ALGÈBRE DES CATÉGORIES. — *Catégories relatives à une loi distributive.* Note (*) de Mme **Élisabeth Burroni**, présentée par M. René Garnier.

Les algèbres non déterministiques et les catégories sont des cas particuliers d'une notion plus générale : celle des catégories relatives à une loi distributive **D** que nous étudions ici (ce sont des monades formées dans les **D**-spans). On montre ensuite que les 2-foncteurs « Algèbre » et « Kleisli » sont des 2-algèbres sur le 2-triple des monades.

$\circ$ désignera la première loi de toute 2-catégorie $\mathcal{O}$, et $\bullet$ la seconde (celle sur les Hom). On adopte les mêmes notations que dans ([3]).

Les définitions 0.1 et 0.2 sont dues à Albert Burroni ([2]).

Définition 0.1. — Si $\mathbf{T} = (\mathcal{O}, \mathrm{T}, \mathrm{I}, \mathrm{K})$ est un 2-triple, $(e, b, \iota, \varkappa)$ est une **T**-2-*algèbre* signifie que $e \in |\mathcal{O}|$, que $b : \mathrm{T}\, e \to e$ est un morphisme de $\mathcal{O}$, que $\iota : b \circ \mathrm{I}\, e \to \mathrm{Id}_e$ et $\varkappa : b \circ \mathrm{K}\, e \to b \circ \mathrm{T}\, b$ sont des 2-morphismes de $\mathcal{O}$ tels que :

$$(b \circ \mathrm{T}\,\iota).(\varkappa \circ \mathrm{TI}\, e) = \mathrm{Id}_b, \qquad (\iota \circ b).(\varkappa \circ \mathrm{IT}\, e) = \mathrm{Id}_b,$$
$$(\varkappa \circ \mathrm{TT}\, b).(\varkappa \circ \mathrm{KT}\, e) = (b \circ \mathrm{T}\,\varkappa).(\varkappa \circ \mathrm{TK}\, e).$$

(une Id-2-algèbre est une monade).

Définition 0.2. — Une *pseudo-catégorie* est une 2-catégorie « à des 2-morphismes près » (pas seulement à des isomorphismes près) [c'est un cas particulier d'une **N**-2-algèbre, où $\mathbf{N} = (Cat\,(Gr), \mathrm{N}, \mathcal{J}, \mathcal{K})$ est le 2-triple des chemins sur la 2-catégorie des objets catégories dans les graphes $Cat\,(Gr)$].

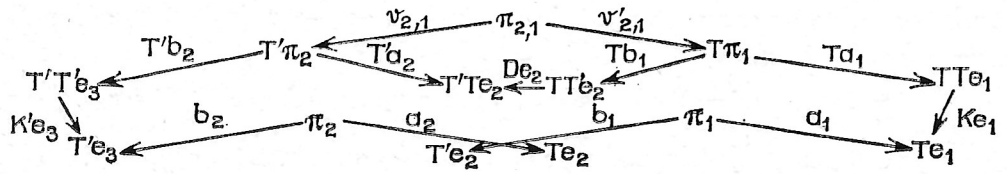
1. **D**-catégories. — $\mathbf{D} = (\mathcal{E}, \mathbf{T}', \mathrm{D}, \mathbf{T})$ est une loi distributive et $\mathcal{E}$ est une catégorie munie d'un choix canonique de produits fibrés finis.

Définition 1.1. — Un **D**-*span* est la donnée suivante : $\mathrm{T}'\, e_2 \xleftarrow{b} \pi \xrightarrow{a} \mathrm{T}\, e_1$ que l'on note $\theta = (b, a) : e_1 \to e_2$, $\pi$ est le *sommet* de $\theta$.

Un **D**-*graphe* est un **D**-span fermé : $\theta = (b, a) : e \to e$.

Proposition 1.1. — *Les* **D**-*spans forment une pseudo-catégorie, notée* $Sp\,(\mathbf{D})$.

$|Sp\,(\mathbf{D})| = |\mathcal{E}|$, les morphismes de $Sp\,(\mathbf{D})$ sont les **D**-spans, et ses 2-morphismes sont les $m : (b', a') \to (b, a)$ tels que $m : \pi' \to \pi$ est un morphisme de $\mathcal{E}$ vérifiant $a.m = a'$ et $b.m = b'$. La seconde loi de $Sp\,(\mathbf{D})$ est trivialement donnée par celle de $\mathcal{E}$ et fait de $Sp\,(\mathbf{D})$ un objet de $Cat\,(Gr)$. La première loi de $Sp\,(\mathbf{D})$ se construit à partir de la composition de deux **D**-spans :



$\theta_2 \circ \theta_1 = (\mathrm{K}' e_3 . \mathrm{T}' b_2 . v_{2,1}, \mathrm{K}\, e_1 . \mathrm{T}\, a_1 . v'_{2,1})$, le pentagone supérieur étant un produit fibré dans $\mathcal{E}$. Ainsi, à tout $n$-uplet de **D**-spans composables $(\theta_n, \ldots, \theta_1)$ correspond, d'une part un *composé canonique* $\theta_n \circ \theta_{n-1} \circ \ldots \circ \theta_1$ [obtenu en composant les $(n-1)$ premiers et les $(n-1)$ derniers **D**-spans et en terminant par un produit fibré du type de celui qui précède] et d'autre part un 2-morphisme de ce composé canonique vers tout autre composé fait par associativité sur ces $n$ **D**-spans. Ainsi pour $n = 3$ on a

$$\theta_3 \circ (\theta_2 \circ \theta_1) \xleftarrow{s} \theta_3 \circ \theta_2 \circ \theta_1 \xrightarrow{s'} (\theta_3 \circ \theta_2) \circ \theta_1,$$

et, de même, si $\theta : e_1 \to e_2$, on a des 2-morphismes $\mathrm{Id}_{e_2} \circ \theta \xleftarrow{l} \theta \xrightarrow{r} \theta \circ \mathrm{Id}_{e_1}$, où $\mathrm{Id}_e$ désigne le **D**-span $\mathrm{T}' e \xleftarrow{\mathrm{I}' e} e \xrightarrow{\mathrm{I} e} \mathrm{T}\, e$. Ces 2-morphismes sont liés par des relations de cohérence résultant du fait que l'on a une **N**-2-algèbre :

$$\mathrm{N}\, Sp\,(\mathbf{D}) \xrightarrow{b} Sp\,(\mathbf{D}) : (\theta_n, \ldots, \theta_1) \mapsto \theta_n \circ \ldots \circ \theta_1.$$

Il est à remarquer que $s$, $s'$, $l$, $r$ résultent tous du 2-morphisme $\varkappa : b \circ \mathcal{K}\,(Sp\,(\mathbf{D})) \to b \circ \mathrm{N}\, b$.

Proposition 1.2. — *Si $\mathcal{E}$ est à* A-*limites projectives, $Sp$ (**D**) est à* A-*limites projectives.*

Le produit de $\bar{\theta} = (\bar{b}, \bar{a})$ et $\theta = (b, a)$ est le **D**-span en traits pointillés, limite projective du diagramme en traits pleins.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}'(\bar{e}_2 \times e_2) \arrow[rr, dashed, leftarrow, "\hat{\pi}"] \arrow[d] & & \mathrm{T}(\bar{e}_1 \times e_1) \arrow[d] \\
\mathrm{T}'\bar{e}_2 \times \mathrm{T}'e_2 & \bar{\pi} \times \pi \arrow[l, "\bar{b} \times b"'] \arrow[r, "\bar{a} \times a"] & \mathrm{T}\bar{e}_1 \times \mathrm{T}e_1
\end{tikzcd}$$

*Exemples* — Si **D** est la loi distributive identique sur $\mathcal{E}$, un **D**-span est un span dans $\mathcal{E}$ : $Sp\,(\mathbf{D}) = Sp\,(\mathcal{E})$.

De plus, si $\mathcal{E} = Ens$, tout ensemble E s'identifie au span $1 \leftarrow \mathrm{E} \to 1$, et le *produit canonique* de $n$ ensembles $\mathrm{E}_n \times \ldots \times \mathrm{E}_1$ est exactement le *composé canonique* des $n$ spans correspondants, et l'on a des applications (ici des isomorphismes) du type

$$\mathrm{E}_3 \times (\mathrm{E}_2 \times \mathrm{E}_1) \leftarrow \mathrm{E}_3 \times \mathrm{E}_2 \times \mathrm{E}_1 \to (\mathrm{E}_3 \times \mathrm{E}_2) \times \mathrm{E}_1.$$

*Définition* 1.2. — On appelle **D**-*catégorie* une monade dans $Sp\,(\mathbf{D})$ :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Id}_e \arrow[r, "i"] & \theta \arrow[rr, bend left, "k"] \arrow[r, "r"] \arrow[rr, bend right, "l"'] & \theta \circ \mathrm{Id}_e \arrow[r, "\theta \circ i"] & \theta \circ \theta & (\theta \circ \theta) \circ \theta \arrow[l, "k \circ \theta"'] & \theta \circ \theta \circ \theta \arrow[l, "s'"'] \arrow[d, "s"] \\
 & & \mathrm{Id}_e \circ \theta \arrow[r, "i \circ \theta"] & \theta \circ \theta & \theta \circ (\theta \circ \theta) \arrow[l, "\theta \circ k"] &
\end{tikzcd}$$

C'est donc un quintuplet $(e, b, a, i, k)$ où $e \in |\mathcal{E}|$, où $\theta = (b, a) : e \to e$ est un **D**-graphe de sommet $\pi$, où $i : e \to \pi$ et $k : \pi_2 \to \pi$ ($\pi_2$ est le sommet de $\theta \circ \theta$) sont tels que

$$a.i = \mathrm{I}\, e, \qquad b.i = \mathrm{I}'\, e, \qquad a.k = \mathrm{K}\, e . \mathrm{T}\, a . v'_2, \qquad b.k = \mathrm{K}'\, e . \mathrm{T}'\, b . v_2$$

($v_2$ et $v'_2$ sont les projections du produit fibré concernant $\theta \circ \theta$), ....

Si l'on se rappelle ([3]) que $\mathbf{T}$ se prolonge en un triple $\tilde{\mathbf{T}}$ sur $Kl(\mathbf{T}')$, une $\mathbf{D}$-catégorie est un cas particulier d'une $\mathbf{T}$-catégorie ([1]).

*Cat* ($\mathbf{D}$) désigne la catégorie dont les objets sont les $\mathbf{D}$-catégories, et dont les morphismes, les $\mathbf{D}$-*foncteurs*, sont les

$$(f, \bar{f})\ (e_1, b_1, a_1, i_1, k_1) \to (e_2, b_2, a_2, i_2, k_2)$$

tels que $f : e_1 \to e_2$ et $\bar{f} : \pi_1 \to \pi_2$ vérifient $\mathrm{T}\, f . a_1 = a_2 . \bar{f}$ et $\mathrm{T}'\, f . b_1 = b_2 . \bar{f}$.

Proposition 1.3. — *Le foncteur d'oubli évident Cat* ($\mathbf{D}$) $\to \mathcal{E}$ *admet un adjoint et un coadjoint* ($\mathrm{T}'\, e \xleftarrow{\mathrm{I}'e} e \xrightarrow{\mathrm{I}e} \mathrm{T}\, e$ et $\mathrm{T}'\, e \leftarrow \mathrm{T}'\, e \times \mathrm{T}\, e \to \mathrm{T}\, e$ *sont les* $\mathbf{D}$-*catégories libre et colibre associées à* $e \in |\mathcal{E}|$).

Proposition 1.4. — *Si* $\mathcal{E}$ *est à* A-*limites projectives, Cat* ($\mathbf{D}$) *est à* A-*limites projectives* (*voir* la proposition 1.2).

*Exemples.* — Si $\mathbf{T}' = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ (donc $\mathrm{D} = \mathrm{Id}_{\mathrm{T}}$), *Cat* ($\mathbf{D}$) est la catégorie *Cat* ($\mathbf{T}$) des $\mathbf{T}$-catégories ([1]). Donc si $\mathbf{D}$ est la loi distributive identique sur $\mathcal{E}$, *Cat* ($\mathbf{D}$) = *Cat* ($\mathcal{E}$) (une $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$-catégorie est une catégorie dans $\mathcal{E}$).

— Si $(e, b, a, i, k)$ est une $\mathbf{D}$-catégorie, selon que le morphisme canonique $\pi \to \mathrm{T}'\, e \times \mathrm{T}\, e$ ou que $a : \pi \to \mathrm{T}\, e$ est un monomorphisme, on obtient des cas particuliers intéressants appelés $\mathbf{D}$-*préordre* ou $\mathbf{D}$-*catégorie séparée :* le produit fibré d'une $\mathbf{T}'$-algèbre $(e, b')$ et d'une $\mathbf{T}$-algèbre $(e, b)$ $\mathbf{D}$-compatibles ($b' . \mathrm{T}'\, b . \mathrm{D}\, e = b . \mathrm{T}\, b'$) donne un exemple de $\mathbf{D}$-préordre; nous avons étudié dans ([3]) un exemple de $\mathbf{D}$-catégories séparées, celles pour lesquelles $a = \mathrm{Id}_{\mathrm{T}e}$ : les $\mathbf{D}$-*algèbres* (si $a = \mathrm{Id}_{\mathrm{T}e}$, alors $i = \mathrm{I}\, e$, $k = \mathrm{K}\, e$).

2. Les 2-triples des monades. — On fixe les notations, les définitions sont données avec précision par Diers ([4]).

Soit $\mathcal{O}$ une 2-catégorie, $\overleftarrow{Mon}(\mathcal{O})$ sera la 2-catégorie suivante : ses objets, les monades sont les quadruplets $\Theta = (e, \theta, i, k)$ ($e \in |\mathcal{O}|$, $\theta : e \to e, \ldots$); ses morphismes sont les couples $(\mu, m) : \bar{\Theta} \to \Theta$ où $\mu : \bar{e} \to e$ est un morphisme de $\mathcal{O}$ et $m : \mu \circ \bar{\theta} \leftarrow \theta \circ \mu$ un 2-morphisme de $\mathcal{O}$, ...; ses 2-morphismes sont les $\sigma : (\mu, m) \to (\nu, n)$ où $\sigma : \mu \to \nu$ est un 2-morphisme de $\mathcal{O}$, ...). On appellera $\mathcal{O}$-*loi distributive* un quadruplet $(e, \Theta', \mathrm{D}, \Theta)$, où $\Theta'$ et $\Theta$ sont deux monades sur $e \in |\mathcal{O}|$ et où $\mathrm{D} : \theta \circ \theta' \to \theta' \circ \theta$ est un 2-morphisme de $\mathcal{O}$ vérifiant les relations rappelées dans ([3]) pour les *Cat*-lois distributives. On définit la *monade composée associée à* $\mathbf{D}$ :

$$\Theta' \otimes_{\mathrm{D}} \Theta = (e, \theta' \circ \theta, i' \circ i, m), \qquad \text{où} \quad m = (k' \circ k) . (\theta' \circ \mathrm{D} \circ \theta).$$

A. Si $\widehat{2\text{-}Cat}$ est la 2-catégorie des 2-catégories associée à l'univers $|\widehat{Ens}|$, on définit le 2-triple (strict) suivant :

$$\overleftarrow{\mathbf{Mon}} = \left(\widehat{2\text{-}Cat}, \overleftarrow{Mon}, \overleftarrow{\mathrm{I}}, \overleftarrow{\mathrm{K}}\right).$$

Le 2-foncteur $\overleftarrow{Mon}$ associe à $\mathcal{O} \in |\widehat{2\text{-}Cat}|$ la 2-catégorie $\overleftarrow{Mon}(\mathcal{O})$; à $\mathrm{F} : \mathcal{O}' \to \mathcal{O}$ le 2-foncteur $\overleftarrow{Mon}(\mathrm{F}) : \overleftarrow{Mon}(\mathcal{O}') \to \overleftarrow{Mon}(\mathcal{O})$ tel que

$\overleftarrow{Mon}(\mathrm{F})(e, \theta, i, k) = (\mathrm{F}\, e, \mathrm{F}\, \theta, \mathrm{F}\, i, \mathrm{F}\, k)$, $\overleftarrow{Mon}(\mathrm{F})(\mu, m) = (\mathrm{F}\, \mu, \mathrm{F}\, m)$ et $\overleftarrow{Mon}(\mathrm{F})(\sigma) = \mathrm{F}\, \sigma$; à $t : \mathrm{F}' \to \mathrm{F}$ la 2-transformation naturelle $\overleftarrow{Mon}(t) : \overleftarrow{Mon}(\mathrm{F}') \to \overleftarrow{Mon}(\mathrm{F}) : (e, \theta, i, k) \mapsto (te, te \circ \mathrm{F}\, \theta)$.

$\overleftarrow{\mathrm{I}}(\mathcal{D}) : \mathcal{D} \to \overleftarrow{Mon}(\mathcal{D})$ est le plongement trivial qui à tout objet de $\mathcal{D}$ associe la monade identique sur cet objet.

$\overleftarrow{\mathrm{K}}(\mathcal{D}) : \overleftarrow{Mon}\,\overleftarrow{Mon}(\mathcal{D}) \to \overleftarrow{Mon}(\mathcal{D})$ est défini ainsi sur les objets : si $\mathbf{\Theta}' = (\Theta, (\theta', \mathrm{D}), i', k')$ est une monade dans $\overleftarrow{Mon}(\mathcal{D})$, $\overleftarrow{\mathrm{K}}(\mathcal{D})(\mathbf{\Theta}') = \Theta' \otimes_{\mathrm{D}} \Theta$ est la monade composée associée à la $\mathcal{D}$-loi distributive $\mathbf{D} = (e, \Theta', \mathrm{D}, \Theta)$ qui s'identifie à $\mathbf{\Theta}'$ ([4]) (si $\Theta' = (e, \theta', i', k')$).

B. Soit *Cat* la 2-catégorie des catégories associée à un univers $|\,Ens\,|$ tel que *Ens* soit un objet de $\widehat{Ens}$. Alors $\overleftarrow{Mon}(Cat)$ est la 2-catégorie des triples $\overleftarrow{\mathbf{T}r}$. On s'intéresse au 2-foncteur $Alg : \overleftarrow{\mathbf{T}r} \to Cat$ défini par : $Alg(\mathbf{T})$ est la catégorie des $\mathbf{T}$-algèbres; $Alg[(\mu, m) : \overline{\mathbf{T}} \to \mathbf{T}] : Alg(\overline{\mathbf{T}}) \to Alg(\mathbf{T}) : (\overline{\mathrm{T}}\, \bar{e} \xrightarrow{\bar{b}} \bar{e}) \mapsto (\mathrm{T}\, \mu.\bar{e} \xrightarrow{m\bar{e}} \mu.\overline{\mathrm{T}}\, \bar{e} \xrightarrow{\mu.\bar{b}} \mu.\bar{e})$; $Alg[\sigma : (\mu, m) \to (\nu, n)] : Alg(\mu, m) \to Alg(\nu, n) : (\bar{e}, \bar{b}) \mapsto [\sigma\, \bar{e} : (\mu.\bar{e}, \mu.\bar{b}.m\bar{e}) \to (\nu\, \bar{e}, \nu\, \bar{b}.n\bar{e})]$.

Proposition 2.1. — *Le 2-foncteur* $Alg : \overleftarrow{\mathbf{T}r} \to Cat$ *est une* $\overleftarrow{\mathbf{M}on}$*-2-Algèbre (à des isomorphismes près).*

En effet, $Alg \circ \overleftarrow{\mathrm{I}}(Cat) \simeq \mathrm{Id}_{Cat}$; si $\mathbf{\Theta}' = (\mathbf{T}, (\mathrm{T}', \mathrm{D}), \mathrm{I}', \mathrm{K}')$ est une monade dans $\overleftarrow{\mathbf{T}r}$, $(Alg \circ \overleftarrow{\mathrm{K}}(Cat))(\mathbf{\Theta}') = Alg(\mathbf{T}' \otimes_{\mathrm{D}} \mathbf{T})$ et $\overleftarrow{Mon}(Alg)(\mathbf{\Theta}') = \tilde{\mathbf{T}}'$, relèvement du triple $\mathbf{T}'$ sur $Alg(\mathbf{T})$. Il suffit donc d'utiliser le fait, rappelé dans ([3]), que $Alg(\mathbf{T}' \otimes_{\mathrm{D}} \mathbf{T}) \simeq Alg(\tilde{\mathbf{T}}')$.

D'une manière « duale », on peut définir un 2-triple $\overrightarrow{\mathbf{M}on} = (\widehat{2\text{-}Cat}, \overrightarrow{Mon}, \overrightarrow{\mathrm{I}}, \overrightarrow{\mathrm{K}})$ et un 2-foncteur Kleisli $Kl : \overrightarrow{\mathbf{T}r} = \overrightarrow{Mon}(Cat) \to Cat$.

Proposition 2.2. — Le *2-foncteur* $Kl : \overrightarrow{\mathbf{T}r} \to Cat$ *est une* $\overrightarrow{\mathbf{M}on}$*-2-Algèbre.*

(*) Séance du 5 février 1973.

([1]) A. Burroni, T-catégories (*Cahiers de Top. et Géom. diff.*, XII-3, 1971).
([2]) A. Burroni, Conférence faite à Paris en 1972 (non publié).
([3]) E. Burroni, *Comptes rendus*, 276, série A, 1973, p. 443.
([4]) Diers, *Catégorie de monades* (Séminaire Bénabou, 1972).

*Département de Mathématiques,*
*Université Paris VII,*
Tour 55,
2, *place Jussieu,*
75221 *Paris-Cedex* 05.