend le réseau de transport G et le flot f de la première figure (b) et la figure suivante (b) montre le réseau résiduel correspondant G_f .



(a)

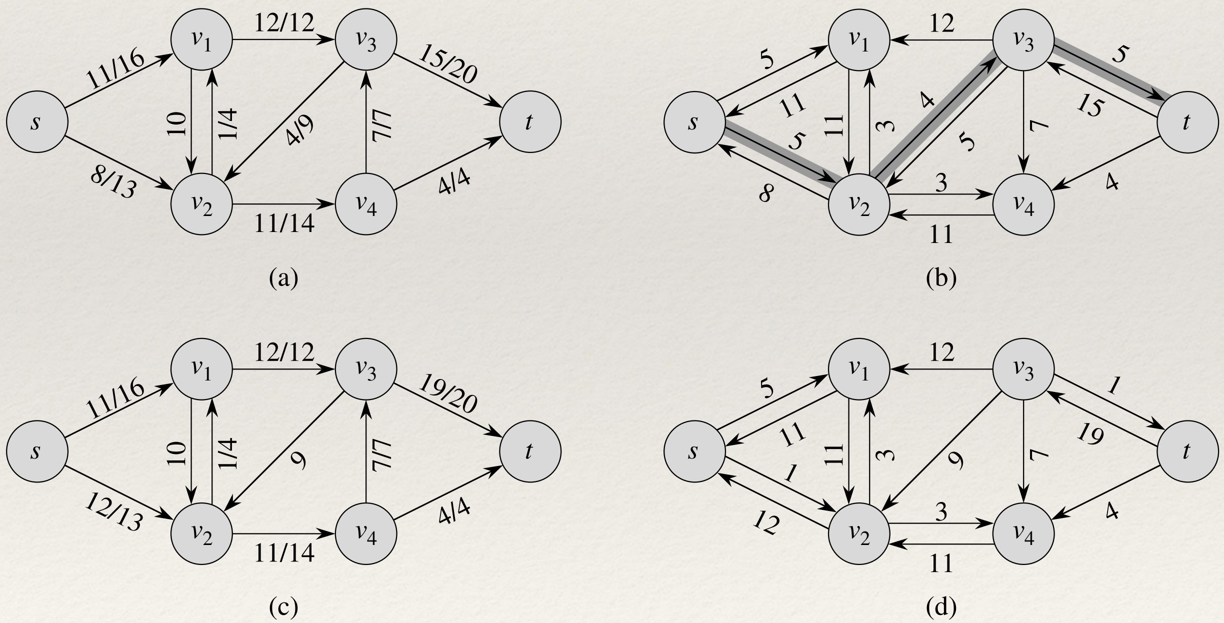


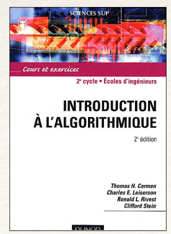
(b)



Réseaux résiduels (Exemple)

- (a) Le réseau de transport G et le flot de la première figure
- (b) Le réseaux résiduel G_f avec le chemin améliorant p en gris ; sa capacité résiduelle est
  - $c_f(p) = c_f(v_2, v_3) = 4$.
- (c) Le flot de G après ajout le long de p de sa capacité résiduelle 4.
- (d) Le réseau résiduel induit par le flot de (c)

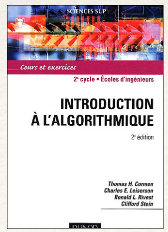




Réseaux résiduels (Exemple)

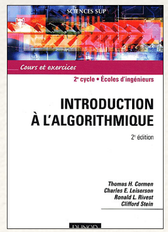
- Les arcs de A_f sont soit des arcs de A, soit leurs inverses.
- Si $f(u,v)<c(u,v)$ pour un arc $(u,v) \in A$, alors $c_f(u,v) = c(u,v)-f(u,v) > 0$ et $(u,v) \in Af$.
- Si $f(u,v) > 0$ pour un arc $(u,v) \in A$, alors $f(v,u) < 0$.
  - Dans ce cas, $c_f (v,u) = c(v,u) - f(v,u) > 0$, et donc $(v, u) \in A_f$.
- Si ni (u, v) ni (v, u) n'apparaît dans le réseau original, alors $c(u, v) = c(v, u) = 0$, $f(u, v) = f (v, u) = 0$ et $c_f (u, v) = c_f (v, u) = 0$.
- On en conclut qu'un arc (u, v) ne peut apparaître dans un réseau résiduel que si au moins l'un des arcs (u, v) et (v, u) figure dans le réseau original ; on a donc

$$|A_f| \leqslant 2\ |A|$$



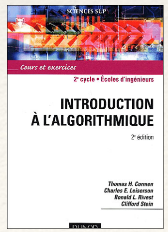
Lemme 2

Soit $G = (S, A)$ un réseau de transport de source s et de puits t et soit f un flot de G. Soit G_f le réseau résiduel de G induit par f et soit f' un flot de G_f . Alors, la somme $f + f'$ définie par l'équation (4) est un flot de G de valeur $|f + f'| = |f| + |f'|$.



Preuve

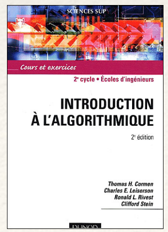
- Il faut vérifier que les propriétés suivantes sont respectées:
  - Symétrie,
  - Contraintes de capacité,
  - Conservation de flot.



Preuve

- Pour la symétrie, notez que pour tout couple u,v ∈ S, on a

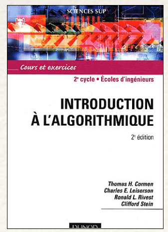
$$
\begin{aligned}
(f+f')(u,v) &= f(u,v)+f'(u,v) \\
&= -f(v,u)-f'(v,u) \\
&= -(f(v,u)+f'(v,u)) \\
&= -(f+f')(v,u)\ .
\end{aligned}
$$



Preuve

- Pour les contraintes de capacité,
- on remarque que $f'(u, v) \leq c_f(u, v)$ pour tout couple $u, v \in S$.
- Donc, d'après l'équation (5),

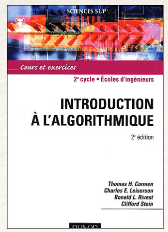
$$
\begin{aligned}
(f + f')(u, v) &= f(u, v) + f'(u, v) \\
&\leqslant f(u, v) + (c(u, v) - f(u, v)) \\
&= c(u, v) \, .
\end{aligned}
$$



Preuve

- Pour la conservation de flot, notez que pour tout u ∈ S – {s, t}, on a

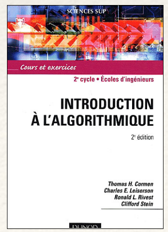
$$
\begin{aligned}
\sum_{v \in S} (f + f')(u, v) &= \sum_{v \in S} (f(u, v) + f'(u, v)) \\
&= \sum_{v \in S} f(u, v) + \sum_{v \in S} f'(u, v) \\
&= 0 + 0 \\
&= 0 \,.
\end{aligned}
$$



Preuve

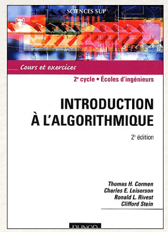
- Enfin on obtient:

$$
\begin{aligned}
|f+f'| &= \sum_{v\in S}(f+f')(s,v) \\
&= \sum_{v\in S}(f(s,v)+f'(s,v)) \\
&= \sum_{v\in S} f(s,v) + \sum_{v\in S} f'(s,v) \\
&= |f| + |f'| \ .
\end{aligned}
$$



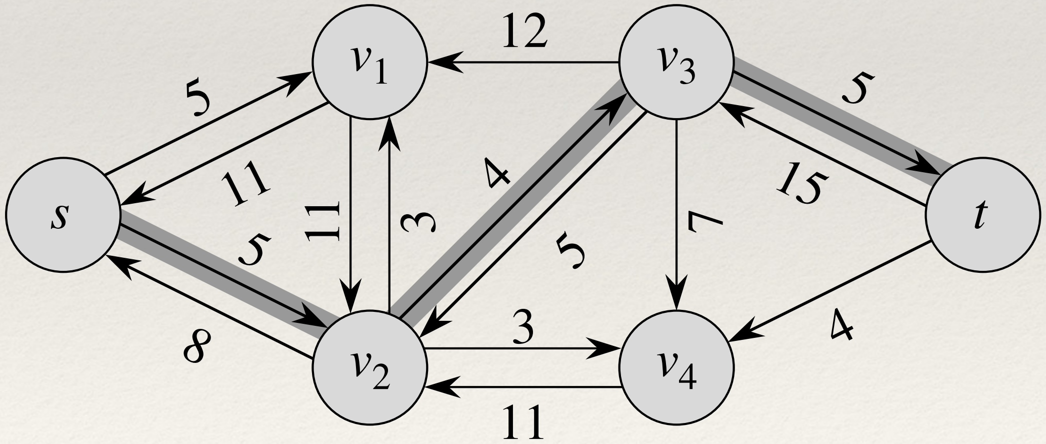
Chemins améliorants

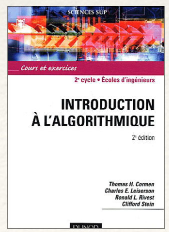
- Étant donnés
  - Un réseau de transport G = (S, A)
  - Un flot f ,
- un chemin améliorant p est un chemin élémentaire de s vers t dans le réseau résiduel G_f .
- D’après la définition du réseau résiduel, chaque arc (u,v) d’un chemin améliorant admet un flot positif supplémentaire de u vers v tout en restant soumis à la contrainte de capacité sur cet arc.



Chemins améliorants

- Le chemin en gris sur la figure est un chemin améliorant.
- En considérant le réseau résiduel G_f de la figure comme un réseau de transport, on peut faire passer jusqu'à 4 unités de flux supplémentaire à travers chaque arc de ce chemin.
- Et ceci sans violer de contrainte de capacité, puisque la plus petite capacité résiduelle sur ce chemin est $c_f(v_2, v_3) = 4$.

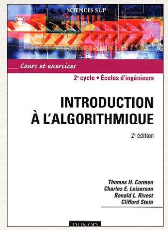




Capacité résiduelle

- La plus grande quantité de flux transportable à travers les arcs d'un chemin améliorant p s'appelle la capacité résiduelle de p, et est définie par

$$c_f(p) = \min\left\{c_f(u,v) : (u,v) \text{ appartient à } p\right\} \quad .$$

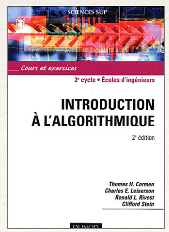


Lemme 3

Soit G = (S, A) un réseau de transport, soit f un flot de G et soit p un chemin améliorant de G_f. On définit une fonction $f_p : S \times S \to R$ par:

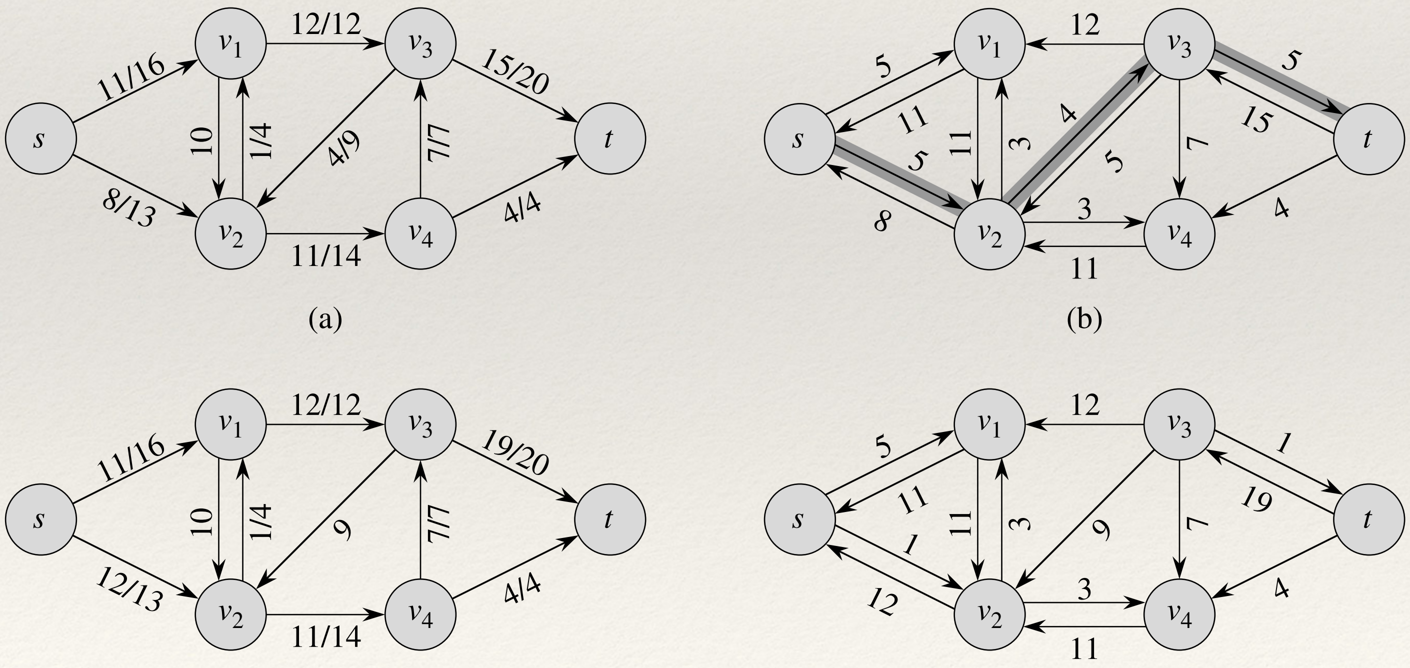
$$f_p(u,v) = \begin{cases} c_f(p) & \textit{si } (u,v) \textit{ appartient à } p \text{ ,} \\ -c_f(p) & \textit{si } (v,u) \textit{ appartient à } p \text{ ,} \\ 0 & \textit{sinon .} \end{cases}$$

alors, f_p est un flot de G_f de valeur $|f_p| = c_f(p) > 0$.



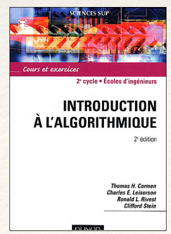
Corollaire

- Le corollaire suivant montre que si l'on ajoute f_p à f, on obtient un autre flot de G dont la valeur est plus proche du maximum.
- La figure (c) montre les conséquences de l'ajout du f_p de la figure (b) au f de la figure (a).



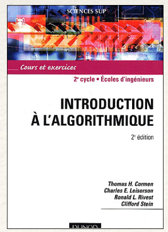
(a) (b)

(c) (d)



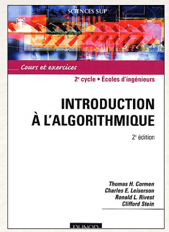
Corollaire 4

Soit $G = (S, A)$ un réseau de transport, soit f un flot de G et soit p un chemin améliorant de G_f . Soit f_p une fonction définie comme dans l'équation (6). On définit une fonction $f' : S \times S \to R$ par $f' = f + f_p$. Alors, f' est un flot de G de valeur $|f'| = |f| + |f_p| > |f|$.



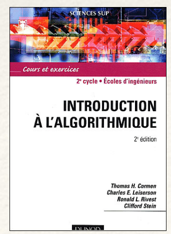
Coupe dans un réseau de transport

- La méthode de Ford-Fulkerson augmente progressivement le flot dans les chemins améliorant, jusqu’à atteindre un flot maximum.
- Le théorème « flot maximum & coupe minimum »,
  - Un flot est maximum si et seulement si son réseau résiduel ne contient aucun chemin améliorant.



Coupe

- Une coupe (E,T) d'un réseau de transport G = (S,A) est une partition de S dans E:
  - T =S−E telle que s∈E et t∈T.
- Si f est un flot, alors le flot net à travers la coupure (E,T) est défini par f (E, T).
- La capacité de la coupe (E, T) est c(E, T).
- Une coupe minimum d'un réseau est une coupe dont la capacité est minimale rapportée à toutes les coupes du réseau.



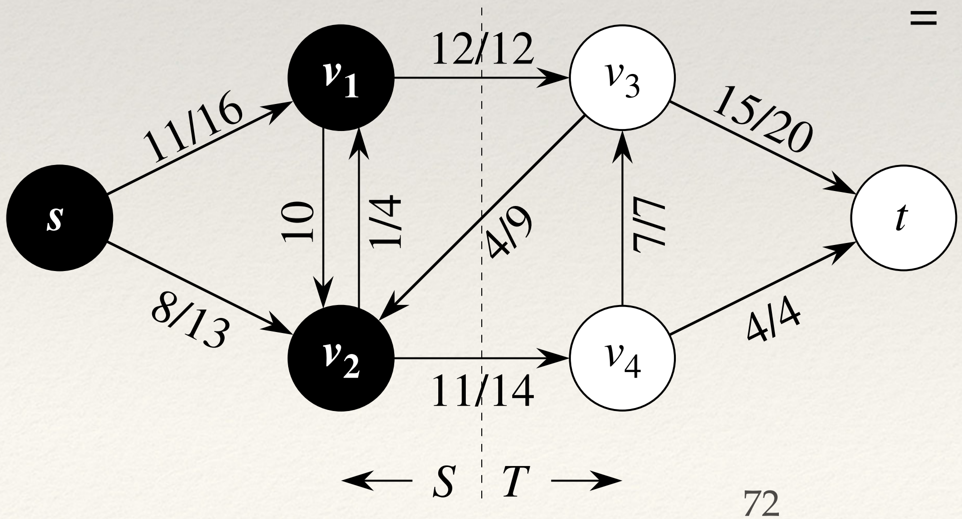
Coupe (Exemple)

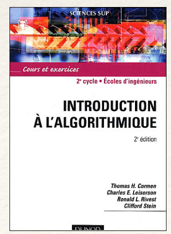
- La figure montre la coupe ({s,v_1,v_2} , {v_3,v_4,t}) dans le réseau de transport vu précédemment.
- Le flot net à travers cette coupe est

$$\begin{aligned} f(v_1, v_3) + f(v_2, v_3) + f(v_2, v_4) &= 12 + (-4) + 11 \\ &= 19 , \end{aligned}$$

et sa capacité est

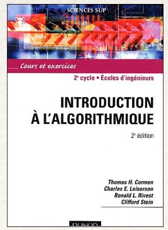
$$\begin{aligned} c(v_1, v_3) + c(v_2, v_4) &= 12 + 14 \\ &= 26 . \end{aligned}$$





Lemme 5

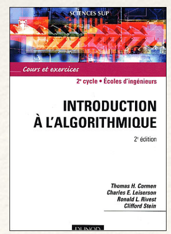
Soit f un flot dans un réseau de transport G de source s et de puits t et soit (E,T) une coupe de G. Alors, le flot net à travers (E,T) est f(E,T) = |f|.



Preuve

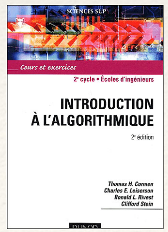
- En notant que f (E − s, V) = 0 en vertu de la conservation du flot, on a

$$
\begin{aligned}
f(E,T) &= f(E,S) - f(E,E) && \text{D'après le lemme 1 partie 3}\\
&= f(E,S) && \text{D'après le lemme 1 partie 1}\\
&= f(s,S) + f(E-s,S) && \text{D'après le lemme 1 partie 3}\\
& && \text{(car } f(E-s,S)=0\text{)}\\
&= f(s,S)\\
&= |f|\ .
\end{aligned}
$$



Corollaire 6

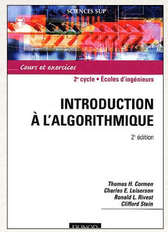
La valeur d'un flot f dans un réseau de transport G est majorée par la capacité d'une coupe quelconque de G.



Preuve

- Soit (E, T) une coupe quelconque de G et soit f un flot quelconque.
- D'après le lemme 5 et les contraintes de capacité,

$$
\begin{aligned}
|f| &= f(E,T) \\
&= \sum_{u \in E} \sum_{v \in T} f(u,v) \\
&\leqslant \sum_{u \in E} \sum_{v \in T} c(u,v) \\
&= c(E,T) .
\end{aligned}
$$



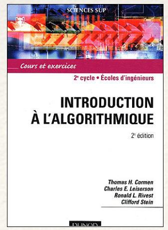
Théorème (flot maximum & coupe minimum)

Si f est un flot dans un réseau de transport G = (S,A) de source s et de puits t, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1) f est un flot maximum dans G.

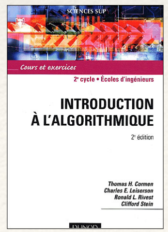
2)Le réseau résiduel Gf ne contient aucun chemin améliorant.

3) | f | = c(E, T) pour une certaine coupe (E, T) de G.



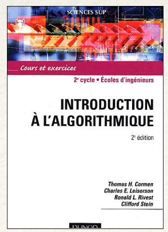
Preuve

- (1) ⇒ (2) : supposons, en raisonnant par l'absurde, que f soit un flot maximum de G mais que G_f contienne un chemin améliorant p.
- Alors, d'après le corollaire 4:
  - La somme $f + f_p$, où f_p est donné par l'équation (6), est un flot de G dont la valeur est strictement supérieure à $|f|$, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle f est un flot maximum.



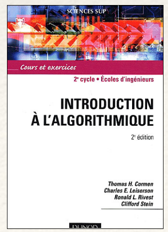
Preuve

- (2) ⇒ (3) : supposons que G_f n'ait pas de chemin améliorant,
  - c'est-à-dire que G_f ne contienne aucun chemin de s vers t.
- On définit $E = \{v \in S$: il existe un chemin de s vers v dans $G_f\}$ et $T=S-E$.
- La partition (E,T) est une coupe:
  - On a $s \in E$ de façon triviale et $t \notin E$ car il n'existe aucun chemin de s vers t dans G_f .
- Pour chaque couple de sommets u et v tel que $u \in E$ et $v \in T$,
  - On a $f(u,v)=c(u,v)$, car sinon on aurait $(u,v) \in A_f$ et v appartiendrait à E.
- D'après le lemme 5, on a donc $|f| = f(S, T) = c(S, T)$.



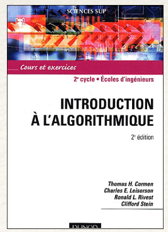
Preuve

- (3) $\Rightarrow$ (1) :
  - D'après le corollaire 6, $|f| \leq c(E, T)$ pour toutes les coupes (E, T).
- La condition $|f| = c(E, T)$ implique donc que f est un flot maximum.



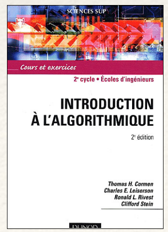
Algorithme de Ford-Fulkerson

- A chaque itération de la méthode de Ford-Fulkerson
  - On trouve un certain chemin améliorant p
  - On augmente le flux f sur chaque arc de p d'un montant égal à la capacité résiduelle $c_f(p)$.



Algorithme de Ford-Fulkerson

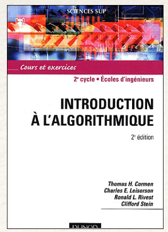
- L'implémentation suivante de cette méthode calcule le flot maximum dans un graphe G = (S, A), en actualisant le flux f [u, v] entre chaque couple u, v de sommets qui sont reliés par un arc.
  - Si u et v ne sont reliés par aucun arc dans aucune direction, on suppose implicitement que f [u, v] = 0.
- Les capacités c(u, v) sont censées être données avec le graphe, et c(u,v) = 0 si $(u, v) \notin A$.
- La capacité résiduelle c_f (u, v) est calculée selon la formule (5).
- L'expression $c_f(p)$ dans le code n'est en fait qu'une variable temporaire qui mémorise la capacité résiduelle du chemin p.



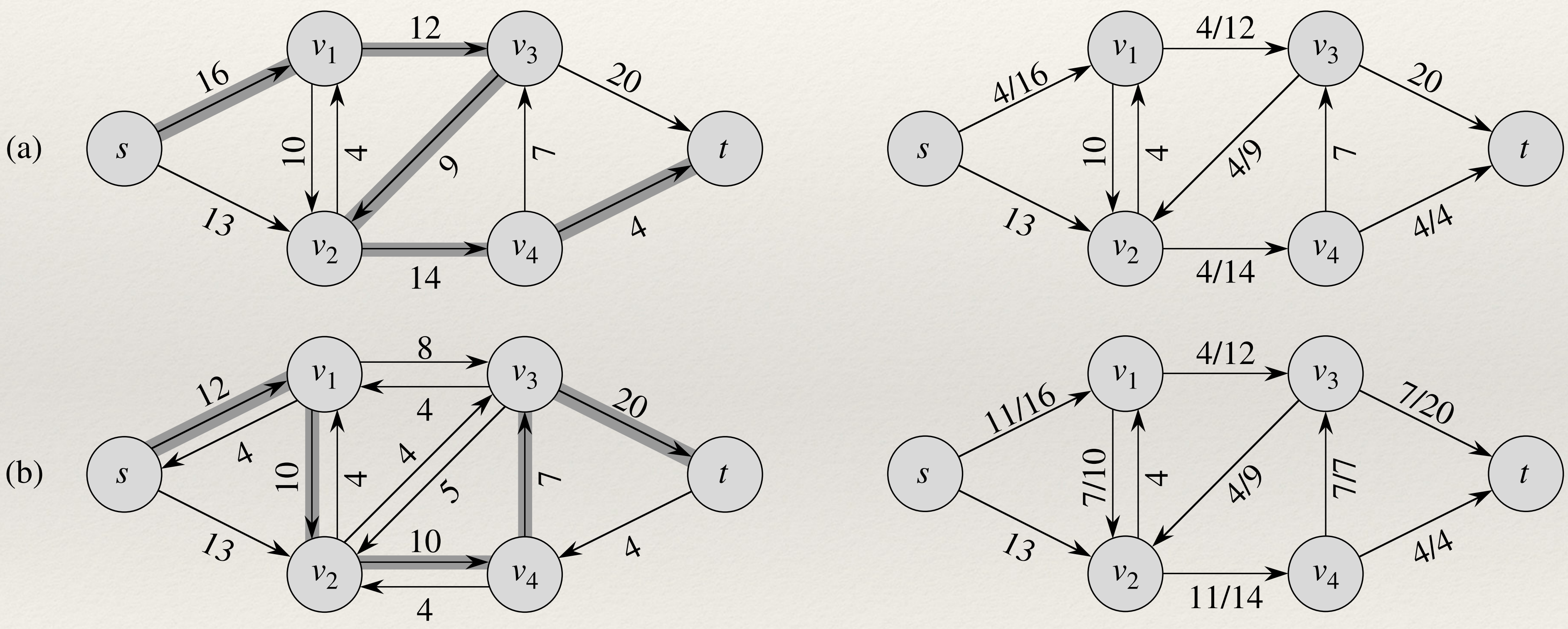
Algorithme de Ford-Fulkerson

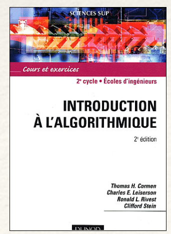
FORD-FULKERSON(G, s, t)

pour chaque arc $(u, v) \in A[G]$
  faire $f[u, v] \leftarrow 0$
    $f[v, u] \leftarrow 0$
tant que il existe un chemin p de s à t dans le réseau résiduel G_f
  faire $c_f(p) \leftarrow \min \{c_f(u, v) : (u, v) \text{ is in } p\}$
    pour chaque arc (u, v) de p
      faire $f[u, v] \leftarrow f[u, v] + c_f(p)$
        $f[v, u] \leftarrow -f[u, v]$

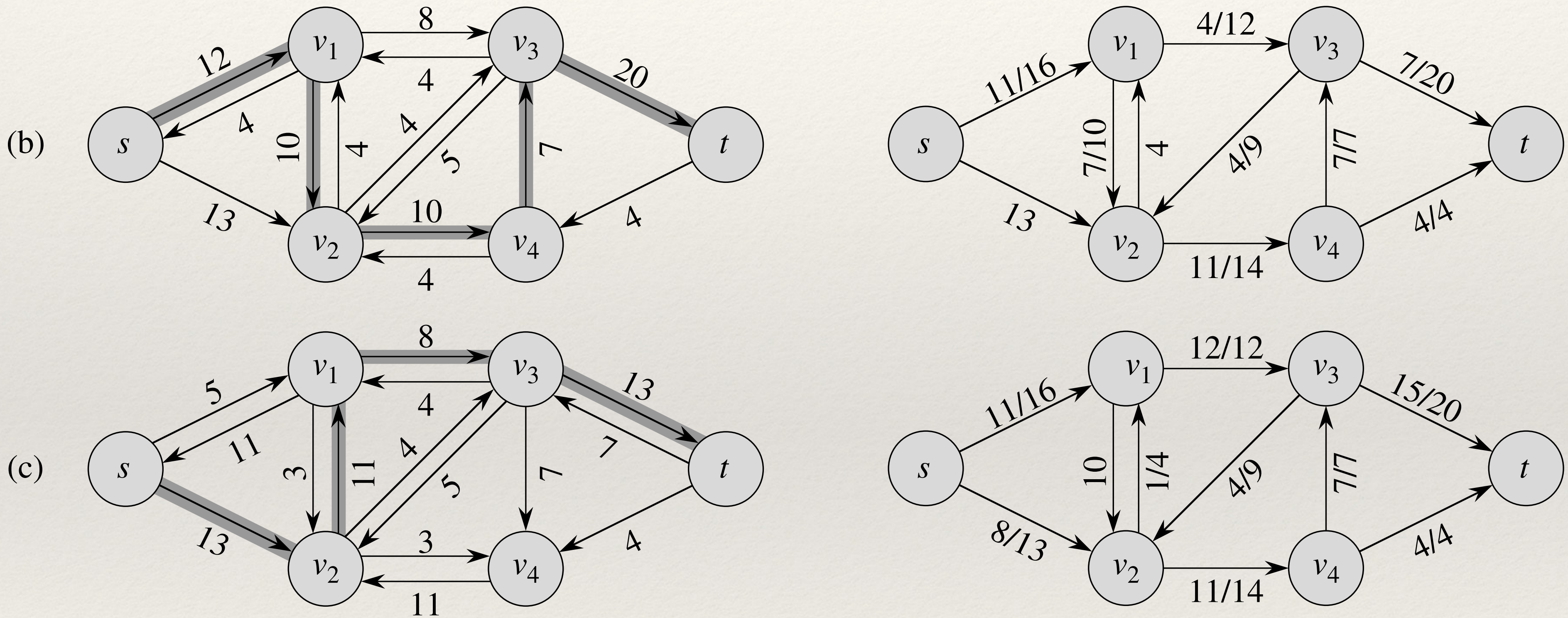


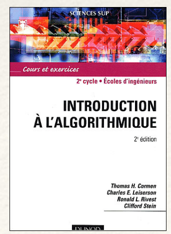
Exemple


(a)
(b)
s
t
v1
v2
v3
v4
16
12
20
10
4
9
7
13
14
4/16
4/12
4/9
4/4
4/14
8
5
11/16
7/10
7/20
7/7
11/14


INTRODUCTION
À L'ALGORITHMIQUE

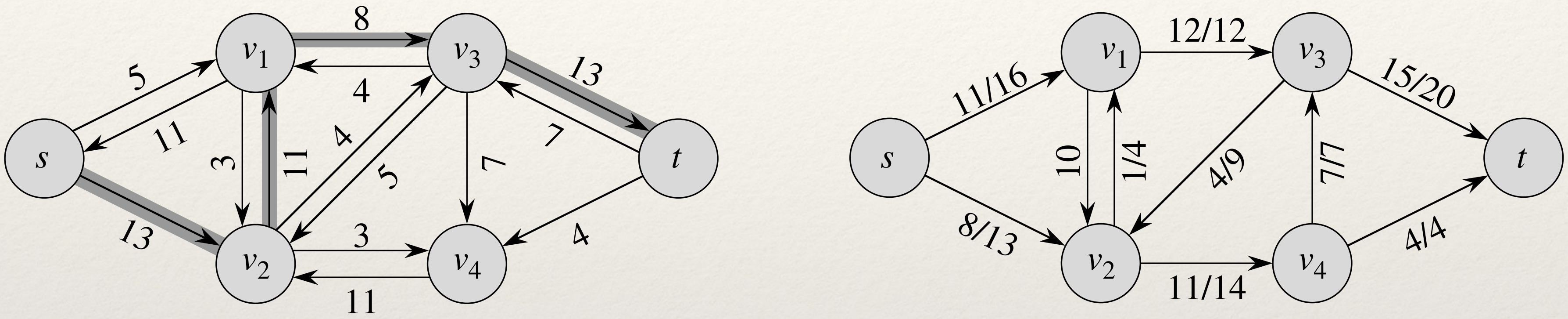
Exemple



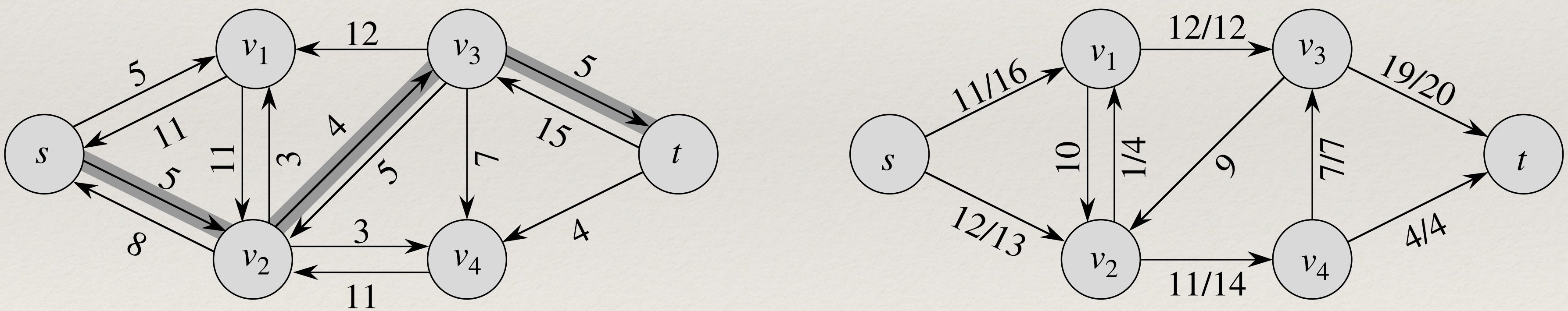


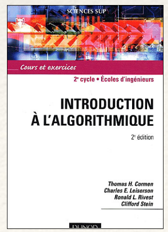
Exemple

(c)


s
v1
v2
v3
v4
t
5
11
13
3
11
8
4
4
5
13
7
7
3
11
4
11/16
8/13
10
1/4
4/9
7/7
12/12
15/20
11/14
4/4

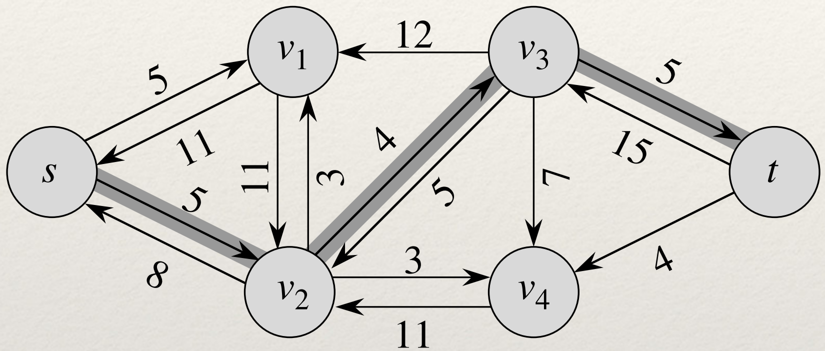
(d)

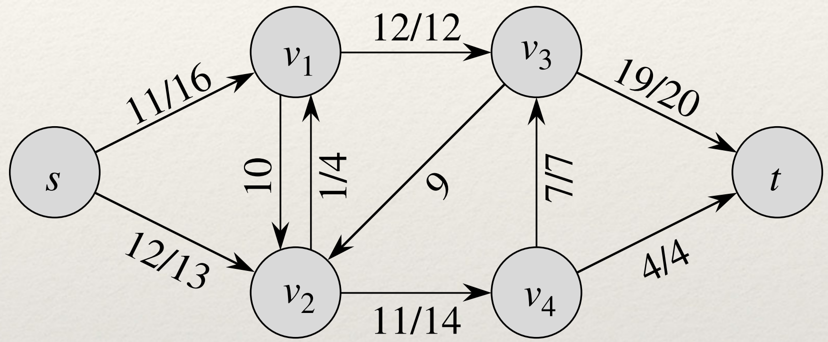

s
v1
v2
v3
v4
t
5
11
5
8
11
3
12
4
5
5
15
7
3
11
4
11/16
12/13
10
1/4
9
7/7
12/12
19/20
11/14
4/4


Cours et exercices
INTRODUCTION
À L'ALGORITHMIQUE

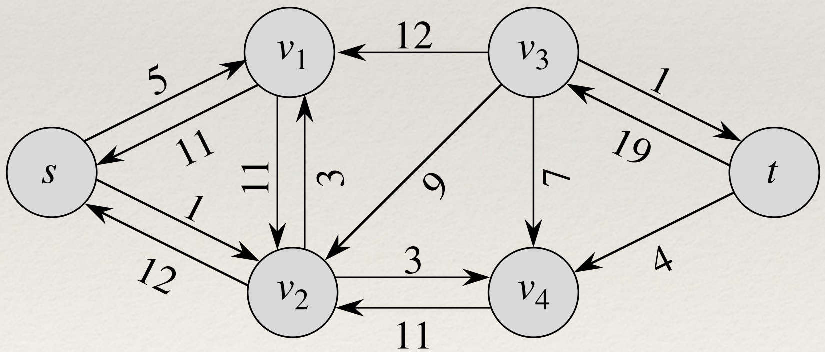
Exemple

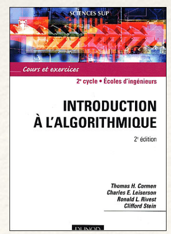
(d)


s
v_1
v_2
v_3
v_4
t
5
11
5
8
11
3
12
4
5
3
11
7
5
15
4

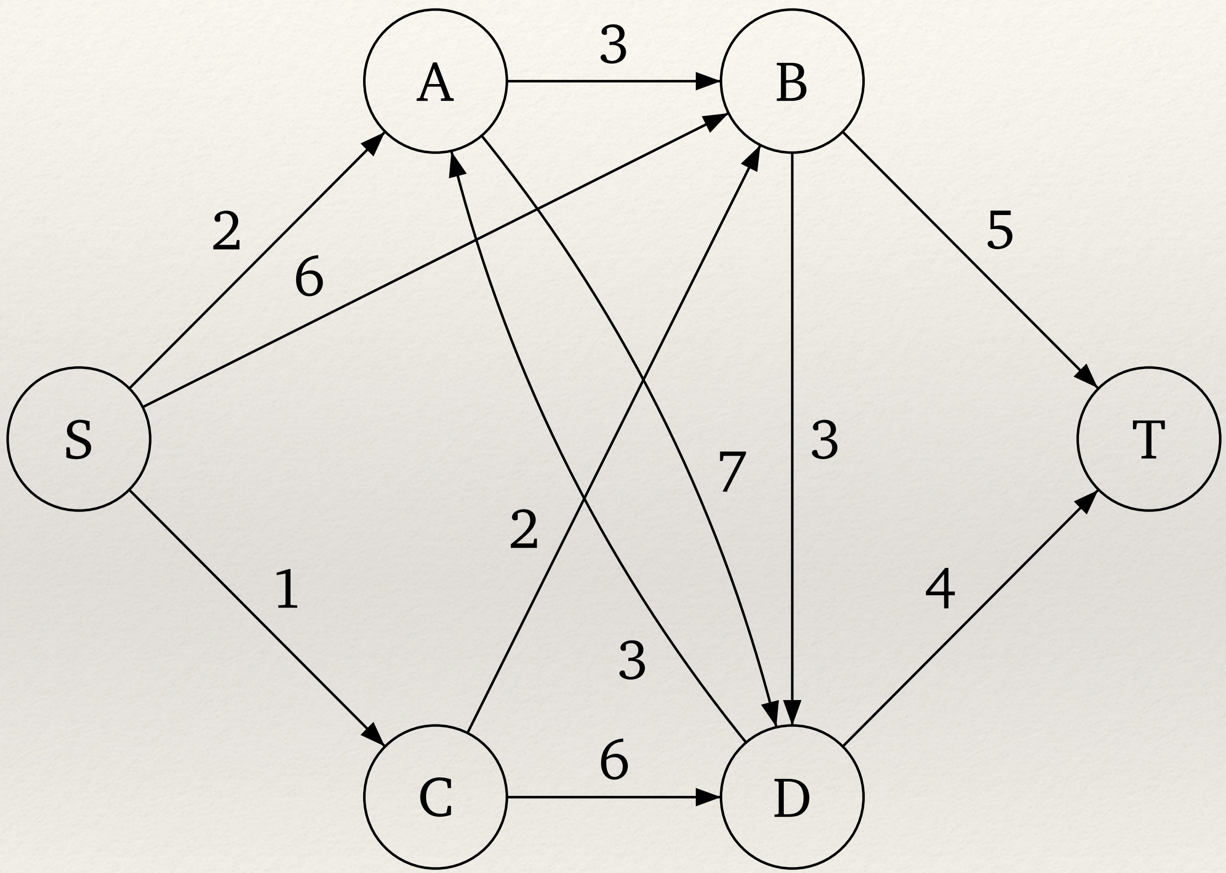

s
v_1
v_2
v_3
v_4
t
11/16
12/13
10
1/4
12/12
9
11/14
7/7
19/20
4/4

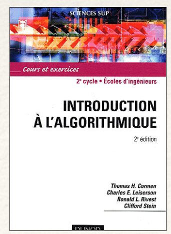
(e)


s
v_1
v_2
v_3
v_4
t
5
11
1
12
11
3
12
9
3
11
7
1
19
4


INTRODUCTION
À L'ALGORITHMIQUE

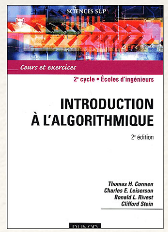
Autre exemple





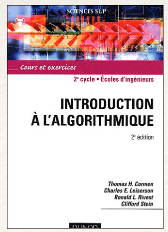
Analyse de Ford-Fulkerson

- Le temps d'exécution de FORD-FULKERSON dépend de la façon dont on détermine le chemin améliorant p à la ligne 4.
- En cas de choix malheureux, l'algorithme peut même ne jamais se terminer :
  - la valeur du flot augmente par paliers,
  - mais elle n'est pas certaine de converger vers la valeur de flot maximum.
- En revanche, si le chemin améliorant est choisi à l'aide d'une recherche en largeur,
- l'algorithme s'exécute dans un temps polynomial.



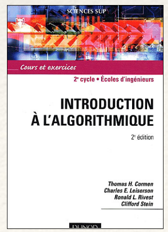
Analyse de Ford-Fulkerson

- En pratique, le problème du flot maximum est posé avec des valeurs entières pour les capacités.
  - Lorsque les capacités sont des nombres rationnels, une mise à l'échelle idoine permet de les rendre entières.
- Avec cette hypothèse,
  - une implémentation de FORD-FULKERSON s'exécute en temps $O(A\,|f^*|)$, où f^* est le flot maximum trouvé par l'algorithme.



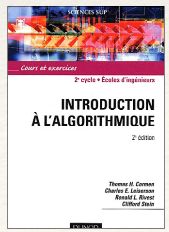
Analyse de Ford-Fulkerson

- L'analyse est la suivante.
  - Les lignes 1–3 prennent un temps O(A).
  - La boucle tant que des lignes 4–8 est exécutée au plus $|f*|$ fois
    - puisque la valeur du flot augmente d'au moins une unité à chaque itération.
- Le travail effectué dans la boucle tant que peut être accéléré si l'on gère efficacement la structure de données utilisée pour implémenter le réseau G = (S, A)



Analyse de Ford-Fulkerson

- Admettons que nous gérions une structure de données correspondant à un graphe orienté $G' = (S,A')$, où $A' = \{(u,v) : (u,v) \in A \text{ ou } (v,u) \in A\}$.
- Les arcs du réseau G sont également des arcs de G′, et il est donc simple de gérer capacités et flux dans cette structure de données.
- Étant donné un flot f de G, les arcs du réseau résiduel Gf sont constitués de tous les arcs (u, v) de G′ tels que $c(u,v) - f[u, v] \neq 0$.



Analyse de Ford-Fulkerson

- Le temps nécessaire pour trouver un chemin dans un réseau résiduel est donc $O(S + A') = O(A)$,
  - que l'on utilise la recherche en profondeur
  - ou la recherche en largeur.
- Chaque itération de la boucle tant que prend donc un temps $O(A)$, ce qui donne un temps d'exécution total de $O(A\,|f*|)$ pour la procédure FORD-FULKERSON.
- Lorsque les capacités sont entières et que la valeur de flot optimale $|f*|$ est faible, le temps d'exécution de l'algorithme de Ford-Fulkerson est bon.