C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, p. 449-452 (7 septembre 1970). Série A

ALGÈBRE DES CATÉGORIES. — *Esquisses de types : catégories munies de limites.* Note (*) de M. ALBERT BURRONI, présentée par M. René Garnier.

Les esquisses et les types de (3) sont des structures qui servent à définir les structures algébriques. En construisant leur esquisse nous montrons qu'elles-mêmes sont des structures algébriques, ce qui permet d'en déduire leurs propriétés générales.

Les notations sont relatives à un univers $\mathfrak{M}_0$; la terminologie employée est celle de [(1), (3) et (5)]. Soient $I^{\cdot}$ et $C^{\cdot}$ deux graphes multiplicatifs et $e \in C^{\cdot}_0$; on note $e^{\sim}$ le néofoncteur constant sur e de $I^{\cdot}$ vers $C^{\cdot}$. Une transformation naturelle de la forme $t = (F, \tau, e^{\sim})$, où $F = (C^{\cdot}, \underline{F}, I^{\cdot})$ est un néofoncteur, s'appelle un *cône projectif*. Si $I^{\cdot}$ est une catégorie soit $I^{\cdot}_+$ la catégorie obtenue en ajoutant à $I^{\cdot}$ un objet initial o; on note o_i l'unique morphisme de o vers $i \in I^{\cdot}_0$. On notera o' l'objet initial de $I^{\cdot}_{++} = (I^{\cdot}_+)_+$ et $o'_{i'}$ l'unique morphisme de o' vers $i' \in (I^{\cdot}_+)_0$. La donnée de t est équivalente à celle du néfoncteur $F' = (C^{\cdot}, \underline{F}', I^{\cdot}_+)$ déterminé par $F' \mid I^{\cdot} = F$, $F'(o_i) = \tau(i)$ pour tout $i \in I^{\cdot}_0$. La donnée d'un couple (t, f) où $f \in e.C$, est équivalente à celle d'un néofoncteur $F'' = (C^{\cdot}, \underline{F}'', I^{\cdot}_{++})$ déterminé par $F'' \mid I^{\cdot}_+ = F'$, $F''(o'_i) = \tau(i).f$ pour tout $i \in I'_0$ et $F''(o'_0) = f$.

Si $\mathcal{J}$ est un ensemble de catégories (ou même de graphes multiplicatifs — la généralisation se fait et sans difficultés) et $\sigma = (U^{\cdot}, \mu, M)$ une $\mathcal{J}$-pré-esquisse (projective) pointée, on appelle objets et flèches de σ les objets et les flèches de $U^{\cdot}$. Les axiomes de ρ sont les relations de la forme $z = y.x$, où

$$z \in U, \qquad y \in U - U^{\cdot}_0, \qquad x \in U - U^{\cdot}_0, \qquad (y, x) \in U^{\cdot} \star U^{\cdot}.$$

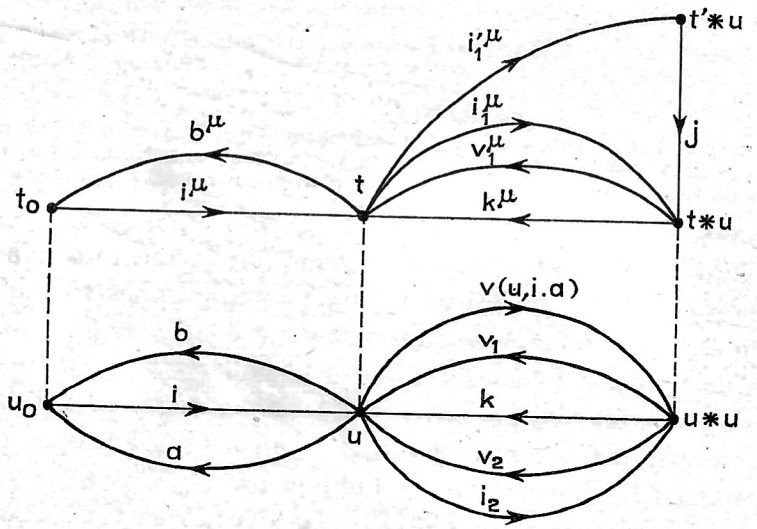
Si $F = (\mathfrak{M}, \underline{F}, U^{\cdot})$ est un néofoncteur, vers la catégorie $\mathfrak{M}$ des applications associée à un univers $\mathfrak{M}_0$, on note $\pi_F = (U^{\cdot}, \underline{\pi}_F, S^{\cdot}_F)$ le néofoncteur d'hypermorphismes (1) associé : $S^{\cdot}_F$ est l'ensemble des couples $(f, s) \in U \times F(\alpha(f))$, muni de la Loi de composition

$$(f', s').(f, s) = (f'.f, s),$$

où $(f', s') \in S_F$, si et seulement si $s' = F(f)(s)$ et $(f', f) \in U^{\cdot} \star U^{\cdot}$.

Dans (2) est définie une *esquisse de Catégorie* $\sigma_{\mathcal{F}} = (U^{\cdot}_{\mathcal{F}}, \mu_{\mathcal{F}}, \{i\})$ dont nous reprenons le détail des notation. La proposition 4 de (2) définit un isomorphisme K de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{S}(\Sigma_{\mathfrak{M}}, \sigma_{\mathcal{F}})$, en posant $\Sigma_{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{M}, \mu_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}^{\cdot})$, où $\mu_{\mathfrak{M}}$ est l'application $\mathcal{J}$-limite projective naturalisée usuelle dans $\mathfrak{M}$.

Si $\mathrm{I}^{\cdot} \in \mathcal{F}_0$, nous appellerons *esquisse de $\mathcal{J}$-type*, en posant $\mathcal{J} = \{\mathrm{I}^{\cdot}\}$, la $\mathcal{J}$-préesquisse $\sigma^{\mathcal{J}} = (\mathrm{U}^{\cdot\mathcal{J}}, \mu^{\mathcal{J}}, \{i\})$ définie ci-dessous, où $\mathcal{J}$ est un ensemble de graphes multiplicatifs comportant tous les éléments qui seront utilisés dans la définition de $\mu^{\mathcal{J}}$. Nous adopterons les conventions suivantes : $\mathrm{S}(\hat{\mathrm{I}}^{\cdot})$ désigne le graphe multiplicatif $\mathrm{S}^{\cdot}_{\mathrm{F}}$, où $\mathrm{F} = \mathrm{K}(\hat{\mathrm{I}}^{\cdot})$, $\pi = \pi_{\mathrm{A}}$, $\pi_{+} = \pi_{\mathrm{A}'}$, $\pi_{++} = \pi_{\mathrm{A}''}$, où $\mathrm{A} = \mathrm{K}(\mathrm{I}^{\cdot})$, $\mathrm{A}' = \mathrm{K}(\mathrm{I}^{\cdot}_{+})$, $\mathrm{A}'' = \mathrm{K}(\mathrm{I}^{\cdot}_{++})$. $\theta = (e, z)$ est un



élément quelconque de $\mathrm{S}(\mathrm{I}^{\cdot})_0$, $\bar{\theta} = (e, \bar{z})$ et $\bar{\bar{\theta}} = (e, \bar{\bar{z}})$ des éléments quelconques respectivement de $\mathrm{S}(\mathrm{I}^{\cdot}_{+})_0$ et de $\mathrm{S}(\mathrm{I}^{\cdot}_{++})_0$. Si $g \in e'.\mathrm{U}_{\mathcal{F}}.e$, $e', e \in (\mathrm{U}^{\cdot}_{\mathcal{F}})_0$, on note

$$\theta' = (e', z'), \qquad \bar{\theta}' = (e', \bar{z}'), \qquad \bar{\bar{\theta}}' = (e', \bar{\bar{z}}'),$$

où $z' = \mathrm{I}^{\cdot}_{g}(z)$, $z' = (\mathrm{I}^{\cdot}_{+})_g(\bar{z})$, $\bar{\bar{z}}' = (\mathrm{I}^{\cdot}_{++})_g(\bar{\bar{z}})$, et où on pose $\hat{\mathrm{I}}^{\cdot}_{g} = \mathrm{K}(\hat{\mathrm{I}}^{\cdot})\ (g)$ pour tout $\hat{\mathrm{I}}^{\cdot} \in \mathcal{F}_0$. Soit ω le foncteur de $\mathrm{I}^{\cdot}_{+}$ vers $\mathrm{I}^{\cdot}_{++}$ qui coïncide avec l'identité sur $\mathrm{I}^{\cdot}$ et tel que $\omega(o_i) = o_i'$ pour tout $i \in \mathrm{I}^{\cdot}_0$; on pose

$$\bar{\bar{\theta}}_1 = (e, \omega(\bar{z})) \qquad \text{si} \quad \bar{\theta} = (e, \bar{z}) \in \mathrm{S}(\mathrm{I}^{\cdot}_{+})_0.$$

La $\mathcal{J}$-préesquisse $\sigma^{\mathcal{J}}$ est alors telle que $\sigma_{\mathcal{F}}$ soit une sous-préesquisse et comporte les données supplémentaires suivantes :

1° les objets t_0, t, $t \star u$, $t' \star u$;

2° les flèches (*voir* figure) :

$p(\theta)$ de t_0 vers e; $p^{+}(\bar{\theta})$ de t vers e;

$p^{++}(\bar{\bar{\theta}})$ de $t \star u$ vers e;

b^{μ} de t vers t_0; v_1^{μ} et k^{μ} de $t \star u$ vers t;

i^{μ} de t_0 vers t; i_1^{μ} de t vers $t \star u$;

$i_1'^{\mu}$ de t vers $t' \star u$; j de $t' \star u$ vers $t \star u$;

et quatre flèches g_{12}, g_{13}, g_{14}, g_{15} précisées par

3° les axiomes :

$$g.p(\theta)=p(\theta');\qquad g.p^{+}(\bar{\theta})=p^{+}(\bar{\theta}');$$

$$g.p^{++}(\bar{\bar{\theta}})=p^{++}(\bar{\bar{\theta}}');\qquad p(\theta).b^{\mu}=p^{+}(\theta);$$

$$p^{+}(\bar{\theta}).v_1^{\mu}=p^{++}(\bar{\theta});\qquad p^{+}(\bar{\theta}).k^{\mu}=p^{++}(\bar{\bar{\theta}}_1);$$

$$b^{\mu}.i^{\mu}=t_0;\qquad k^{\mu}.i_1^{\mu}=t;$$

$$v_1^{\mu}.i_1^{\mu}=g_{12}=i^{\mu}.b^{\mu};\qquad g_{13}=g_{12}.v_1^{\mu};$$

$$v_1^{\mu}.j=g_{14}=g_{13}.j;\qquad i_1^{\mu}=j.i_1'^{\mu},$$

$$g_{15}=i_1'^{\mu}.k^{\mu},\qquad g_{15}.j=t'\star u;$$

4° $\mu^{\mathcal{J}}$ est tel que π, π_+, $\pi_{++}\in\alpha(\mu^{\mathcal{J}})$ et

$$\mu^{\mathcal{J}}(\pi)=(\pi,\tau,t_0^{\sim}),\qquad \mu^{\mathcal{J}}(\pi_+)=(\pi_+,\tau_+,t^{\sim}),$$

$$\mu^{\mathcal{J}}(\pi_{++})=(\pi_{++},\tau_{++},t\star u^{\sim}),$$

où τ, τ_+, τ_{++} sont définis par les conditions

$$\tau(\theta)=p(\theta),\qquad \tau_+(\bar{\theta})=p^{+}(\bar{\theta}),\qquad \tau_{++}(\bar{\bar{\theta}})=p^{++}(\bar{\bar{\theta}}).$$

Enfin $\mu^{\mathcal{J}}$ comporte un dernier cône projectif, que nous n'expliciterons pas, qui permet de réaliser j comme noyau naturalisé de (v_1^{μ}, g_{13}).

Proposition 1. — *Les catégories $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ et $\mathcal{S}(\Sigma_{\mathfrak{M}}, \sigma^{\mathcal{J}})$ sont isomorphes.*

Plus généralement, si $\mathcal{J}, \mathcal{J}'\subset\mathcal{F}_0$ ou construit une $\mathcal{J}$-préesquisse projective $\sigma^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ telle que $\mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ soit isomorphe à $\mathcal{S}(\Sigma_{\mathfrak{M}}, \sigma^{\mathcal{J}\mathcal{J}'})$, obtenue par recollement d'esquisses déduites de l'esquisse ci-dessus. Partant de l'esquisse $\sigma^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$, on construit également des esquisses de $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-prototype, $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-préesquisse : $\sigma'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ et $\sigma''^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$, ainsi que des néofoncteurs entre ces préesquisses permettant de décrire et d'étudier les foncteurs d'oubli entre les catégories $\mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$, $\mathcal{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$, $\mathcal{S}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ de [3].

Soit $\Sigma=(\mathrm{H}^{\cdot}, \bar{\mu}, \mathrm{H}^{\prime})$ un $\mathcal{J}$-type, on note $\mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}(\Sigma)$ la catégorie $\mathcal{S}(\Sigma, \sigma^{\mathcal{J}\mathcal{J}'})$ des *homomorphismes entre $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-types structurés*. On définit de même $\mathcal{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}(\Sigma)$, $\mathcal{S}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}(\Sigma)$.

Proposition 2 (*Complétion structurée*). — *Supposons que* $\mathrm{H}^{\cdot}$ *soit à $\mathcal{F}_0$-limites inductives, que $\mathcal{J}\cup\mathcal{J}'$ soit équipotent à un élément de $\mathfrak{M}_0$ et que les* Γ*-limites projectives commutent avec les* $\mathrm{V}^{\cdot}$*-limites inductives, où* $\Gamma\in\mathcal{J}$ *et où* $\mathrm{V}^{\cdot}$ *est la catégorie associée à un ordinal régulier majorant les ordinaux*

de tous les I *et inférieur à l'ordinal associé à l'univers* $\mathfrak{M}_0$. *Alors les foncteurs d'oubli entre* $\mathfrak{F}^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}(\Sigma)$, $\mathfrak{F}'^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}(\Sigma)$ *et* $\mathfrak{S}'^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}'}(\Sigma)$ *admettent des adjoints.*

Ce théorème (6) généralise les théorèmes de complétion de (3) et (4).

(*) Séance du 20 juillet 1970.

(1) C. Ehresmann, *Catégories et structures*, Dunod, Paris, 1965.
(2) C. Ehresmann, *Cahiers de top. et géom. diff.*, X, 1, Dunod, Paris, 1968.
(3) C. Ehresmann, *Bul. Inst. Polit. Iasi*, XIV (XVIII), nos 1-2, 1968, p. 1-14.
(4) C. Ehresmann, *Cahiers de top. et géom. diff.*, IX, nos 1 et 2, Dunod, Paris, 1967.
(5) C. Ehresmann, *Maitrise de mathématiques*, C 3, Algèbre, C. D. U., Paris, 1968.
(6) A. Burroni, *Esquisses des catégories à limites et des quasi-topologies* (*Thèse de 3e cycle*; *Esquisses mathématiques*, 5, Paris, 1970).

(*Département de Mathématiques,*
Faculté des Sciences,
Tours 45-55,
9, *quai Saint-Bernard,*
75-*Paris*, 5e.)

182439. — Imp. Gauthier-Villars. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.