ALGÈBRE DES CATÉGORIES. — *Algèbres relatives à une loi distributive.* Note (*) de Mme **Élisabeth Burroni**, présentée par M. André Lichnerowicz.

La notion d'algèbre relative à un triple **T** est parfois généralisable par les notions d'algèbre partielle et d'algèbre non déterministique. Une analyse de ce fait conduit à introduire un second triple **T'** et à définir des algèbres relatives à deux triples ou plus précisément des **D**-algèbres, où **D** : **T** → **T'** est une loi distributive. Pour des choix très simples de **T'**, on retrouve les notions de **T**-algèbre, de **T**-algèbre partielle et non déterministique.

I. **D-algèbres.** — On suppose donnée une loi distributive [1]

$$\mathbf{D} = (\mathcal{E}, \mathbf{T}', \mathrm{D}, \mathbf{T}) :$$

Alors $\mathbf{T}' = (\mathcal{E}, \mathrm{T}', \mathrm{I}', \mathrm{K}')$ et $\mathbf{T} = (\mathcal{E}, \mathrm{T}, \mathrm{I}, \mathrm{K})$ sont deux triples sur la catégorie $\mathcal{E}$, et $\mathrm{D} : \mathrm{T} \circ \mathrm{T}' \to \mathrm{T}' \circ \mathrm{T}$ est une transformation naturelle telle que

$$\mathrm{D}.(\mathrm{I} \circ \mathrm{T}') = \mathrm{T}' \circ \mathrm{I}, \qquad \mathrm{D}.(\mathrm{T} \circ \mathrm{I}') = \mathrm{I}' \circ \mathrm{T},$$
$$(\mathrm{K}' \circ \mathrm{T}).(\mathrm{T}' \circ \mathrm{D}).(\mathrm{D} \circ \mathrm{T}') = \mathrm{D}.(\mathrm{T} \circ \mathrm{K}'), \qquad (\mathrm{T}' \circ \mathrm{K}).(\mathrm{D} \circ \mathrm{T}).(\mathrm{T} \circ \mathrm{D}) = \mathrm{D}.(\mathrm{K} \circ \mathrm{T}').$$

Beck s'est interessé au triple composé $\mathbf{T}' \otimes_{\mathbf{D}} \mathbf{T} = (\mathcal{E}, \mathrm{T}' \circ \mathrm{T}, \mathrm{I}' \circ \mathrm{I}, m)$, où $m = (\mathrm{K}' \circ \mathrm{K}).(\mathrm{T}' \circ \mathrm{D} \circ \mathrm{T})$, et aux $\mathbf{T}' \otimes_{\mathbf{D}} \mathbf{T}$-algèbres.

(On remarque que le triple $\mathbf{T}'$ se *relève* en un triple $\tilde{\mathbf{T}}' = (Alg\,(\mathbf{T}), \tilde{\mathrm{T}}', \tilde{\mathrm{I}}', \tilde{\mathrm{K}}')$, si $Alg\,(\mathbf{T})$ désigne la catégorie des **T**-algèbres, dans le sens que le diagramme suivant commute, lorsqu'on y remplace le couple $(\mathrm{V}, \tilde{\mathrm{V}})$ par chacun des

$$\begin{tikzcd} Alg\,(\mathbf{T}) \arrow[d, "U^{\mathbf{T}}"'] & Alg\,(\mathbf{T}) \arrow[l, "\tilde{\mathrm{V}}"'] \arrow[d, "U^{\mathbf{T}}"] \\ \mathcal{E} & \mathcal{E} \arrow[l, "\mathrm{V}"'] \end{tikzcd}$$

couples $(\mathrm{T}', \tilde{\mathrm{T}}')$, $(\mathrm{I}', \tilde{\mathrm{I}}')$, $(\mathrm{K}', \tilde{\mathrm{K}}')$; de plus $\tilde{\mathrm{T}}'$ est défini sur les objets par $\tilde{\mathrm{T}}'\,(e, b) = (\mathrm{T}'\,e, \mathrm{T}'\,b.\mathrm{D}\,e)$. Alors $Alg\,(\mathbf{T}' \otimes_{\mathbf{D}} \mathbf{T}) \simeq Alg\,(\tilde{\mathbf{T}}')$: une $\mathbf{T}' \otimes_{\mathbf{D}} \mathbf{T}$-algèbre est équivalente à la donnée d'un triplet (e, b, b'), où (e, b) est une **T**-algèbre et (e, b') une $\mathbf{T}'$-algèbre **D**-*compatibles :*

$$b'.\mathrm{T}'\,b.\mathrm{D}\,e = b.\mathrm{T}\,b').$$

Nous nous intéressons au fait que le triple **T** se *prolonge* en un triple $\tilde{\mathbf{T}} = (Kl\,(\mathbf{T}'), \tilde{\mathrm{T}}, \tilde{\mathrm{I}}, \tilde{\mathrm{K}})$, où $Kl\,(\mathbf{T}')$ désigne la catégorie de Kleisli associée à $\mathbf{T}'$, où $\tilde{\mathrm{T}}$ associe au morphisme $h : e_1 - \mathrm{T}'\,e_2$, le morphisme $\mathrm{T}\,e_1 \xrightarrow{\mathrm{T}h} \mathrm{TT}'\,e_2 \xrightarrow{\mathrm{D}e_2} \mathrm{T}'\mathrm{T}\,e_2$ et où le diagramme

$$\begin{tikzcd} Kl\,(\mathbf{T}') & Kl\,(\mathbf{T}') \arrow[l, "\tilde{\mathrm{V}}"'] \\ \mathcal{E} \arrow[u, "\mathbf{T}'_{\mathrm{F}}"] & \mathcal{E} \arrow[l, "\mathrm{V}"'] \arrow[u, "\mathbf{T}'_{\mathrm{F}}"'] \end{tikzcd}$$

commute lorsqu'on y remplace le couple $(V, \tilde{V})$ par chacun des couples $(T, \tilde{T})$, $(I, \tilde{I})$, $(K, \tilde{K})$.

Définition 1.1. — On appelle **D**-*algèbre* une $\tilde{\mathbf{T}}$-algèbre.

Une **D**-algèbre est donc la donnée d'un couple (e, b), où $e \in |\mathcal{E}|$, où $b : \mathrm{T}\, e \to \mathrm{T}' e$ est un morphisme de $\mathcal{E}$ rendant les diagrammes $(\tilde{A}_1)$ et $(\tilde{A}_2)$ commutatifs :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}'e & & \mathrm{T}e \arrow[ll, "b"'] \\ & e \arrow[ul, "\mathrm{I}'e"] \arrow[ur, "\mathrm{I}e"'] \arrow[u, phantom, "(\tilde{A}_1)"] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{T}'\mathrm{T}'e \arrow[dr, "\mathrm{K}'e"'] & \mathrm{T}'\mathrm{T}e \arrow[l, "\mathrm{T}'b"'] & \mathrm{T}\mathrm{T}'e \arrow[l, "\mathrm{D}e"'] & \mathrm{T}\mathrm{T}e \arrow[l, "\mathrm{T}b"'] \arrow[dl, "\mathrm{K}e"] \\ & \mathrm{T}'e & & \mathrm{T}e \arrow[ll, "b"] \end{tikzcd} \quad (\tilde{A}_2)$$

— Si $\mathbf{T}' = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ (donc $\mathrm{D} = \mathrm{Id}_{\mathrm{T}}$), une **D**-algèbre est une **T**-algèbre.

— Si $\mathbf{T} = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ (donc $\mathrm{D} = \mathrm{Id}_{\mathrm{T}'}$), la seule **D**-algèbre est $(e, \mathrm{I}'e)$.

On définit la catégorie *Alg* (**D**) dont les objets sont les **D**-algèbres, et les morphismes les $f : (e_1, b_1) \to (e_2, b_2)$, où $f : e_1 \to e_2$ est un morphisme de $\mathcal{E}$ tel que $\mathrm{T}' f . b_1 = b_2 . \mathrm{T} f$. On peut évidemment définir un foncteur d'oubli

$$\mathrm{U}^{\mathbf{D}} : Alg\,(\mathbf{D}) \to \mathcal{E} : [f : (e_1, b_1) \to (e_2, b_2)] \mapsto (f : e_1 \to e_2)$$

tel que le carré suivant soit un produit fibré dans la 2-catégorie *Cat* associée à l'univers $|\,Ens\,|$,

$$\begin{tikzcd} Alg\,(\tilde{\mathbf{T}}) \arrow[d, "\mathrm{U}^{\tilde{\mathbf{T}}}"'] & Alg\,(\mathbf{D}) \arrow[l, hook, "\tilde{\mathrm{F}}"'] \arrow[d, "\mathrm{U}^{\mathbf{D}}"] \\ Kl(\mathbf{T}') & \mathcal{E} \arrow[l, hook, "\mathrm{T}'_{\mathrm{F}}"'] \end{tikzcd}$$

les deux plongements horizontaux étant des identités sur les objets. De plus, il se trouve que le triple $\tilde{\mathbf{T}}'$ sur *Alg* (**T**) est induit par l'adjonction $\tilde{\mathrm{F}} \circ \mathrm{F} \dashv \tilde{\mathrm{U}}$, où F associe à la **T**-algèbre $\mathrm{T}\, e \xrightarrow{b} e$, la **D**-algèbre $\mathrm{T}\, e \xrightarrow{b} e \xrightarrow{1'_e} \mathrm{T}'_e$

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Alg}}(\mathbf{D}) \arrow[rr, "\tilde{\mathrm{F}}"] & & \underline{\mathrm{Alg}}(\tilde{\mathbf{T}}) \arrow[dl, "\tilde{\mathrm{U}}"] \\ & \underline{\mathrm{Alg}}(\mathbf{T}) \arrow[ul, "\mathrm{F}"] & \end{tikzcd}$$

et où $\tilde{\mathrm{U}}$ est un relèvement du foncteur ${}^{\mathbf{T}'}\mathrm{U} : Kl\,(\mathbf{T}') \to \mathcal{E}$ dans le sens que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} Alg\,(\mathbf{T}) \arrow[d, "{}^{-}\mathrm{U}^{\mathbf{T}}"'] & Alg\,(\tilde{\mathbf{T}}) \arrow[l, "\tilde{\mathrm{U}}"'] \arrow[d, "\mathrm{U}^{\tilde{\mathbf{T}}}"] \\ \mathcal{E} & Kl\,(\mathbf{T}') \arrow[l, "\mathrm{T}'_{\mathrm{U}}"'] \end{tikzcd}$$

De plus, $\tilde{U}$ associe à la **D**-algèbre $\mathrm{T}\, e \xrightarrow{b} \mathrm{T}'\, e$ la **T**-algèbre

$$\mathrm{TT}'\, e \xrightarrow{\mathrm{D}\, e} \mathrm{T}'\, \mathrm{T}\, e \xrightarrow{\mathrm{T}'\, b} \mathrm{T}'\, \mathrm{T}'\, e \xrightarrow{\mathrm{K}'\, e} \mathrm{T}'\, e.$$

En fait, on a plus :

Proposition 1.1. — *Si* (e, b) *est une* **D**-*algèbre*, $(\mathrm{T}'\, e, \mathrm{K}'\, e.\mathrm{T}'\, b.\mathrm{D}\, e, \mathrm{K}'\, e)$ *est une* $\mathbf{T}' \otimes_{\mathbf{D}} \mathbf{T}$-*algèbre; si inversement* $(\mathrm{T}'\, e, b)$ *est une* **T**-*algèbre telle que* $(\mathrm{T}'\, e, b, \mathrm{K}'\, e)$ *soit une* $\mathbf{T}' \otimes_{\mathbf{D}} \mathbf{T}$-algèbre, *alors* $(e, b.\mathrm{TI}'\, e)$ *est une* **D**-*algèbre.* Ceci définit une correspondance *biunivoque* entre les **D**-algèbres sur e et les **T**-algèbres sur $\mathrm{T}'\, e$ qui sont **D**-compatibles avec la multiplication du triple $\mathbf{T}'$.

Quant au problème des limites dans $Alg\,(\mathbf{D})$, même si $\mathcal{E}$ est à limites projectives, $Kl\,(\mathbf{T}')$ [et donc $Alg\,(\tilde{\mathbf{T}})$] a fort peu de chances d'avoir une telle propriété; il en est de même de $Alg\,(\mathbf{D})$. Cependant, dans le cas particulier où $\mathbf{T}'$ est le triple des parties $\mathbf{P} = (Ens, \mathcal{P}, \mathrm{I}', \mathrm{K}')$ (où $\mathrm{I}'\,\mathrm{E} : \mathrm{E} \to \mathcal{P}\,\mathrm{E}$ et $\mathrm{K}'\,\mathrm{E} : \mathcal{P}\mathcal{P}\,\mathrm{E} \to \mathcal{P}\,\mathrm{E}$ sont les opérations singleton et réunion), on sait que $Kl\,(\mathbf{P})$, la catégorie des relations associée à l'univers $|\,Ens\,|$, est à produits, et donc aussi $Alg\,(\tilde{\mathbf{T}})$: il se trouve que le plongement $\tilde{\mathrm{F}} : Alg\,(\mathbf{D}) \hookrightarrow Alg\,(\tilde{\mathbf{T}})$ crée ces produits et que $\mathrm{U}^{\mathbf{D}} : Alg\,(\mathbf{D}) \to \mathcal{E}$ commute avec eux : Ainsi, si $b_1 : \mathrm{TE}_1 \to \mathcal{P}\,(\mathrm{E}_1)$ et $b_2 : \mathrm{TE}_2 \to \mathcal{P}\,(\mathrm{E}_2)$ sont deux **D**-algèbres, leur produit dans $Alg\,(\mathbf{D})$ est

$$\mathrm{T}\,(\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2) \xrightarrow{c\,(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)} \mathrm{TE}_1 \times \mathrm{TE}_2 \xrightarrow{b_1 \times b_2} \mathcal{P}\,(\mathrm{E}_1) \times \mathcal{P}\,(\mathrm{E}_2) \xrightarrow{d\,(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)} \mathcal{P}\,(\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2),$$

où $c\,(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2)$ est l'application canonique due à $\mathrm{T}\,p_1$ et $\mathrm{T}\,p_2$, si $p_1 : \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \to \mathrm{E}_1$ et $p_2 : \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \to \mathrm{E}_2$ sont les projections canoniques et où $d\,(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2) : (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2) \mapsto \mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2$. On pourrait montrer que la loi distributive $\mathbf{D} = (Ens, \mathbf{P}, \mathrm{D}, \mathbf{T})$, lorsqu'elle existe, est liée à ce d, plus précisément,

$$\mathrm{DE} = \varinjlim d^n\,(\mathrm{E}), \qquad \text{où} \quad d^n\,(\mathrm{E}) : (\mathcal{P}\,\mathrm{E})^n \to \mathcal{P}\,(\mathrm{E}^n) : (\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n) \mapsto \mathrm{A}_1 \times \ldots \times \mathrm{A}_n,$$

cette limite étant indexée par la catégorie qui indexe la limite $\mathrm{TE} = \varinjlim \mathrm{E}^n$.

2. Exemples :

1. Si $\mathbf{T}' = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$, on a $Alg\,(\mathbf{D}) = Alg\,(\mathbf{T})$.

2. Si $\mathcal{E} = Ens$, soit $\mathbf{T}' = (Ens, (\ \ ) + 1, \mathrm{I}', \mathrm{K}')$, où $\mathrm{I}'\,\mathrm{E} : \mathrm{E} \to \mathrm{E} + 1$ est l'injection canonique et où $\mathrm{K}'\,\mathrm{E} : (\mathrm{E} + 1) + 1 \to \mathrm{E} + 1$ est la rétraction sur $\mathrm{E} + 1$ transformant l'élément ajouté à $\mathrm{E} + 1$ en celui ajouté à E; soit **T** un triple sur *Ens* tel qu'il existe une loi distributive $\mathbf{D} = (Ens, \mathbf{T}', \mathrm{D}, \mathbf{T})$; alors une **D**-algèbre est appelée une **T**-*algèbre partielle* et, selon le choix du triple **T**, on retrouve les notions d'algèbres partielles connues (monoïdes partiels, etc.).

3. Si $\mathcal{E} = Ens$, si $\mathbf{T}'$ est le triple **P** des parties défini plus haut, et si **T** est un triple sur *Ens* tel qu'il existe une loi distributive $\mathbf{D} = (Ens, \mathbf{P}, \mathrm{D}, \mathbf{T})$, une **D**-algèbre est appelée une **T**-*algèbre non déterministique.* Par exemple,

soit **T** le triple $\mathbf{M} = (Ens, (-)\times \mathrm{M}, \mathrm{I}, \mathrm{K})$, où M est un monoïde dont l'unité est notée 1, où

$$\mathrm{IE} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}\times\mathrm{M} : x \mapsto (x, 1),$$
$$\mathrm{KE} : \mathrm{E}\times\mathrm{M}\times\mathrm{M} \to \mathrm{E}\times\mathrm{M} : (x, m_1, m_2) \mapsto (x, m_1 m_2).$$

Proposition 2.1. — *L'application*

$$\mathrm{DE} : (\mathcal{P}\,\mathrm{E})\times\mathrm{M} \to \mathcal{P}\,(\mathrm{E}\times\mathrm{M}) : (\mathrm{A}, m) \mapsto \{(x, m)/x \in \mathrm{A}\}$$

définit une loi distributive $\mathbf{D} = (Ens, \mathbf{P}, \mathrm{D}, \mathbf{M})$, *et les* **M**-*algèbres non déterministiques sont les Automates non déterministiques : Alg* (**D**) est la catégorie des Automates non déterministiques ([4]).

D'après la proposition 1.1, il y a une correspondance biunivoque entre les automates non déterministiques sur E et les automates sur $\mathcal{P}\,\mathrm{E}$ « **D**-compatibles avec l'opération réunion » [c'est-à-dire les **M**-algèbres $b : (\mathcal{P}\,\mathrm{E})\times\mathrm{M} \to \mathcal{P}\,\mathrm{E}$ qui vérifient $\bigcup_{\mathrm{A}\in\emptyset} b(\mathrm{A}, m) = b\left(\bigcup_{\mathrm{A}\in\emptyset} \mathrm{A}, m\right)$, si $\emptyset$ est un élément de $\mathcal{P}\mathcal{P}\,\mathrm{E}$ et m de M]. Se référer à ce qui précède les exemples pour la construction des produits d'algèbres non déterministiques.

4. Si $\mathbf{T} = (Ens, \mathrm{T}, \mathrm{I}, \mathrm{K})$ est un triple tel qu'il existe une loi distributive $\mathbf{D} = (Ens, \mathbf{P}, \mathrm{D}, \mathbf{T})$, et si (e, b, a, i, k) est un **T**-préordre au sens de ([3]) [notion qui généralise les « relational algebras » de Barr ([3])], il définit une **T**-algèbre non déterministique qui à tout objet de T e associe sa classe d'équivalence.

5. Soit $\mathbf{M}' = (Ens, \mathrm{M}'\times(-), \mathrm{I}', \mathrm{K}')$ le triple décrivant l'opération à gauche du monoïde M' :

Proposition 2.2. — *L'isomorphisme canonique*

$$\mathrm{DE} : (\mathrm{M}' \times \mathrm{E}) \times \mathrm{M} \to \mathrm{M}' \times (\mathrm{E} \times \mathrm{M})$$

définit une loi distributive $\mathbf{D} = (Ens, \mathbf{M}', \mathrm{D}, \mathbf{M})$, *et les* **D**-*algèbres sont les Automates avec entrée et sortie : Alg* (**D**) est la catégorie des Automates avec entrée et sortie ([4]).

6. Soit $\mathbf{T}' = (Ens, (-)^n, (-)^i, (-)^\delta)$, où $1 \xleftarrow{i} n \xrightarrow{\delta} n^2$ quel que soit le triple **T** sur *Ens*, il existe toujours une loi distributive $\mathbf{D} = (Ens, \mathbf{T}', \mathrm{D}, \mathbf{T})$, où $\mathrm{DE} : \mathrm{T}\,(\mathrm{E}^n) \to (\mathrm{TE})^n$ est construite à l'aide de la propriété universelle des produits. De plus, à tout n-uplet $((\mathrm{E}, b_i))_{i=1,\ldots,n}$ de **T**-algèbres, on associe une **D**-algèbre $b : \mathrm{TE} \to \mathrm{E}^n$ telle que $p_i . b = b_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, si $p_i : \mathrm{E}^n \to \mathrm{E}$ est la $i^{\text{ième}}$ projection.

(*) Séance du 15 janvier 1973.

(1) Beck, *Distributive Laws* (*Lecture Notes* 80, Springer).
(2) Barr, *Relational Algebras* (*Lecture Notes* 137, Springer).
(3) A. Burroni, **T**-*Catégories* (*Cahiers de Top. et Géom. diff.*, XII-3, 1971.
(4) Hopcroft-Ullmann, *Formal languages and their relation to automata.*

Département de Mathématiques,
Tour 55,
Université Paris VII,
2, *place Jussieu,*
75221 *Paris-Cedex* 05.