Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica

Geometria e algebra lineare 2

- MAT/03 GE210 -

Raffaele Di Donna
Matricola: 523997

Indice

1 Geometria euclidea

1.1 Forme bilineari

Definizione 1. Sia K un campo. La *caratteristica* di K è il più piccolo intero positivo n tale che

$$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ volte}} = 0$$

e si denota $\mathrm{ch}(K)$. Se $\nexists\, n$ si pone $\mathrm{ch}(K) := 0$.

D'ora in avanti si assume $\mathrm{ch}(K) \neq 2$, sebbene in alcuni casi questa ipotesi sia trascurabile.

Definizione 2. Sia V un K-spazio vettoriale. Una *forma bilineare su* V è un'applicazione

$$\begin{array}{rccc} b\colon & V \times V & \longrightarrow & K \\ & (v,w) & \longmapsto & b(v,w) \end{array}$$

lineare nelle due variabili, cioè che soddisfa:

FB1 $\quad b(v+v',w) = b(v,w) + b(v',w) \quad \forall\, v,v',w \in V$

FB2 $\quad b(v,w+w') = b(v,w) + b(v,w') \quad \forall\, v,w,w' \in V$

FB3 $\quad b(cv,w) = b(v,cw) = cb(v,w) \quad \forall\, v,w \in V,\ c \in K$

Una forma bilineare $b\colon V \times V \to K$ si dice

- *simmetrica*, se $b(v,w) = b(w,v) \quad \forall\, v,w \in V$
- *antisimmetrica* (o *alterna*), se $b(v,w) = -b(w,v) \quad \forall\, v,w \in V$

L'insieme delle forme bilineari su V si denota $\mathrm{Bil}(V)$.

Osservazione 1. Sia V un K-spazio vettoriale e sia $b\colon V \times V \to K$ una forma bilineare. Allora b è antisimmetrica se e solo se $b(v,v) = 0$ per ogni $v \in V$.

Dimostrazione.

($\Longrightarrow$) Per definizione, b è antisimmetrica se e solo se $b(v,w) = -b(w,v)$ per ogni $v,w \in V$. In particolare, $b(v,v) = -b(v,v)$, cioè $2b(v,v) = 0$ e quindi $b(v,v) = 0$ per ogni $v \in V$, perché $\mathrm{ch}(K) \neq 2$.

($\Longleftarrow$) Siano $v,w \in V$. Allora

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ipotesi}}}{0 =} b(v+w,v+w) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{FB1 e FB2}}}{=} b(v,v) + b(v,w) + b(w,v) + b(w,w) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ipotesi}}}{=} b(v,w) + b(w,v)$$

Di conseguenza, $b(v,w) = -b(w,v)$ e quindi b è antisimmetrica. □

Osservazione 2. Sia V un K-spazio vettoriale e sia $b\colon V \times V \to K$ una forma bilineare. Allora

$$b(v,\mathbf{0}) = b(\mathbf{0},v) = 0 \quad \forall\, v \in V$$

Dimostrazione. Segue banalmente dalla definizione 2-FB3 ponendo $c = 0$. Infatti, fissato $v \in V$, vale che

$$b(v,\mathbf{0}) = b(v, 0 \cdot \mathbf{0}) = 0 \cdot b(v,\mathbf{0}) = 0 = 0 \cdot b(\mathbf{0},v) = b(0 \cdot \mathbf{0}, v) = b(\mathbf{0},v)$$ □

Esempio 1. L'applicazione identicamente nulla

$$\begin{array}{rccc} o\colon & V \times V & \longrightarrow & K \\ & (v,w) & \longmapsto & 0 \end{array}$$

è una forma bilineare e viene detta la *forma bilineare nulla*.

Esempio 2. Siano V un K-spazio vettoriale, $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base di V e sia $A \in \mathrm{M}_n(K)$. La mappa

$$\begin{array}{rccc} b_A\colon & V \times V & \longrightarrow & K \\ & (v, w) & \longmapsto & {}^t x A y \end{array}$$

tale che, se $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, $w = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$ allora $x = {}^t(x_1 \cdots x_n)$, $y = {}^t(y_1 \cdots y_n)$, è una forma bilineare su V, infatti soddisfa

FB1 $\quad b_A(v+v', w) = {}^t(x+x')Ay = ({}^t x + {}^t x')Ay = {}^t xAy + {}^t x'Ay = b_A(v, w) + b_A(v', w) \quad \forall\, v, v', w \in V$

FB2 $\quad b_A(v, w+w') = {}^t xA(y+y') = {}^t xAy + {}^t xAy' = b_A(v, w) + b_A(v, w') \quad \forall\, v, w, w' \in V$

FB3 $\quad b_A(cv, w) = {}^t(cx)Ay = c\,{}^t xAy = cb_A(v, w) = c\,{}^t xAy = {}^t xAcy = b_A(v, cw) \quad \forall\, v, w \in V,\ c \in K$

L'applicazione b_A viene detta la *forma bilineare associata ad A*.

Esempio 3. Considero lo spazio vettoriale numerico K^n su K e fisso una matrice $A \in \mathrm{M}_n(K)$, $A = (a_{ij})$. Dati $x, y \in K^n$, $x = {}^t(x_1 \cdots x_n)$, $y = {}^t(y_1 \cdots y_n)$, si ha che

$$b_A(x, y) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} x_i y_j$$

Se $A = I_n$, si ottiene

$$b_{I_n}(x, y) = \sum_{1 \le i,j \le n} \delta_{ij} x_i y_j = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

La forma bilineare b_{I_n} è simmetrica e viene detta la *forma bilineare simmetrica standard su K^n*.

Esempio 4. Sia $n = 2k$ e sia $A \in \mathrm{M}_n(K)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} O & I_k \\ -I_k & O \end{smallmatrix}\right)$, $A = (a_{ij})$. In questo caso si ottiene

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } 1 \le i, j \le k \text{ oppure } k+1 \le i, j \le n \\ \delta_{i+k\,j} & \text{se } 1 \le i \le k,\ k+1 \le j \le n \\ -\delta_{i-k\,j} & \text{se } k+1 \le i \le n,\ 1 \le j \le k \end{cases}$$

e quindi, dati $x, y \in K^n$, $x = {}^t(x_1 \cdots x_n)$, $y = {}^t(y_1 \cdots y_n)$, si ha che

$$b_A(x, y) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} x_i y_j = x_1 y_{k+1} + \cdots + x_k y_n - x_{k+1} y_1 - \cdots - x_n y_k$$

La forma bilineare b_A è alterna e viene detta la *forma bilineare antisimmetrica standard su K^n*.

1.2 Applicazioni lineari e matrice associate a una forma bilineare

Definizione 1. Sia V un K-spazio vettoriale. A ogni forma bilineare $b\colon V \times V \to K$ sono associate

$$\begin{array}{rccc} \delta_b\colon & V & \longrightarrow & V^* \\ & v & \longmapsto & b_v \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \delta'_b\colon & V & \longrightarrow & V^* \\ & w & \longmapsto & b'_w \end{array}$$

tali che

$$\begin{array}{rccc} b_v\colon & V & \longrightarrow & K \\ & w & \longmapsto & b(v, w) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} b'_w\colon & V & \longrightarrow & K \\ & v & \longmapsto & b(v, w) \end{array}$$

Proposizione 1. *Sia V un K-spazio vettoriale e sia $b\colon V \times V \to K$ una forma bilineare. Allora le applicazioni δ_b e δ'_b sono lineari.*

Dimostrazione. Siano $v, v' \in V$ vettori qualsiasi e siano $c, c' \in K$. Valgono le seguenti equivalenze:

$$\begin{aligned} \delta_b(cv + c'v') = c\delta_b(v) + c'\delta_b(v') &\iff b_{cv+c'v'} = cb_v + c'b_{v'} \\ &\iff b_{cv+c'v'}(w) = cb_v(w) + c'b_{v'}(w) \qquad \forall\, w \in V \\ &\iff b(cv + c'v', w) = cb(v, w) + c'b(v', w) \quad \forall\, w \in V \end{aligned}$$

ma l'ultima relazione è sempre verificata, perché b è una forma bilineare. Concludo che δ_b è un'applicazione lineare e, con un ragionamento del tutto analogo, si dimostra che δ'_b è un'applicazione lineare. $\square$

Definizione 2. Siano V un K-spazio vettoriale, $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base di V e sia $b \colon V \times V \to K$ una forma bilineare. La matrice $A \in \mathrm{M}_n(K)$, $A = (a_{ij})$ tale che $a_{ij} = b(e_i, e_j)$ per ogni $1 \leq i, j \leq n$ si dice la *matrice associata a b rispetto alla base e* e si denota $\mathrm{M}_e(b)$.

Osservazione 1. Siano V un K-spazio vettoriale, $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base di V e sia $b \colon V \times V \to K$ una forma bilineare. Siano $v, w \in V$, $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $w = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$ e siano $x = {}^t(x_1 \cdots x_n)$, $y = {}^t(y_1 \cdots y_n)$. Allora la matrice associata a b rispetto alla base e calcola b, cioè $b(v, w) = {}^t x \mathrm{M}_e(b) y$.

Dimostrazione. Basta osservare che, per le proprietà delle forme bilineari, vale la relazione

$$b(v, w) = b\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i y_j b(e_i, e_j) = {}^t x \mathrm{M}_e(b) y \qquad \square$$

Osservazione 2. Sia V un K-spazio vettoriale e sia $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base di V. Una forma bilineare $b \colon V \times V \to K$ è simmetrica [risp. antisimmetrica] se e solo se $\mathrm{M}_e(b)$ è simmetrica [risp. antisimmetrica].

Dimostrazione. Siano $v, w \in V$, $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $w = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$ e siano $x = {}^t(x_1 \cdots x_n)$, $y = {}^t(y_1 \cdots y_n)$. Dall'osservazione 1 segue che

$$b(w, v) = {}^t y \mathrm{M}_e(b) x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{se } A \in \mathrm{M}_1(K) \\ \text{allora } {}^t A = A}}{=} {}^t\big({}^t y \mathrm{M}_e(b) x\big) = {}^t x\, {}^t\mathrm{M}_e(b) y$$

Ma allora si ottiene che

$$\begin{aligned} b \text{ è simmetrica} &\iff b(v, w) = b(w, v) \\ &\iff {}^t x \mathrm{M}_e(b) y = {}^t x\, {}^t\mathrm{M}_e(b) y \\ &\iff \mathrm{M}_e(b) = {}^t\mathrm{M}_e(b) \\ &\iff \mathrm{M}_e(b) \text{ è simmetrica} \end{aligned}$$

Va notato che, quando si suppone che b sia simmetrica, la terza implicazione è giustificata in quanto, facendo variare v e w fra i vettori della base e, si ottiene che $b(e_i, e_j) = b(e_j, e_i)$ al variare di $1 \leq i, j \leq n$. Analogamente si dimostra che b è antisimmetrica se e solo se $\mathrm{M}_e(b)$ è antisimmetrica. $\square$

Proposizione 2. *Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione finita $n \geq 1$ e sia $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base di V. Allora esiste una corrispondenza biunivoca*

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_e \colon \quad \mathrm{Bil}(V) &\longrightarrow \mathrm{M}_n(K) \\ b &\longmapsto \mathrm{M}_e(b) \end{aligned}$$

che induce un'applicazione biunivoca dell'insieme delle forme bilineari simmetriche [risp. antisimmetriche] sull'insieme delle matrici simmetriche [risp. antisimmetriche].

Dimostrazione. Basta osservare che M_e è un'applicazione

- iniettiva: siano $b, b' \in \mathrm{Bil}(V)$ tali che $\mathrm{M}_e(b) = \mathrm{M}_e(b')$. Dall'osservazione 1 segue che, per ogni $v, w \in V$, $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $w = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$, detti $x = {}^t(x_1 \cdots x_n)$, $y = {}^t(y_1 \cdots y_n)$, vale la relazione
$$b(v, w) = {}^t x \mathrm{M}_e(b) y = {}^t x \mathrm{M}_e(b') y = b'(v, w)$$
perciò $b = b'$.
- suriettiva: sia $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Allora la forma bilineare b_A associata ad A è tale che $\mathrm{M}_e(b_A) = A$. Infatti, per ogni $v, w \in V$, $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $w = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$, detti $x = {}^t(x_1 \cdots x_n)$, $y = {}^t(y_1 \cdots y_n)$, si ha che $b_A(v, w) = {}^t x A y$.

Concludo che M_e è una corrispondenza biunivoca. La biiezione tra forme bilineari simmetriche [risp. antisimmetriche] e matrici simmetriche [risp. antisimmetriche] segue dall'osservazione 2. $\square$

Definizione 3. Due matrici $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ si dicono *congruenti* se $\exists\, M \in \mathrm{GL}_n(K) \mid B = {}^t\!MAM$.

Osservazione 3. La congruenza di matrici è una relazione di equivalenza.

Dimostrazione. Basta osservare che la congruenza di matrici è una relazione

- riflessiva: per ogni $A \in \mathrm{M}_n(K)$ esiste $I_n \in \mathrm{GL}_n(K)$ tale che $A = {}^t I_n A\, I_n$.
- simmetrica: $\exists\, M \in \mathrm{GL}_n(K) \mid B = {}^t\!MAM \iff \exists\, M^{-1} \in \mathrm{GL}_n(K) \mid A = {}^t(M^{-1}) B M^{-1}$

$$\uparrow$$

$${}^t\!M\, {}^t(M^{-1}) = {}^t(M^{-1}M) = {}^t I_n = I_n$$
$$\text{e } {}^t\!M \in \mathrm{GL}_n(K) \implies ({}^t\!M)^{-1} = {}^t(M^{-1})$$

- transitiva: se esistono $M, N \in \mathrm{GL}_n(K)$ tali che $B = {}^t\!MAM$ e $C = {}^t\!NBN$ allora, notando che vale la relazione ${}^t\!N\, {}^t\!M = {}^t(MN)$, esiste $MN \in \mathrm{GL}_n(K) \mid C = {}^t(MN)A(MN)$. $\square$

Proposizione 3. *Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione finita $n \geq 1$. Due matrici $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ sono congruenti se e solo se $\exists\, e = \{e_1, \dots, e_n\}$, $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ basi di V, $b\colon V \times V \to K$ forma bilineare tali che $A = \mathrm{M}_e(b)$, $B = \mathrm{M}_f(b)$.*

Dimostrazione.

($\Longleftarrow$) Siano $v, w \in V$, $v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n = x'_1f_1 + \dots + x'_nf_n$, $w = y_1e_1 + \dots + y_ne_n = y'_1f_1 + \dots + y'_nf_n$ e siano $x = {}^t(x_1 \cdots x_n)$, $x' = {}^t(x'_1 \cdots x'_n)$, $y = {}^t(y_1 \cdots y_n)$, $y' = {}^t(y'_1 \cdots y'_n)$. Allora, se definisco $M := \mathrm{M}_{e,f}(\mathrm{id}_V)$, si ha che $x = Mx'$ e $y = My'$. Ma allora

$$b(v, w) = {}^t x' B y' = {}^t x A y = {}^t(Mx')A(My') = {}^t x'\, {}^t\!MAMy'$$

Segue che $B = {}^t\!MAM$ con $M \in \mathrm{GL}_n(K)$, quindi A e B sono congruenti.

($\Longrightarrow$) Innanzitutto, sia $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base di V. Se A e B sono congruenti, allora $\exists\, M \in \mathrm{GL}_n(K)$ tale che $B = {}^t\!MAM$. Ora, se $b := b_A$ è la forma bilineare associata ad A, si ha che $A = \mathrm{M}_e(b)$. Definisco $f_i := Me_i$ per ogni $1 \leq i \leq n$. Dal momento che $M \in \mathrm{GL}_n(K)$ i suoi vettori colonna, cioè $f_1, \dots, f_n$, sono linearmente indipendenti e quindi $f := \{f_1, \dots, f_n\}$ è una base di V. Di conseguenza, $M = \mathrm{M}_{e,f}(\mathrm{id}_V)$ per costruzione e, ipotizzando che $B = (b_{ij})$, si ottiene che

$$b(f_i, f_j) = {}^t(Me_i)A(Me_j) = {}^t e_i\, {}^t\!MAMe_j = {}^t e_i B e_j = b_{ij}$$

Segue che $B = \mathrm{M}_f(b)$. $\square$

1.3 Forme bilineari non degeneri e degeneri

Osservazione 1. Siano $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$. Se A e B sono congruenti, allora $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B)$.

Dimostrazione. Se A e B sono congruenti, allora esiste $M \in \mathrm{GL}_n(K)$ tale che $B = {}^t\!MAM$ e quindi

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}({}^t\!MA) = \mathrm{r}({}^t\!MAM) = \mathrm{r}(B)$$

dato che a ogni passaggio effettuo una moltiplicazione per una matrice invertibile. $\square$

Definizione 1. Siano V un K-spazio vettoriale di dimensione finita $n \geq 1$, $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base di V e sia $b\colon V \times V \to K$ una forma bilineare. Il rango di b è $\mathrm{r}(b) := \mathrm{r}(\mathrm{M}_e(b))$.

Dalla proposizione 3 della sezione 1.2 e dall'osservazione 1 segue che la definizione 1 è ben posta. Il rango della forma bilineare b, infatti, non dipende dalla scelta della base e di V, perché a basi diverse si associano matrici congruenti e quindi con lo stesso rango.

Definizione 2. Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione finita n. Una forma bilineare $b\colon V \times V \to K$ si dice *non degenere* se $r(b) = n$, si dice *degenere* se $r(b) < n$.

Proposizione 1. *Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione finita n e sia $b\colon V \times V \to K$ una forma bilineare. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *b è non degenere*

(ii) $\forall\, v \in V,\ v \neq \mathbf{0}\ \exists\, w \in V \mid b(v,w) \neq 0$

(iii) $\forall\, w \in V,\ w \neq \mathbf{0}\ \exists\, v \in V \mid b(v,w) \neq 0$

(iv) *δ_b è un isomorfismo*

(v) *δ'_b è un isomorfismo*

Dimostrazione. Fissata una base $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ di V, sia $A := \mathrm{M}_e(b)$. Dimostro l'equivalenza delle affermazioni (i), (ii) e (iv), cominciando con il mostrare che (i) $\Longrightarrow$ (ii). Innanzitutto, se b è non degenere, allora $\mathrm{r}(b) = n$ e, in particolare, $\mathrm{r}(A) = n$. Ovviamente, anche $\mathrm{r}({}^tA) = n$, quindi ${}^tA \in \mathrm{GL}_n(K)$ e, di conseguenza, l'applicazione lineare $F\colon V \to V$ associata alla matrice ${}^tA$ è un automorfismo di V. Sia ora $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$, $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ e sia $x = {}^t(x_1 \cdots x_n)$. Poiché F è iniettiva, si ha che $N(F) = \{\mathbf{0}\}$, quindi $v \notin N(F)$ e questo significa che $F(v) \neq \mathbf{0}$. Ricordando che la matrice associata a F calcola F, la relazione precedente diventa ${}^tAx \neq {}^t(0 \cdots 0)$ cioè, trasponendo primo e secondo membro, ${}^txA \neq (0 \cdots 0)$. Equivalentemente, se ${}^txA = (c_1 \cdots c_n)$ per certi $c_1, \dots, c_n \in K$, allora $\exists\, 1 \leq i \leq n \mid c_i \neq 0$. A questo punto, ponendo $w := e_i$ e $y := {}^t(0 \cdots 0\,1\,0 \cdots 0)$, si verifica facilmente che $b(v,w) = {}^txAy = c_i \neq 0$.

Ora mi occupo di mostrare il viceversa, cioè che (ii) $\Longrightarrow$ (i). Sia $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$, $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ e sia $x = {}^t(x_1 \cdots x_n)$. So per ipotesi che $\exists\, w \in V \mid b(v,w) \neq 0$. Se $w = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$ e se definisco $y = {}^t(y_1 \cdots y_n)$, la condizione precedente diventa ${}^txAy \neq 0$. In particolare, deve valere ${}^txA \neq (0 \cdots 0)$ oppure, equivalentemente, ${}^tAx \neq {}^t(0 \cdots 0)$. Ma allora, per arbitrarietà nella scelta del vettore $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$, si ha che l'applicazione lineare $F\colon V \to V$ associata alla matrice ${}^tA$ è iniettiva, perché $F(v) \neq \mathbf{0}$. Per un corollario del teorema di rango-nullità, un endomorfismo iniettivo di V è un automorfismo di V. Di conseguenza, F è un automorfismo di V e quindi ${}^tA \in \mathrm{GL}_n(K)$. Segue banalmente che $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}({}^tA) = n$, dunque posso concludere che b è una forma bilineare non degenere perché $\mathrm{r}(b) = n$.

Adesso dimostro che (ii) $\Longrightarrow$ (iv). Siccome $\dim V = \dim V^*$, è sufficiente mostrare che l'applicazione δ_b è iniettiva in virtù del corollario prima menzionato. Sia dunque $v \in N(\delta_b)$. Allora $b_v = o$ e quindi $b_v(w) = 0$ per ogni $w \in V$. Equivalentemente, $b(v,w) = 0$ per ogni $w \in V$, ma dall'ipotesi (ii) segue che non esistono vettori $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$ tali che $b(v,w) = 0$ per ogni $w \in V$, perciò deve necessariamente valere che $v = \mathbf{0}$. Di conseguenza, $N(\delta_b) = \{\mathbf{0}\}$ e posso concludere che δ_b è iniettiva, quindi un isomorfismo.

Infine, mostro che (iv) $\Longrightarrow$ (ii). Fisso un qualsiasi vettore $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$. Per ipotesi, δ_b è un isomorfismo quindi, in particolare, è un'applicazione iniettiva. Equivalentemente, $N(\delta_b) = \{\mathbf{0}\}$ e, di conseguenza, $v \notin N(\delta_b)$. Questo significa che $b_v \neq o$, ma allora $\exists\, w \in V \mid b_v(w) \neq 0$ e da ciò segue che $b(v,w) \neq 0$. L'equivalenza delle affermazioni (i), (iii) e (v) si dimostra con un procedimento del tutto analogo. $\square$

1.4 Forme bilineari simmetriche

Definizione 1. Siano V un K-spazio vettoriale, $b\colon V \times V \to K$ una forma bilineare simmetrica e siano $v, w \in V$. Si dice che *v è ortogonale a w rispetto a b* e si denota $v \perp_b w$ se $b(v,w) = 0$. Sia inoltre $S \subseteq V$ un insieme. Si dice l'*ortogonale di S rispetto a b* l'insieme

$$S^{\perp_b} := \left\{\, v \in V \;\middle|\; v \perp_b w \quad \forall\, w \in S \,\right\}$$

Per semplificare la notazione, si scrive $v \perp w$ anziché $v \perp_b w$ e l'ortogonale di S rispetto a b si denota $S^{\perp}$. Inoltre, se $S = \{s\}$ per un qualche $s \in V$, l'ortogonale di S rispetto a b si denota anche $s^{\perp}$.

Osservazione 1. Siano V un K-spazio vettoriale, $b\colon V \times V \to K$ una forma bilineare simmetrica e sia $S \subseteq V$ un insieme. Si dimostra facilmente che $S^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale di V.

Definizione 2. Sia V un K-spazio vettoriale e sia $b\colon V \times V \to K$ una forma bilineare simmetrica. Due sottospazi $U, W \subseteq V$ si dicono *ortogonali* se $U \subseteq W^{\perp}$ (equivalentemente, se $W \subseteq U^{\perp}$). Il *radicale di V* è

$$V^{\perp} := \left\{\, v \in V \;\middle|\; v \perp w \quad \forall\, w \in V \,\right\}$$

Osservazione 2. Sia V un K-spazio vettoriale e sia $b\colon V \times V \to K$ una forma bilineare simmetrica. Allora b è non degenere se e solo se $V^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$.

Dimostrazione. L'asserto segue banalmente dall'equivalenza delle affermazioni (i) e (ii) nella proposizione 1 della sezione 1.3 e dalla definizione 2. $\square$

Definizione 3. Sia V un K-spazio vettoriale e sia $b\colon V \times V \to K$ una forma bilineare simmetrica. Un vettore $v \in V$ si dice *isotropo rispetto a b* se $v \perp v$, cioè se $b(v, v) = 0$.

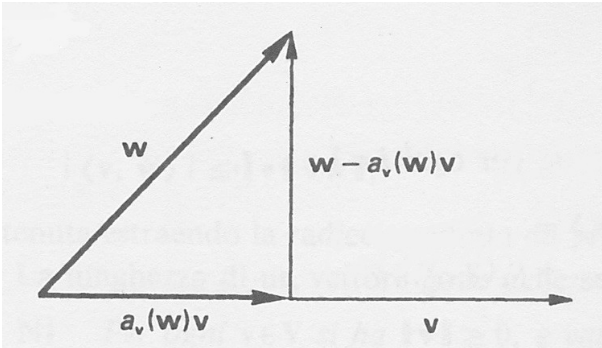
Osservazione 3. Siano V un K-spazio vettoriale, $b\colon V \times V \to K$ una forma bilineare simmetrica e sia $v \in V$. Ovviamente, se v è isotropo rispetto a b, allora il vettore cv è isotropo rispetto a b per ogni $c \in K$.

Definizione 4. Siano V un K-spazio vettoriale, $b\colon V \times V \to K$ una forma bilineare simmetrica e siano $v, w \in V$. Se v non è isotropo rispetto a b, si dice il *coefficiente di Fourier di w rispetto a v* lo scalare

$$a_v(w) := \frac{b(v, w)}{b(v, v)}$$

Osservazione 4. Siano V un K-spazio vettoriale, $b\colon V \times V \to K$ una forma bilineare simmetrica e siano $v, w \in V$. Se v non è isotropo rispetto a b, allora

$$w = a_v(w)v + (w - a_v(w)v) \qquad \text{dove} \qquad a_v(w)v \perp w - a_v(w)v$$



Dimostrazione. Basta mostrare che $a_v(w)v \perp w - a_v(w)v$, cioè che $b\big(a_v(w)v, w - a_v(w)v\big) = 0$. Per una proprietà delle forme bilineari (si veda la definizione 2-FB3 della sezione 1.1), tuttavia, è sufficiente mostrare che $b\big(v, w - a_v(w)v\big) = 0$, perché $a_v(w) \in K$. Tale identità si verifica facilmente, infatti

$$b\big(v, w - a_v(w)v\big) = b(v, w) - a_v(w)b(v, v) = b(v, w) - \frac{b(v, w)}{b(v, v)} b(v, v) = 0$$ $\square$

Osservazione 5. Siano V un K-spazio vettoriale, $b\colon V \times V \to K$ una forma bilineare simmetrica e sia $v \in V$. Se v non è isotropo rispetto a b, allora

$$V = \langle v \rangle \oplus v^{\perp}$$

Dimostrazione. Innanzitutto, va dimostrato che $\langle v \rangle \cap v^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$. A tale scopo, fisso un generico vettore $w \in \langle v \rangle \cap v^{\perp}$. Poiché $w \in \langle v \rangle$, si ha che $\exists\, c \in K$ tale che $w = cv$. D'altronde, essendo $w \in v^{\perp}$, vale la relazione $b(v, w) = 0$. Ma allora $b(v, cv) = 0$, ovvero $cb(v, v) = 0$ ed essendo v un vettore non isotropo rispetto a b per ipotesi, concludo che $c = 0$ e quindi $w = \mathbf{0}$. Rimane da dimostrare che $\langle v \rangle + v^{\perp} = V$, cioè che per ogni $w \in V$ esistono $c \in K$, $w' \in v^{\perp}$ tali che $w = cv + w'$. La tesi segue immediatamente dall'osservazione 4 ponendo $c := a_v(w)$ e $w' := w - a_v(w)v$. $\square$

Esempio 1. Siano V un K-spazio vettoriale di dimensione 2, $e = \{e_1, e_2\}$ una base di V e sia b la forma bilineare su V con matrice associata $\mathrm{M}_e(b) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Allora e_1 non è isotropo rispetto a b, essendo $b(e_1, e_1) = 1 \neq 0$, mentre e_2 è isotropo in quanto $b(e_2, e_2) = 0$.

Definizione 5. Sia V un K-spazio vettoriale e sia $b\colon V \times V \to K$ una forma bilineare simmetrica. Una base $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ di V si dice *ortogonale* o *diagonalizzante rispetto a b* se $b(e_i, e_j) = 0\ \forall\, 1 \leq i \neq j \leq n$ oppure, equivalentemente, se $\mathrm{M}_e(b)$ è una matrice diagonale.

Osservazione 6. Siano V un K-spazio vettoriale, $b\colon V \times V \to K$ una forma bilineare simmetrica e sia $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base di V ortogonale rispetto a b. Siano inoltre $v, w \in V$, $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, $w = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$. Allora

$$b(v, w) = b(e_1, e_1)x_1y_1 + \cdots + b(e_n, e_n)x_ny_n$$

1.5 Forme quadratiche

Definizione 1. Sia V un K-spazio vettoriale e sia $b\colon V \times V \to K$ una forma bilineare simmetrica. La *forma quadratica associata a* b è l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} q\colon & V & \longrightarrow & K \\ & v & \longmapsto & b(v,v) \end{array}$$

Se $\dim V < \infty$, il *rango di* q è $\mathrm{r}(q) := \mathrm{r}(b)$.

Osservazione 1. Siano V un K-spazio vettoriale di dimensione finita n, $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base di V, $b\colon V \times V \to K$ una forma bilineare simmetrica con matrice associata $\mathrm{M}_e(b) = (a_{ij})$ e sia $q\colon V \to K$ la forma quadratica associata a b. Allora, dato un vettore $v \in V$, $v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$, si ha

$$q(v) = {}^t x \mathrm{M}_e(b) x = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} x_i x_j$$

Esempio 1. Considero lo spazio vettoriale K^n su K e la forma bilineare simmetrica standard su K^n. Allora, dato un vettore $x \in K^n$, $x = {}^t(x_1 \cdots x_n)$, si ha che

$$q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

In questo caso, q si dice la *forma quadratica standard su* K^n.

Proposizione 1. *Sia V un K-spazio vettoriale e sia $b\colon V \times V \to K$ una forma bilineare simmetrica. Allora la forma quadratica q associata a b soddisfa le seguenti condizioni:*

(i) $q(kv) = k^2 q(v) \qquad \forall\, v \in V,\ k \in K$

(ii) $2b(v,w) = q(v+w) - q(v) - q(w) \qquad \forall\, v, w \in V$

Dimostrazione. Siano fissati $v, w \in V$, $k \in K$. L'asserto segue immediatamente dalla definizione di forma quadratica e dalle proprietà delle forme bilineari, infatti

(i) $q(kv) = b(kv, kv) = k^2 b(v,v) = k^2 q(v)$

(ii) $q(v+w) - q(v) - q(w) = b(v+w, v+w) - b(v,v) - b(w,w) = 2b(v,w)$ □

Osservazione 2. Dalla proposizione 1-(ii) segue che una forma quadratica q individua univocamente la forma bilineare simmetrica b cui è associata, poiché b si esprime per mezzo di q. È dunque equivalente assegnare una forma bilineare simmetrica oppure la forma quadratica a essa associata.

Definizione 2. Sia V uno spazio vettoriale su K campo con $\mathrm{ch}(K) \neq 2$ e sia $q\colon V \to K$ una forma quadratica. La forma bilineare simmetrica b definita dalla relazione

$$b(v,w) := \frac{1}{2}\big(q(v+w) - q(v) - q(w)\big)$$

si dice la *forma bilineare polare di* q.

Definizione 3. Un polinomio $f(X_1, \dots, X_n)$ a coefficienti in un campo K si dice *omogeneo di grado* d se i suoi monomi sono tutti di grado d.

Esempio 2. Il polinomio $f(X_1, X_2, X_3) = X_1^3 + \sqrt{2} X_1 X_2^2 + X_3^3$ è omogeneo di grado 3. Il polinomio $g(X_1, X_2, X_3) = X_1 + X_1^3 + X_1^2 X_2$, invece, non è omogeneo.

Definizione 4. Siano V un K-spazio vettoriale di dimensione finita n, $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base di V, $b\colon V \times V \to K$ una forma bilineare simmetrica con matrice associata $\mathrm{M}_e(b) = (a_{ij})$ e sia $q\colon V \to K$ la forma quadratica associata a b. A q è associato il polinomio omogeneo di secondo grado in $X_1, \dots, X_n$

$$Q(X) := {}^t X \mathrm{M}_e(b) X = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} X_i X_j$$

dove $X = {}^t(X_1 \cdots X_n)$. Si dice che $Q(X)$ *rappresenta la forma quadratica q nella base e*.

Osservazione 3. Siano V un K-spazio vettoriale di dimensione finita n, $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base di V, $b\colon V \times V \to K$ una forma bilineare simmetrica con matrice associata $\mathrm{M}_e(b) = (a_{ij})$, $q\colon V \to K$ la forma quadratica associata a b, $X = {}^t(X_1 \cdots X_n)$ e sia $Q(X)$ il polinomio omogeneo di secondo grado che rappresenta la forma quadratica q nella base e. Dalla simmetria della matrice $\mathrm{M}_e(b)$ segue che

$$Q(X) = \sum_{1 \le i \le j \le n} q_{ij} X_i X_j \qquad \text{dove} \qquad q_{ij} = \begin{cases} a_{ii} & \text{se } i = j \\ 2a_{ij} & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

e quindi, se $\mathrm{M}_e(b)$ è una matrice diagonale, cioè se e è una base ortogonale rispetto a b, vale che

$$Q(X) = a_{11} X_1^2 + \cdots + a_{nn} X_n^2$$

1.6 Diagonalizzazione di forme bilineari simmetriche

Teorema 1. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita $n \geq 1$ su K campo con $\mathrm{ch}(K) \neq 2$ e sia $b\colon V \times V \to K$ una forma bilineare simmetrica. Allora esiste una base di V ortogonale rispetto a b. Equivalentemente, ogni matrice simmetrica $A \in \mathrm{M}_n(K)$ è congruente a una matrice diagonale.*

Dimostrazione. L'equivalenza delle due affermazioni è evidente. Infatti, fissate una base f di V e una matrice $A \in \mathrm{M}_n(K)$, si ha che $A = \mathrm{M}_f(b_A)$ perché esiste una corrispondenza biunivoca tra forme bilineari simmetriche e matrici simmetriche (sezione 1.2, proposizione 2) e se e è una base di V ortogonale rispetto a b_A, cioè tale che $\mathrm{M}_e(b_A)$ sia una matrice diagonale, allora A e $\mathrm{M}_e(b_A)$ sono congruenti in quanto matrici associate a una stessa forma bilineare in basi diverse (sezione 1.2, proposizione 3). Di conseguenza, basta dimostrare la prima parte dell'enunciato e, data l'importanza del teorema, sono date due dimostrazioni.

(i) Si procede per induzione su n. La base di induzione è ovvia, perché le matrici di ordine 1 sono diagonali e quindi per $n = 1$ non c'è nulla da dimostrare. Nel passo di induzione assumo quindi $n \geq 2$ e suppongo che ogni forma bilineare simmetrica su uno spazio di dimensione minore di n possieda una base ortogonale. Nel caso in cui $b = o$, allora $\mathrm{M}_e(b) = O$ per ogni $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ base di V e quindi $\mathrm{M}_e(b)$ è banalmente una matrice diagonale. Assumo dunque $b \neq o$. In tal caso $\exists\, v, w \in V \mid b(v, w) \neq 0$. Di conseguenza, almeno uno dei vettori v, w, $v + w$ è non isotropo rispetto a b. Se infatti v e w fossero entrambi isotropi rispetto a b, allora

$$b(v+w, v+w) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bilinearità}}}{=} b(v,v) + 2b(v,w) + b(w,w) \underset{\substack{\uparrow \\ v \text{ e } w \text{ isotropi}}}{=} 2b(v,w) \neq 0$$

Pertanto $\exists\, e_1 \in V$ vettore non isotropo rispetto a b. Segue che $V = \langle e_1 \rangle \oplus e_1^\perp$ per l'osservazione 5 della sezione 1.4. Applicando quindi la formula di Grassmann si ricava che $\dim e_1^\perp = n-1$. Sia ora $W := e_1^\perp$ e sia $b'\colon W \times W \to K$ la restrizione di b su $W \times W$. Per ipotesi induttiva, esiste una base $\{e_2, \ldots, e_n\}$ di W ortogonale rispetto a b' ed essendo $b = b'$ su $W \times W$ si ha che $b(e_i, e_j) = 0$ per ogni $2 \leq i \neq j \leq n$. Inoltre, $e_2, \ldots, e_n \in W$ e $W = e_1^\perp$, quindi $b(e_1, e_j) = 0$ comunque fissato un indice $2 \leq j \leq n$. Infine, osservo che $e_1 \notin \langle e_2, \ldots, e_n \rangle$ perché $e_1 \notin e_1^\perp$ essendo un vettore non isotropo rispetto a b. Concludo che $e_1, \ldots, e_n$ sono linearmente indipendenti e quindi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è una base di V ortogonale rispetto a b.

(ii) [Lagrange] Come prima, si procede per induzione su n e la base di induzione è ovvia. Nel passo di induzione assumo che ogni forma bilineare simmetrica su uno spazio di dimensione minore di n possieda una base diagonalizzante. Posso assumere che $b \neq o$ altrimenti si procede come nella parte (i). Siccome $b \neq o$, posso asserire che $\exists\, e_1 \in V$ vettore non isotropo rispetto a b seguendo lo stesso ragionamento fatto in precedenza. Sia $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ un completamento a una base di V e suppongo che $\mathrm{M}_e(b) = (a_{ij})$. Sia inoltre $q\colon V \to K$ la forma quadratica associata a b e sia $v \in V$, $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ un vettore fissato. Allora, ricordando che e_1 è un vettore non isotropo rispetto a b e quindi $a_{11} \neq 0$, si ha che

$$\begin{aligned} q(v) &= \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}x_ix_j = a_{11}x_1^2 + 2x_1 \sum_{2\le j\le n} a_{1j}x_j + \sum_{2\le i,j\le n} a_{ij}x_ix_j \\ &= a_{11}\left(x_1^2 + 2x_1 \sum_{2\le j\le n} \frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j\right) + \sum_{2\le i,j\le n} a_{ij}x_ix_j \\ &= a_{11}\left(x_1^2 + 2x_1 \sum_{2\le j\le n} \frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j + \left(\sum_{2\le j\le n} \frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j\right)^2\right) - a_{11}\left(\sum_{2\le j\le n} \frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j\right)^2 + \sum_{2\le i,j\le n} a_{ij}x_ix_j \\ &= a_{11}\left(x_1 + \sum_{2\le j\le n} \frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j\right)^2 - a_{11}\left(\sum_{2\le j\le n} \frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j\right)^2 + \sum_{2\le i,j\le n} a_{ij}x_ix_j \end{aligned}$$

A questo punto, eseguo il cambio di variabile

$$y_1 := x_1 + \sum_{2\le j\le n} \frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j\,, \quad y_2 := x_2\,, \quad \dots\,, \quad y_n := x_n$$

che corrisponde al passaggio dalla base e alla nuova base

$$f = \left\{ e_1, -\frac{a_{12}}{a_{11}}e_1 + e_2, \dots, -\frac{a_{1n}}{a_{11}}e_1 + e_n \right\}$$

ottenuta osservando che

$$\begin{aligned} v &= x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n = y_1f_1 + y_2f_2 + \dots + y_nf_n \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{cambio di} \\ \text{variabile}}}{=} \left(x_1 + \sum_{2\le j\le n} \frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j\right)f_1 + x_2f_2 + \dots + x_nf_n \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \text{raccolgo} \\ x_1,\dots,x_n}}{=} x_1f_1 + x_2\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}f_1 + f_2\right) + \dots + x_n\left(\frac{a_{1n}}{a_{11}}f_1 + f_n\right) \end{aligned}$$

Nella base f la forma quadratica q associata a b si scrive

$$q(y_1, \dots, y_n) = a_{11}y_1^2 + q'(y_2, \dots, y_n)$$

dove q' è una forma quadratica su uno spazio di dimensione $n-1$ e quindi, per ipotesi induttiva, esiste una base $\{g_2, \dots, g_n\}$ di V diagonalizzante per q'. In conclusione, $\{f_1, g_2, \dots, g_n\}$ è una base di V che diagonalizza q, dunque una base di V ortogonale rispetto a b. □

Osservazione 1. Il teorema 1 non è valido se non si assume $\mathrm{ch}(K) \neq 2$. In tal caso, infatti, la matrice simmetrica $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ non è congruente a nessuna matrice diagonale.

Osservazione 2. Nel campo $\mathbb{C}$ la matrice simmetrica $\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{smallmatrix}\right)$ è congruente ma non simile a una matrice diagonale. La diagonalizzabilità per congruenza e quella per similitudine non sono quindi equivalenti.

Definizione 1. Un campo K si dice *algebricamente chiuso* se ogni polinomio non costante a coefficienti in K ammette una radice in K.

Teorema 2. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita $n \geq 1$ su K campo algebricamente chiuso con $\mathrm{ch}(K) \neq 2$ e sia $b\colon V \times V \to K$ una forma bilineare simmetrica di rango r. Allora esiste una base $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ di V, ortogonale rispetto a b, tale che*

$$\mathrm{M}_e(b) = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \tag{1}$$

dove il simbolo O denota matrici nulle di ordini opportuni. Equivalentemente, ogni matrice simmetrica $A \in \mathrm{M}_n(K)$ di rango r è congruente a una matrice diagonale della forma (1).

Dimostrazione. Come nel teorema 1, l'equivalenza delle due affermazioni è ovvia. Infatti, data una base f di V e data una matrice simmetrica $A \in \mathrm{M}_n(K)$, vale che $A = \mathrm{M}_f(b_A)$ e a basi diverse si associano matrici congruenti. Per questo motivo, sarà sufficiente dimostrare la prima parte. Dal teorema 1 segue che esiste una base $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ di V ortogonale rispetto a b, cioè tale che

$$\mathrm{M}_f(b) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Scambiando in modo opportuno i vettori della base f, a seconda di quali sono isotropi, quali non isotropi rispetto a b, posso assumere che $a_{ii} \neq 0$ per ogni $1 \le i \le r$ e che $a_{ii} = 0$ per ogni $r+1 \le i \le n$, in quanto il rango di $\mathrm{M}_f(b)$ coincide con quello di b, cioè r. Ora K è un campo algebricamente chiuso per ipotesi, dunque posso porre $\alpha_i := \sqrt{a_{ii}}$ per ogni $1 \le i \le r$. A questo punto definisco

$$e_i := \begin{cases} \frac{1}{\alpha_i} f_i & \text{per ogni } 1 \le i \le r \\ f_i & \text{per ogni } r+1 \le i \le n \end{cases}$$

Per costruzione, l'insieme di vettori $e := \{e_1, \dots, e_n\}$ è una base di V. Inoltre,

- per ogni $1 \le i \neq j \le n$, si ha che $b(e_i, e_j) = 0$ perché è un multiplo di $b(f_i, f_j)$.
- per ogni $1 \le i \le r$, vale che $b(e_i, e_i) = b\big(\frac{1}{\alpha_i} f_i, \frac{1}{\alpha_i} f_i\big) = \frac{1}{\alpha_i^2} b(f_i, f_i) = \frac{1}{a_{ii}} a_{ii} = 1$.
- per ogni $r+1 \le i \le n$, ottengo che $b(e_i, e_i) = b(f_i, f_i) = a_{ii} = 0$.

Concludo che e è una base di V, ortogonale rispetto a b, tale che la matrice $\mathrm{M}_e(b)$ sia della forma (1). □

Osservazione 3. Nell'enunciato del teorema 2 si può omettere l'ipotesi di campo algebricamente chiuso, purché si richieda esplicitamente che ogni elemento ammetta una radice quadrata.

Teorema 3 (di Sylvester)**.** *Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione finita $n \ge 1$ e sia $b \colon V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica di rango r. Allora esistono un intero non negativo $p \le r$, che dipende solo da b e una base $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ di V, ortogonale rispetto a b, tali che*

$$\mathrm{M}_e(b) = \begin{pmatrix} I_p & O & O \\ O & I_{r-p} & O \\ O & O & O \end{pmatrix} \tag{2}$$

dove il simbolo O denota matrici nulle di ordini opportuni. Equivalentemente, ogni matrice simmetrica $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ di rango r è congruente a una matrice diagonale della forma (2) in cui p dipende solo da A.

Dimostrazione. Come nelle dimostrazioni dei teoremi precedenti, l'equivalenza delle due affermazioni è immediata e basta dimostrare la prima parte dell'enunciato. Innanzitutto, dal teorema 1 segue che esiste una base $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ di V diagonalizzante rispetto a b, cioè tale che

$$\mathrm{M}_f(b) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Esattamente come nella dimostrazione del teorema 2, posso scambiare i vettori della base f in modo da ottenere che $a_{ii} \neq 0$ per ogni $1 \le i \le r$ e che $a_{ii} = 0$ per ogni $r+1 \le i \le n$. Sia ora p il numero di coefficienti a_{ii} positivi. Scambiando nuovamente i vettori della base f, posso assumere che $a_{ii} > 0$ per ogni $1 \le i \le p$ e che $a_{ii} < 0$ per ogni $p+1 \le i \le r$. Seguendo un ragionamento analogo a quello applicato nella dimostrazione precedente, posso definire

$$\alpha_i := \begin{cases} \sqrt{a_{ii}} & \text{per ogni } 1 \le i \le p \\ \sqrt{-a_{ii}} & \text{per ogni } p+1 \le i \le r \end{cases}, \quad e_i := \begin{cases} \frac{1}{\alpha_i} f_i & \text{per ogni } 1 \le i \le r \\ f_i & \text{per ogni } r+1 \le i \le n \end{cases}$$

Per costruzione, l'insieme di vettori $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ è una base di V. Inoltre,

- per ogni $1 \leq i \neq j \leq n$, si ha che $b(e_i, e_j) = 0$ perché è un multiplo di $b(f_i, f_j)$.
- per ogni $1 \leq i \leq p$, vale che $b(e_i, e_i) = b\left(\frac{1}{\alpha_i} f_i, \frac{1}{\alpha_i} f_i\right) = \frac{1}{\alpha_i^2} b(f_i, f_i) = \frac{1}{a_{ii}} a_{ii} = 1$.
- per ogni $p+1 \leq i \leq r$, vale che $b(e_i, e_i) = b\left(\frac{1}{\alpha_i} f_i, \frac{1}{\alpha_i} f_i\right) = \frac{1}{\alpha_i^2} b(f_i, f_i) = \frac{1}{-a_{ii}} a_{ii} = -1$.
- per ogni $r+1 \leq i \leq n$, ottengo che $b(e_i, e_i) = b(f_i, f_i) = a_{ii} = 0$.

Posso dunque affermare che e è una base di V, ortogonale rispetto a b, tale che la matrice $\mathrm{M}_e(b)$ sia della forma (2). Resta da dimostrare che p dipende solo da b e non dalla base e. Suppongo per assurdo che esista una base $e' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ di V, diagonalizzante rispetto a b, tale che anche la matrice $\mathrm{M}_{e'}(b)$ sia della forma (2), ma che $p' \neq p$. Posso assumere senza perdita di generalità che $p' < p$. Siano $U = \langle e_1, \dots, e_p \rangle$ e $U' = \langle e'_{p'+1}, \dots, e'_n \rangle$ sottospazi vettoriali di V. Dalla formula di Grassmann segue che

$$\dim(U \cap U') = \dim U + \dim U' - \dim(U + U') \geq (p) + (n - p') - (n) = p - p' > 0$$

Dunque $\exists\, v \in U \cap U'$, $v \neq \mathbf{0}$. Posso quindi assumere che $v = x_1 e_1 + \dots + x_p e_p = x'_{p'+1} e'_{p'+1} + \dots + x'_n e'_n$ per opportuni $x_1, \dots, x_p, x'_{p'+1}, \dots, x'_n \in K$. Ma allora, se q è la forma quadratica associata a b, si ha che

$$0 \leq x_1^2 + \dots + x_p^2 = q(v) = -{x'}_{p'+1}^2 - \dots - {x'}_n^2 \leq 0$$

Si ottiene quindi che $q(v) = 0$. In particolare, $x_i = 0$ per ogni $1 \leq i \leq p$ e di conseguenza $v = \mathbf{0}$, il che è assurdo. Posso dunque concludere che $p = p'$. □

Definizione 2. Siano V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione finita $n \geq 1$, $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica di rango r e sia $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ la base di V, ortogonale rispetto a b, tale che $\mathrm{M}_e(b)$ sia della forma (2). La matrice $\mathrm{M}_e(b)$ si dice la *matrice di Sylvester di b*. Inoltre, se $q\colon V \to \mathbb{R}$ è la forma quadratica associata a b, l'espressione

$$q(v) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$$

verificata per ogni $v \in V$, $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, si dice la *forma canonica della forma quadratica q*. Gli interi non negativi p e $r - p$ si dicono, rispettivamente, l'*indice di positività* e l'*indice di negatività di b e di q*, mentre la coppia $(p, r-p)$ viene detta la *segnatura di b e di q*.

La definizione 2 è ben posta in virtù del teorema di Sylvester, che garantisce l'esistenza della base e.

Definizione 3. Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione finita. Una forma quadratica $q\colon V \to \mathbb{R}$ si dice

- *definita positiva* se $q(v) > 0 \ \ \forall\, v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$
- *definita negativa* se $q(v) < 0 \ \ \forall\, v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$
- *semidefinita positiva* se $q(v) \geq 0 \ \ \forall\, v \in V$
- *semidefinita negativa* se $q(v) \leq 0 \ \ \forall\, v \in V$
- *indefinita* se non è semidefinita positiva né semidefinita negativa.

Si usa una terminologia analoga per le forme bilineari simmetriche.

Osservazione 4. Le forme canoniche corrispondenti ai diversi casi e le relative segnature sono le seguenti:

Tipo di forma quadratica	Forma canonica	Segnatura
definita positiva	$x_1^2 + \dots + x_n^2$	$(n, 0)$
definita negativa	$-x_1^2 - \dots - x_n^2$	$(0, n)$
semidefinita positiva	$x_1^2 + \dots + x_r^2$, $r \leq n$	$(r, 0)$
semidefinita negativa	$-x_1^2 - \dots - x_r^2$, $r \leq n$	$(0, r)$
indefinita	$x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$, $0 < p < r \leq n$	$(p, r-p)$

Definizione 4. Una matrice simmetrica in $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ si dice *definita positiva*, *definita negativa*, *semidefinita positiva*, *semidefinita negativa* oppure *indefinita* se lo è la forma bilineare simmetrica associata.

Corollario 1. *Dal teorema di Sylvester segue immediatamente che una matrice simmetrica $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ è definita positiva se e solo se A è congruente alla matrice I_n, cioè se e solo se $\exists\, M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A = {}^tMM$.*

Definizione 5. Sia $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Per ogni $1 \le i \le n$, l'*i-esimo minore principale di A* è il minore

$$D_i := \det A(12\dots i \,|\, 12\dots i)$$

Teorema 4 (Criterio di Sylvester)**.**

(i) *Una matrice simmetrica $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ è definita positiva se e solo se tutti i suoi minori principali sono positivi, cioè se e solo se $D_i > 0$ per ogni $1 \le i \le n$.*

(ii) *Una matrice simmetrica $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ è definita negativa se e solo se i suoi minori principali hanno segno alterno, cioè se e solo se $(-1)^i D_i > 0$ per ogni $1 \le i \le n$.*

Dimostrazione.

(i) Considero lo spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^n$ con base canonica $E = \{E_1, \dots, E_n\}$. Sia $b := b_A$ la forma bilineare associata ad A. Ovviamente, b è una forma bilineare simmetrica perché A è una matrice simmetrica (osservazione 2, sezione 1.2). Inoltre, suppongo che $A = (a_{ij})$.

($\Longrightarrow$) Sia $1 \le k \le n$ e siano $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$ indici prefissati. Definisco $W := \langle E_{i_1}, \dots, E_{i_k} \rangle$ e considero la sottomatrice $A' := A(i_1 \dots i_k \,|\, i_1 \dots i_k)$ di A. Per ipotesi, si ha che A è definita positiva, ma allora anche b è definita positiva in virtù della definizione 4. In particolare, vale che $b\big|_W$ è definita positiva e quindi lo è anche A' in quanto matrice associata a $b\big|_W$ rispetto alla base $\{E_{i_1}, \dots, E_{i_k}\}$. Deduco quindi dal corollario 1 che A' è congruente alla matrice I_n, cioè che esiste $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tale che $A' = {}^tMM$. In particolare, vale la relazione

$$\det A' = \det {}^tMM = \det {}^tM \det M = (\det M)^2 > 0$$

Prendendo $i_1 := 1, \dots, i_k := k$ si ricava, in particolare, che il k-esimo minore principale di A è positivo e quindi posso concludere, per arbitrarietà nella scelta dell'indice $1 \le k \le n$, che tutti i minori principali di A sono positivi.

($\Longleftarrow$) Qui si procede per induzione su n. La base di induzione è ovvia. Per $n = 1$, infatti, vale che $A = (a_{11})$ e dalla condizione $D_1 > 0$ segue che $a_{11} > 0$. Ma allora per ogni $x \in \mathbb{R}^*$ si ha che

$$b(x, x) = {}^txAx = a_{11}x^2 > 0$$

Dunque la forma bilineare simmetrica b è banalmente definita positiva e, per definizione, lo è anche la matrice A. Nel passo di induzione assumo quindi $n \ge 2$ e suppongo che ogni matrice simmetrica (a coefficienti reali) di ordine $n-1$ i cui minori principali sono tutti positivi sia definita positiva. Definisco $W := \langle E_1, \dots, E_{n-1} \rangle$ e considero la sottomatrice di A definita da $A' := A(1 \dots n-1 \,|\, 1 \dots n-1)$. Siano inoltre $D'_1, \dots, D'_{n-1}$ i minori principali di A'. Per costruzione, si ha che $D'_i = D_i$ per ogni $1 \le i \le n-1$ e quindi tutti i minori principali di A' sono positivi. Ma allora, per ipotesi induttiva, la matrice A' è definita positiva e quindi lo è anche $b\big|_W$ perché A' è la matrice associata a $b\big|_W$ rispetto alla base $\{E_1, \dots, E_{n-1}\}$. A questo punto, deduco dal teorema 1 che esiste una base $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che

$$\mathrm{M}_f(b) = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Posso assumere senza perdita di generalità che $d_{11} \le d_{22} \le \dots \le d_{nn}$. Ora, se considero il sottospazio vettoriale $U := \langle f_1, f_2 \rangle$ di $\mathbb{R}^n$, dalla formula di Grassmann si deduce che

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) \ge (2) + (n-1) - (n) = 1$$

Dunque $\exists\, v \in U \cap W$, $v \neq \mathbf{0}$. Dato che $v \in U$, posso supporre che $v = x_1 f_1 + x_2 f_2$ per certi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Ma allora, ricordando che $b\big|_W$ è definita positiva e che $v \in W$, $v \neq \mathbf{0}$, vale che

$$0 < b\big|_W(v, v) = b(v, v) = d_{11}x_1^2 + d_{22}x_2^2 \leq d_{22}(x_1^2 + x_2^2)$$

Poiché $x_1^2 + x_2^2 > 0$, vale che $d_{22} > 0$ e quindi $d_{ii} > 0$ per ogni $2 \leq i \leq n$. Ora, denotando per semplicità $B := \mathrm{M}_f(b)$, esiste una matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tale che $A = {}^tMBM$ perché A e B sono matrici associate a una stessa forma bilineare in basi diverse (si veda la proposizione 3 della sezione 1.2). Ma allora, utilizzando la formula di Laplace, si ricava che

$$0 < D_n = \det A = \det {}^tMBM = \det {}^tM \det B \det M = (\det M)^2 d_{11}d_{22}\dots d_{nn}$$

Si ottiene quindi che $d_{11} > 0$ e, fissato $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \mathbf{0}$, $x = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$, vale la relazione

$$b(x, x) = {}^txBx = d_{11}x_1^2 + \dots + d_{nn}x_n^2 > 0$$

Posso dunque concludere che b è definita positiva e quindi lo è anche A.

(ii) L'asserto segue immediatamente dal punto (i) appena dimostrato. Infatti, la matrice A è definita negativa se e solo se $-A$ è definita positiva, cioè se e solo se tutti i minori principali di $-A$ sono positivi. Equivalentemente, ricordando la linearità del determinante, per ogni $1 \leq i \leq n$ si ha che

$$0 < \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1i} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \dots & -a_{ii} \end{vmatrix} = (-1)^i \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix} = (-1)^i D_i$$

□

1.7 Prodotti scalari

Definizione 1. Sia V uno spazio vettoriale reale. Una forma bilineare simmetrica su V definita positiva si dice un *prodotto scalare su* V. Se su V è assegnato un prodotto scalare, V si dice uno *spazio vettoriale euclideo*. In generale, il prodotto scalare di due vettori $v, w \in V$ si denota $\langle v, w \rangle$.

Esempio 1. La forma bilineare simmetrica standard su $\mathbb{R}^n$ è un prodotto scalare, detto il *prodotto scalare standard su* $\mathbb{R}^n$. Munito del prodotto scalare standard, $\mathbb{R}^n$ si chiama *n-spazio vettoriale euclideo*. Il prodotto scalare standard di due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$ si denota $x \cdot y$. Se $x = {}^t(x_1 \cdots x_n)$, $y = {}^t(y_1 \cdots y_n)$ si ha quindi $x \cdot y = {}^txy = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$.

Teorema 1 (Disuguaglianza di Schwarz)**.** *Sia V uno spazio vettoriale euclideo e siano $v, w \in V$. Allora*

$$\langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle$$

Inoltre, l'uguaglianza sussiste se e solo se $v \parallel w$.

Dimostrazione. Innanzitutto, se $w = \mathbf{0}$ l'asserto è ovvio, poiché sono uguali a 0 entrambi i membri della disuguaglianza. Posso dunque supporre che $w \neq \mathbf{0}$. Osservo che, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, vale la relazione

$$0 \leq \langle av + bw, av + bw \rangle = a^2\langle v, v \rangle + 2ab\langle v, w \rangle + b^2\langle w, w \rangle$$

Inoltre, per definizione di prodotto scalare (si veda anche la definizione 3 della sezione 1.6) l'uguaglianza sussiste se e solo se $av + bw = \mathbf{0}$, cioè se e solo se $v \parallel w$. Prendendo $a := \langle w, w \rangle$, $b := -\langle v, w \rangle$ si ha che

$$0 \leq \langle w, w \rangle^2 \langle v, v \rangle - 2\langle w, w \rangle \langle v, w \rangle^2 + \langle v, w \rangle^2 \langle w, w \rangle$$

Poiché $w \neq \mathbf{0}$, si ha che $\langle w, w \rangle > 0$ ancora per definizione di prodotto scalare e, dividendo quindi per tale valore ambo i membri della disuguaglianza ottenuta, si ottiene che

$$0 \leq \langle w, w \rangle \langle v, v \rangle - \langle v, w \rangle^2 \iff \langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle$$

□

Definizione 2. Sia V uno spazio vettoriale euclideo e sia $v \in V$. La *norma* (o *lunghezza*) *di* v è

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

La definizione 2 è ben posta perché, per definizione di prodotto scalare, $\langle v, v \rangle \geq 0$ per ogni $v \in V$.

Osservazione 1. Sia V uno spazio vettoriale euclideo e siano $v, w \in V$. Dalla definizione di norma segue immediatamente che la disuguaglianza di Schwarz si può esprimere nella forma equivalente

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\|\|w\|$$

Proposizione 1. *Sia V uno spazio vettoriale euclideo. La norma soddisfa le seguenti proprietà:*

N1 $\|v\| \geq 0 \ \ \forall\, v \in V$ *e* $\|v\| = 0 \iff v = \mathbf{0}$ (*positività e non degenerazione*)

N2 $\|cv\| = |c|\|v\| \ \ \forall\, v \in V,\, c \in \mathbb{R}$ (*omogeneità*)

N3 $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \ \ \forall\, v, w \in V$ (*disuguaglianza triangolare*)

Dimostrazione. Siano $v, w \in V$ e sia $c \in \mathbb{R}$.

N1 $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \geq 0$ e $\|v\| = 0$ se e solo se $\langle v, v \rangle = 0$, cioè se e solo se $v = \mathbf{0}$.

N2 $\|cv\| = \sqrt{\langle cv, cv \rangle} = \sqrt{c^2 \langle v, v \rangle} = \sqrt{c^2}\sqrt{\langle v, v \rangle} = |c|\|v\|$.

N3 Dalla disuguaglianza di Schwarz segue che

$$\begin{aligned}
\|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle \\
&= \langle v, v \rangle + 2\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle \\
&= \|v\|^2 + 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2 \\
&\leq \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 \\
&= \big(\|v\| + \|w\|\big)^2
\end{aligned}$$

Di conseguenza, passando alla radice quadrata e usando la positività della norma (proprietà N1) posso concludere che $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$. □

Definizione 3. Sia V uno spazio vettoriale euclideo. Un vettore $v \in V$ tale che $\|v\| = 1$ si dice un *versore di V*. Inoltre, per ogni $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$, il vettore $\frac{v}{\|v\|}$ si dice il *versore associato a v*.

La definizione 3 è ben posta in virtù della non degenerazione della norma (proprietà N1).

Osservazione 2. Sia V uno spazio vettoriale euclideo e sia $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$. Allora $\frac{v}{\|v\|}$ è un versore di V.

Dimostrazione. L'asserto segue immediatamente dall'omogeneità della norma (proprietà N2), infatti

$$\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \left\| \frac{1}{\|v\|} v \right\| = \left| \frac{1}{\|v\|} \right| \|v\| = \frac{1}{\|v\|} \|v\| = 1$$ □

Definizione 4. Sia V uno spazio vettoriale euclideo e siano $v, w \in V$. Si dice che *v è ortogonale a w* e si denota $v \perp w$ se $\langle v, w \rangle = 0$. Un insieme finito di vettori non nulli $S \subseteq V$ si dice *ortogonale* se $v \perp w$ per ogni $v, w \in S$, $v \neq w$. Inoltre, se V ha dimensione finita, un insieme ortogonale di vettori che costituiscono una base di V si dice una *base ortogonale* di V.

Osservazione 3. Sia V uno spazio vettoriale euclideo. Allora il vettore nullo è ortogonale a tutti i vettori di V, cioè $\mathbf{0} \perp v$ per ogni $v \in V$.

Dimostrazione. La tesi segue banalmente dalla definizione 4 e dall'osservazione 2 della sezione 1.1. □

Osservazione 4. Sia V uno spazio vettoriale euclideo. Allora il vettore nullo è l'unico vettore ortogonale a se stesso. In altre parole, il vettore nullo è l'unico vettore isotropo rispetto al prodotto scalare di V.

Dimostrazione. L'asserto segue banalmente dalla definizione di prodotto scalare. Infatti, fissato un qualsiasi vettore $v \in V$, si ha che $v \perp v$ se e solo se $\langle v, v \rangle = 0$, quindi se e solo se $v = \mathbf{0}$. □

L'osservazione 4 mostra che, nella definizione di insieme ortogonale, è cruciale richiedere che $v \neq w$. Infatti, se non si specifica tale condizione, non esisterebbero insiemi ortogonali, in quanto si vuole che gli elementi dell'insieme siano non nulli, mentre l'unico vettore ortogonale a se stesso è il vettore nullo.

Definizione 5. Sia V uno spazio vettoriale euclideo. Un insieme ortogonale $S \subseteq V$ si dice *ortonormale* se i suoi elementi sono versori, cioè se $\|v\| = 1$ per ogni $v \in S$. Inoltre, se V ha dimensione finita, un insieme ortonormale di vettori che costituiscono una base di V si dice una *base ortonormale* di V.

Proposizione 2. *Sia V uno spazio vettoriale euclideo e sia $\{v_1, \dots, v_s\} \subseteq V$ un insieme ortogonale di vettori. Allora $v_1, \dots, v_s$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Innanzitutto, se $\{v_1, \dots, v_s\}$ è un insieme ortogonale, allora $v_i \perp v_j$ oppure, equivalentemente, $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ per ogni $1 \leq i \neq j \leq s$. Sia $(a_1, \dots, a_s) \in K^s$ un qualsiasi vettore tale che valga la relazione $a_1 v_1 + \cdots + a_s v_s = \mathbf{0}$. Se si fissa in maniera arbitraria un indice $1 \leq i \leq s$, si osserva che

$$0 = \langle v_i, \mathbf{0} \rangle = \langle v_i, a_1 v_1 + \cdots + a_s v_s \rangle = \sum_{j=1}^{s} a_j \langle v_i, v_j \rangle = a_i \langle v_i, v_i \rangle$$

In virtù dell'osservazione 4 si ha che $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$, altrimenti varrebbe che $v_i = \mathbf{0}$, ma questo contraddice l'ipotesi che $\{v_1, \dots, v_s\}$ sia un insieme ortogonale. Posso pertanto concludere che $a_i = 0$ e quindi, per arbitrarietà nella scelta dell'indice $1 \leq i \leq s$, i vettori $v_1, \dots, v_s$ sono linearmente indipendenti. $\square$

Una conseguenza del teorema di Sylvester è il seguente corollario.

Corollario 1. *Ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita $n \geq 1$ possiede una base ortonormale.*

Dimostrazione. Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita $n \geq 1$. Per definizione, su V è assegnato un prodotto scalare, vale a dire una forma bilineare simmetrica b definita positiva. Il teorema di Sylvester garantisce l'esistenza di una base $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ di V tale che valga $\mathrm{M}_e(b) = I_n$, in quanto una forma bilineare simmetrica definita positiva ha indice di positività n (sezione 1.6, definizione 2). Di conseguenza, nella notazione usuale per prodotti scalari, si ha che $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ per ogni $1 \leq i, j \leq n$. In particolare, e è una base ortogonale di V in quanto $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ per ogni $1 \leq i \neq j \leq n$ ed è una base ortonormale di V perché $\|e_i\| = \sqrt{\langle e_i, e_i \rangle} = 1$ per ogni $1 \leq i \leq n$. $\square$

Osservazione 5. Sia V uno spazio vettoriale euclideo e sia $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormale di V. Se b denota il prodotto scalare assegnato su V, allora $\mathrm{M}_e(b) = I_n$. In particolare, il prodotto scalare di due vettori qualsiasi $v, w \in V$, $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, $w = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$ coincide con il prodotto scalare standard dei vettori colonna delle loro coordinate, cioè

$$\langle v, w \rangle = x \cdot y = {}^t x y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

dove $x = {}^t(x_1 \cdots x_n)$, $y = {}^t(y_1 \cdots y_n)$.

Proposizione 3. *Siano V uno spazio vettoriale euclideo, $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormale di V e sia $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ un'altra base di V. Allora f è una base ortonormale se e solo se*[1] $\mathrm{M}_{e,f}(\mathrm{id}_V) \in \mathrm{O}(n)$.

Dimostrazione. Innanzitutto, pongo $M := \mathrm{M}_{e,f}(\mathrm{id}_V)$ per semplicità. Osservo che, per ogni $1 \leq i \leq n$, la colonna $M_{(i)}$ è il vettore delle componenti di f_i rispetto alla base e. Inoltre, per l'osservazione 5, nella base e il prodotto scalare assegnato su V coincide con il prodotto scalare standard delle componenti perché, per ipotesi, e è una base ortonormale. Valgono dunque le seguenti equivalenze:

$$\begin{aligned} f \text{ è una base ortonormale di } V &\iff \langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij} \text{ per ogni } 1 \leq i, j \leq n \\ &\iff M_{(i)} \cdot M_{(j)} = \delta_{ij} \text{ per ogni } 1 \leq i, j \leq n \\ &\iff {}^t M^{(i)} M_{(j)} = \delta_{ij} \text{ per ogni } 1 \leq i, j \leq n \\ &\iff {}^t M M = I_n \\ &\iff M \in \mathrm{O}(n) \end{aligned}$$

Va notato che, quando si assume che f sia una base ortonormale di V, l'ultima implicazione è giustificata in quanto, essendo M una matrice del cambiamento di coordinate, vale che $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. $\square$

[1]Si dice *gruppo ortogonale di ordine n* l'insieme $\mathrm{O}(n) := \{ A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t A = A^{-1} \}$.

1.8 Ortogonalizzazione

Innanzitutto, si riformula la definizione 4 della sezione 1.4 nel caso di uno spazio vettoriale euclideo.

Definizione 1. Sia V uno spazio vettoriale euclideo e siano $v, w \in V$, $v \neq \mathbf{0}$. Il numero reale

$$a_v(w) := \frac{\langle v, w \rangle}{\langle v, v \rangle}$$

si dice il *coefficiente di Fourier di w rispetto a v.*

Teorema 1 (di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt)**.** *Sia V uno spazio vettoriale euclideo e sia $v_1, v_2, v_3, \ldots$ una successione finita o infinita di vettori di V. Valgono le seguenti affermazioni.*

(i) *Esiste una successione $w_1, w_2, w_3, \ldots$ di vettori di V, rispettivamente finita con lo stesso numero di elementi o infinita tale che, per ogni $k \geq 1$, si abbia che*

  (a) $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \langle w_1, \ldots, w_k \rangle$

  (b) $w_i \perp w_j$ *per ogni* $1 \leq i \neq j \leq k$

(ii) *Se $u_1, u_2, u_3, \ldots$ è un'altra successione di vettori di V che, per ogni $k \geq 1$, soddisfa le condizioni* (a) *e* (b)*, allora esistono numeri reali $c_1, c_2, c_3, \ldots$ tali che $u_k = c_k w_k$ per ogni $k \geq 1$.*

Dimostrazione.

(i) Costruisco gli elementi $w_1, w_2, w_3, \ldots$ per induzione su k. La base di induzione è ovvia. Infatti, prendendo $w_1 := v_1$ le condizioni (a) e (b) sono banalmente soddisfatte. Nel passo di induzione suppongo che esistano $w_1, \ldots, w_{k-1} \in V$ che soddisfano le condizioni (a) e (b). Definisco

$$w_k := v_k - \sum_{\substack{1 \leq i \leq k-1 \\ \text{t.c. } w_i \neq \mathbf{0}}} a_{w_i}(v_k) w_i$$

Osservo che v_k è combinazione lineare di $w_1, \ldots, w_k$ e quindi $v_k \in \langle w_1, \ldots, w_k \rangle$. Per ipotesi induttiva $\langle v_1, \ldots, v_{k-1} \rangle = \langle w_1, \ldots, w_{k-1} \rangle$, dunque $v_1, \ldots, v_{k-1} \in \langle w_1, \ldots, w_{k-1} \rangle$ e, in particolare, $v_1, \ldots, v_{k-1} \in \langle w_1, \ldots, w_k \rangle$. Ma allora $v_1, \ldots, v_k \in \langle w_1, \ldots, w_k \rangle$ e, siccome il sottospazio generato da un insieme di vettori è il più piccolo sottospazio che li contiene, posso affermare che $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle \subseteq \langle w_1, \ldots, w_k \rangle$. D'altra parte si ha che $w_k \in \langle w_1, \ldots, w_{k-1}, v_k \rangle$, in quanto combinazione lineare di tali vettori e so per ipotesi induttiva che $\langle v_1, \ldots, v_{k-1} \rangle = \langle w_1, \ldots, w_{k-1} \rangle$. Ma allora $w_k \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ e $w_1, \ldots, w_{k-1} \in \langle v_1, \ldots, v_{k-1} \rangle$. In particolare, vale la relazione $w_1, \ldots, w_k \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ e quindi, come prima, $\langle w_1, \ldots, w_k \rangle \subseteq \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$. Posso dunque affermare che $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \langle w_1, \ldots, w_k \rangle$ perché ho mostrato il doppio contenimento.

Resta da dimostrare che $w_k \perp w_j$ per ogni $1 \leq j \leq k-1$. Infatti, è noto per ipotesi induttiva che $w_i \perp w_j$ per ogni $1 \leq i \neq j \leq k-1$. Fissato un indice $1 \leq j \leq k-1$, basta osservare che

$$\langle w_k, w_j \rangle = \langle v_k - \sum_{\substack{1 \leq i \leq k-1 \\ \text{t.c. } w_i \neq \mathbf{0}}} a_{w_i}(v_k) w_i, w_j \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bilinearità}}}{=} \langle v_k, w_j \rangle - \sum_{\substack{1 \leq i \leq k-1 \\ \text{t.c. } w_i \neq \mathbf{0}}} a_{w_i}(v_k) \langle w_i, w_j \rangle$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{(b)}}}{=} \langle v_k, w_j \rangle - a_{w_j}(v_k) \langle w_j, w_j \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{definizione 1}}}{=} \langle v_k, w_j \rangle - \frac{\langle w_j, v_k \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle} \langle w_j, w_j \rangle = 0$$

Concludo che $w_i \perp w_j$ per ogni $1 \leq i \neq j \leq k$.

(ii) Anche in questo caso si procede per induzione su k. La base di induzione è ovvia. Infatti, se un vettore $u_1 \in V$ soddisfa la condizione (a), si ha che $\langle u_1 \rangle = \langle w_1 \rangle$ e in particolare $u_1 \in \langle w_1 \rangle$, quindi esiste $c_1 \in \mathbb{R}$ tale che $u_1 = c_1 w_1$. Nel passo di induzione assumo quindi che, dati k vettori $u_1, \ldots, u_k \in V$ che soddisfano le condizioni (a) e (b), esistano $c_1, \ldots, c_{k-1} \in \mathbb{R}$ tali che $u_i = c_i w_i$ per ogni $1 \leq i \leq k-1$. Dall'ipotesi (a) segue che $\langle u_1, \ldots, u_k \rangle = \langle w_1, \ldots, w_k \rangle$ e, in particolare, che $u_k \in \langle w_1, \ldots, w_k \rangle$, dunque esistono $z \in \langle w_1, \ldots, w_{k-1} \rangle$, $c_k \in \mathbb{R}$ tali che $u_k = z + c_k w_k$.

Basta mostrare che $z = \mathbf{0}$. Dall'ipotesi (b) segue che $u_k \perp u_i$ per ogni $1 \leq i \leq k-1$, ma allora si verifica facilmente per bilinearità del prodotto scalare che $u_k \perp z$, perché $z \in \langle w_1, \dots, w_{k-1} \rangle$ e $\langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle = \langle w_1, \dots, w_{k-1} \rangle$ per la condizione (a). Per ragioni analoghe, si verifica che $w_k \perp z$ perché $w_k \perp w_i$ per ogni $1 \leq i \leq k-1$. A questo punto basta osservare che

$$\langle z, z \rangle = \langle u_k - c_k w_k, z \rangle = \langle u_k, z \rangle - c_k \langle w_k, z \rangle = 0 - c_k 0 = 0$$

Ma allora $z = \mathbf{0}$, perché il vettore nullo è l'unico vettore ortogonale a se stesso (osservazione 4, sezione 1.7). Di conseguenza, $u_k = c_k w_k$ e unendo questo risultato a quanto già noto per ipotesi induttiva si ottiene la tesi. □

Osservazione 1. L'ipotesi (b) del teorema 1 non garantisce che $\{w_1, \dots, w_k\}$ sia un insieme ortogonale, perché può accadere che $\exists\, 1 \leq i \leq k \mid w_i = \mathbf{0}$. Dunque, una condizione necessaria affinché $\{w_1, \dots, w_k\}$ sia effettivamente un insieme ortogonale è che $w_i \neq \mathbf{0}$ per ogni $1 \leq i \leq k$.

Osservazione 2. Il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt applicato a vettori $v_1, \dots, v_k$ linearmente indipendenti fornisce vettori $w_1, \dots, w_k$ linearmente indipendenti in virtù dell'ipotesi (a) del teorema 1. Infatti, se $\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle w_1, \dots, w_k \rangle$, allora $\dim \langle v_1, \dots, v_k \rangle = \dim \langle w_1, \dots, w_k \rangle$. Inoltre, essendo in particolare $w_i \neq \mathbf{0}$ per ogni $1 \leq i \leq k$, si ha che $\{w_1, \dots, w_k\}$ è un insieme ortogonale.

Osservazione 3. Sia V un K-spazio vettoriale e siano $U, W \subseteq V$ due sottospazi. Allora $U + W$ è somma diretta se e solo se ogni suo vettore si esprime in modo unico nella forma $u + w$ per certi $u \in U$, $w \in W$.

Dimostrazione. Suppongo che $U + W$ sia somma diretta e che, scelto un qualsiasi vettore $v \in U + W$, esistano $u, u' \in U$, $w, w' \in W$ possibilmente distinti tali che $v = u + w = u' + w'$. Da tale relazione si deduce immediatamente che $u - u' = w' - w$, ma $u - u' \in U$, $w - w' \in W$ in quanto $U, W \subseteq V$ sono sottospazi vettoriali per ipotesi. Di conseguenza, $u - u', w - w' \in U \cap W$ e quindi $u - u' = w - w' = \mathbf{0}$ perché la somma è diretta. Equivalentemente, si ottiene che $u = u'$, $w = w'$. Viceversa, suppongo che ogni vettore di $U + W$ si esprima in modo unico nella forma $u + w$ per opportuni $u \in U$, $w \in W$ e considero un qualsiasi $v \in U \cap W$. Basta osservare che $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = v - v$ e quindi dall'ipotesi di unicità segue che $v = \mathbf{0}$. Di conseguenza $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ e posso concludere che la somma è diretta. □

Proposizione 1. *Sia V uno spazio vettoriale euclideo e sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale di dimensione finita $s \geq 1$. Allora $V = W \oplus W^{\perp}$ e ciò equivale a dire che*

$$\forall\, v \in V \quad \exists!\; w \in W,\; w' \in W^{\perp} \;\Big|\; v = w + w'$$

Dimostrazione. L'equivalenza delle due affermazioni segue dall'osservazione 3. Basta dunque dimostrare la seconda affermazione che compare nell'enunciato. Essendo W uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita, dal corollario 1 della sezione 1.7 segue che esiste una base ortonormale $e = \{e_1, \dots, e_s\}$ di W. Dato un vettore $v \in V$, definisco $w := \langle v, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle v, e_s \rangle e_s$, $w' := v - w$. Ovviamente, $w \in W$ perché si esprime come combinazione lineare dei vettori della base e di W. Fissato $1 \leq i \leq s$, osservo che

$$\langle w', e_i \rangle = \langle v - w, e_i \rangle = \langle v, e_i \rangle - \langle w, e_i \rangle = \langle v, e_i \rangle - \langle \sum_{j=1}^{s} \langle v, e_j \rangle e_j, e_i \rangle$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{bilinearità}}}{=} \langle v, e_i \rangle - \sum_{j=1}^{s} \langle v, e_j \rangle \langle e_j, e_i \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ e \text{ ortonormale}}}{=} \langle v, e_i \rangle - \langle v, e_i \rangle = 0$$

Ma allora $w' \in W^{\perp}$ perché w' è ortogonale a ogni combinazione lineare dei generatori $e_1, \dots, e_s$. Infine, $v = w + w'$ per costruzione. Siano ora $u \in W$, $u' \in W^{\perp}$ vettori tali che $v = u + u'$. Definisco $z := w - u$ e, siccome $w + w' = u + u'$, vale anche $z = u' - w'$. Di conseguenza, $z \in W \cap W^{\perp}$ in quanto W e $W^{\perp}$ sono spazi vettoriali. Osservo che z è ortogonale a ogni elemento di W essendo $z \in W^{\perp}$, ma allora vale in particolare che $z \perp z$ perché $z \in W$. Ricordando che il vettore nullo è l'unico vettore ortogonale a se stesso (osservazione 4, sezione 1.7), posso affermare che $z = \mathbf{0}$. In conclusione, $u = w$ e $u' = w'$. □

Definizione 2. Siano V uno spazio vettoriale euclideo, $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale di dimensione finita e sia $v \in V$. L'unico vettore $w \in W$ tale che $v = w + w'$ per qualche $w' \in W^{\perp}$ si dice la *proiezione ortogonale di v su W.*

La definizione 2 è ben posta: esistenza e unicità del vettore $w \in W$ sono garantite dalla proposizione 1.

Osservazione 4. Sia V uno spazio vettoriale euclideo e siano $v, w \in V$, $v \neq \mathbf{0}$. Dall'osservazione 4 della sezione 1.4 segue che il vettore $a_v(w)v$ è la proiezione ortogonale di w su $\langle v \rangle$.

Osservazione 5 (Identità pitagorica). Siano V uno spazio vettoriale euclideo, $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale di dimensione finita e siano $v \in V$, $w \in W$, $w' \in W^{\perp}$ vettori tali che $v = w + w'$. Allora

$$\|v\|^2 = \|w\|^2 + \|w'\|^2$$

Dimostrazione. L'asserto si dimostra facilmente osservando che vale la relazione

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \langle w + w', w + w' \rangle = \langle w, w \rangle + 2\langle w, w' \rangle + \langle w', w' \rangle = \|w\|^2 + \|w'\|^2 \qquad \square$$

1.9 Angolo convesso tra due vettori

Definizione 1. Sia V uno spazio vettoriale euclideo e siano $v, w \in V$, $v, w \neq \mathbf{0}$. Si dice l'*angolo convesso (non orientato) tra i vettori* v *e* w l'unico angolo

$$\theta \in [0, \pi] \;\Big|\; \cos\theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|\|w\|}$$

La definizione 1 è ben posta. Infatti, dall'osservazione 1 della sezione 1.7 segue che la disuguaglianza di Schwarz si può esprimere nella forma equivalente

$$-\|v\|\|w\| \leq \langle v, w \rangle \leq \|v\|\|w\|$$

dalla quale, dividendo per $\|v\|\|w\|$, si ottiene che

$$-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|\|w\|} \leq 1$$

Poiché la funzione coseno è biiettiva sull'intervallo $[0, \pi]$, posso asserire che

$$\exists!\, \theta \in [0, \pi] \;\Big|\; \cos\theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|\|w\|}$$

Osservazione 1. Siano V uno spazio vettoriale euclideo, $v, w \in V$, $v, w \neq \mathbf{0}$ e sia θ l'angolo convesso tra i vettori v e w. Dalla definizione 1 segue immediatamente che $\langle v, w \rangle = \|v\|\|w\| \cos\theta$.

Osservazione 2. Siano V uno spazio vettoriale euclideo, $v, w \in V$, $v, w \neq \mathbf{0}$ e sia θ l'angolo convesso tra i vettori v e w. Si verifica facilmente che $v \perp w$ se e solo se $\theta = \frac{\pi}{2}$.

1.10 Prodotto vettoriale

Definizione 1. Siano V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 3, $\{i, j, k\}$ una base ortonormale di V e siano $v_1, v_2 \in V$, $v_1 = x_1 i + y_1 j + z_1 k$, $v_2 = x_2 i + y_2 j + z_2 k$. Il *prodotto vettoriale di* v_1 *per* v_2 è il vettore le cui componenti sono i minori di ordine 2, presi a segni alterni, della matrice $\left(\begin{smallmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{smallmatrix}\right)$, cioè

$$v_1 \wedge v_2 := \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} k$$

Teorema 1 (Proprietà del prodotto vettoriale)**.** *Siano* V *uno spazio vettoriale euclideo di dimensione* 3*,* $\{i, j, k\}$ *una base ortonormale di* V *e siano* $v_1, v_2, v_3 \in V$*,* $c \in \mathbb{R}$*. Allora*

(i) $v_1 \wedge v_2 = -v_2 \wedge v_1$

(ii) $v_1 \wedge (v_2 + v_3) = v_1 \wedge v_2 + v_1 \wedge v_3$

(iii) $(v_1 + v_2) \wedge v_3 = v_1 \wedge v_3 + v_2 \wedge v_3$

(iv) $c(v_1 \wedge v_2) = (cv_1) \wedge v_2 = v_1 \wedge (cv_2)$

(v) $\langle v_1, v_1 \wedge v_2 \rangle = 0$

(vi) $\langle v_2, v_1 \wedge v_2 \rangle = 0$

(vii) $\|v_1 \wedge v_2\|^2 = \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2$

(viii) $v_1 \wedge v_2 = \mathbf{0} \iff v_1 \parallel v_2$

Dimostrazione. Assumo $v_1 = x_1 i + y_1 j + z_1 k$, $v_2 = x_2 i + y_2 j + z_2 k$, $v_3 = x_3 i + y_3 j + z_3 k$.

(i) Basta osservare che $v_2 \wedge v_1$ è il vettore ottenuto da $v_1 \wedge v_2$ scambiando le righe nei minori di ordine 2 che costituiscono le componenti del vettore. È noto, tuttavia, che con uno scambio di righe il determinante di una matrice cambia segno, ragione per cui $v_1 \wedge v_2 = -v_2 \wedge v_1$.

(ii) L'asserto segue dalla linearità del determinante, infatti

$$\begin{aligned} v_1 \wedge (v_2 + v_3) &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 + y_3 & z_2 + z_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 + x_3 & z_2 + z_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 + x_3 & y_2 + y_3 \end{vmatrix} k \\ &= \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} \right) i - \left(\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} \right) j + \left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right) k \\ &= \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} k \right) + \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} k \right) \\ &= v_1 \wedge v_2 + v_1 \wedge v_3 \end{aligned}$$

(iii) Come nella dimostrazione del punto (ii), sfruttando la linearità del determinante si verifica facilmente che $(v_1 + v_2) \wedge v_3 = v_1 \wedge v_3 + v_2 \wedge v_3$.

(iv) Anche in questo caso, dalla linearità del determinante segue che

$$\begin{aligned} v_1 \wedge (cv_2) &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ cy_2 & cz_2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ cx_2 & cz_2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ cx_2 & cy_2 \end{vmatrix} k \\ &= c\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} k \right) \\ &= c(v_1 \wedge v_2) \end{aligned}$$

e analogamente si mostra che $(cv_1) \wedge v_2 = c(v_1 \wedge v_2)$.

(v) Poiché $\{i, j, k\}$ è una base ortonormale, il prodotto scalare assegnato su V coincide con il prodotto scalare standard (osservazione 5, sezione 1.7). Di conseguenza, ricordando la formula di Laplace per lo sviluppo del determinante, si ha che

$$\langle v_1, v_1 \wedge v_2 \rangle = x_1 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

(vi) Ragionando esattamente come nella dimostrazione del punto (v), si dimostra che vale anche la relazione $\langle v_2, v_1 \wedge v_2 \rangle = 0$.

(vii) In questo caso, basta scrivere esplicitamente

$$\|v_1 \wedge v_2\|^2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (x_1 z_2 - x_2 z_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2$$
$$\|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2$$

e svolgendo i calcoli si verifica che i secondi membri sono uguali.

(viii) Basta osservare che $v_1 \wedge v_2 = \mathbf{0}$ se e solo se i minori di ordine 2 che costituiscono le componenti del vettore sono tutti nulli. Equivalentemente, la matrice

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$$

ha rango minore o uguale a 1 per il principio dei minori orlati e quindi $v_1 \parallel v_2$. $\square$

Osservazione 1. La proprietà (vii) del teorema 1 si può anche esprimere nella forma equivalente

$$\|v_1 \wedge v_2\|^2 = \begin{vmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle \end{vmatrix}$$

Corollario 1. *Siano V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 3, $\{i, j, k\}$ una base ortonormale di V e siano $v_1, v_2 \in V$. Valgono le seguenti proprietà.*

(ix) *Se v_1 e v_2 sono vettori linearmente indipendenti, allora ogni vettore ortogonale sia a v_1 che a v_2 è un multiplo scalare di $v_1 \wedge v_2$, cioè*

$$\forall\, v_3 \in V,\ v_3 \perp v_1,\ v_3 \perp v_2 \quad \exists\, c \in \mathbb{R} \;\Big|\; v_3 = c(v_1 \wedge v_2)$$

(x) *Se v_1 e v_2 sono vettori linearmente indipendenti, allora $\{v_1, v_2, v_1 \wedge v_2\}$ è una base di V concordemente orientata con $\{i, j, k\}$.*

Dimostrazione. Assumo $v_1 = x_1 i + y_1 j + z_1 k$, $v_2 = x_2 i + y_2 j + z_2 k$.

(ix) Poiché v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti, si ha che $v_1 \nparallel v_2$ e dal punto (viii) del teorema 1 segue per contrapposizione logica che $v_1 \wedge v_2 \neq \mathbf{0}$. Inoltre, dai punti (v) e (vi) dello stesso teorema segue che $(v_1 \wedge v_2) \perp v_1$ e $(v_1 \wedge v_2) \perp v_2$. Ora, siccome $\dim \langle v_1, v_2 \rangle = 2$, per la proposizione 1 della sezione 1.8 si ha che $V = \langle v_1, v_2 \rangle \oplus \langle v_1, v_2 \rangle^\perp$ e applicando la formula di Grassmann si deduce che $\dim \langle v_1, v_2 \rangle^\perp = 1$. Ma allora $\langle v_1, v_2 \rangle^\perp = \langle v_1 \wedge v_2 \rangle$ perché, per quanto osservato prima, $v_1 \wedge v_2 \in \langle v_1, v_2 \rangle^\perp$ e $v_1 \wedge v_2 \neq \mathbf{0}$. Posso dunque concludere che per ogni $v_3 \in V$, $v_3 \perp v_1$, $v_3 \perp v_2$, cioè per ogni $v_3 \in \langle v_1, v_2 \rangle^\perp$ esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $v_3 = c(v_1 \wedge v_2)$.

(x) Per ragioni analoghe a quelle descritte nella dimostrazione del punto (ix), vale che $v_1 \wedge v_2 \neq \mathbf{0}$ e inoltre si ha che $v_1 \wedge v_2 \in \langle v_1, v_2 \rangle^\perp$ per i punti (v) e (vi) del teorema 1. Ora, se $v_1, v_2, v_1 \wedge v_2$ fossero linearmente dipendenti, allora $v_1 \wedge v_2 \in \langle v_1, v_2 \rangle$. In questo caso particolare si avrebbe, tuttavia, che $(v_1 \wedge v_2) \perp (v_1 \wedge v_2)$ e quindi, per l'osservazione 4 della sezione 1.7, $v_1 \wedge v_2 = \mathbf{0}$, il che è assurdo. Posso dunque affermare che $v_1, v_2, v_1 \wedge v_2$ sono vettori linearmente indipendenti e, poiché $\dim V = 3$ per ipotesi, $\{v_1, v_2, v_1 \wedge v_2\}$ è una base di V. A questo punto basta mostrare che la matrice del cambiamento di coordinate dalla base $\{v_1, v_2, v_1 \wedge v_2\}$ alla base $\{i, j, k\}$, cioè

$$M := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \\ y_1 & y_2 & -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \\ z_1 & z_2 & \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

ha determinante positivo. Svolgendo i calcoli, si ottiene che $\det M = \|v_1 \wedge v_2\|^2$ e, dal momento che $v_1 \wedge v_2 \neq \mathbf{0}$, dalla non degenerazione della norma segue che $\det M > 0$. Concludo quindi che le basi $\{v_1, v_2, v_1 \wedge v_2\}$ e $\{i, j, k\}$ sono concordemente orientate. □

Osservazione 2. Siano V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 3, $\{i, j, k\}$ una base ortonormale di V e siano $v_1, v_2 \in V$. Ovviamente, se $v_1 \perp v_2$ allora $\{v_1, v_2, v_1 \wedge v_2\}$ è una base ortogonale di V.

Osservazione 3. Siano V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 3, $\{i, j, k\}$ una base ortonormale di V e siano $v_1, v_2 \in V$. Allora $v_1 \wedge v_2$ dipende solo dall'orientazione di V definita dalla base $\{i, j, k\}$.

Dimostrazione. Innanzitutto, se v_1 e v_2 sono linearmente dipendenti, allora $v_1 \parallel v_2$ e quindi $v_1 \wedge v_2 = \mathbf{0}$ in virtù del punto (viii) del teorema 1. In questo caso, $v_1 \wedge v_2$ è univocamente determinato da v_1 e da v_2. Posso dunque supporre che v_1 e v_2 siano linearmente indipendenti. In tal caso, $\{v_1, v_2, v_1 \wedge v_2\}$ è una base di V concordemente orientata con $\{i, j, k\}$ per il punto (x) del corollario 1. Ora dai punti (v) e (vi) del teorema 1 segue che $v_1 \wedge v_2 \in \langle v_1, v_2 \rangle^\perp$, mentre dall'indipendenza lineare di v_1 e v_2 si ricava che $\dim \langle v_1, v_2 \rangle^\perp = 1$. Inoltre, in virtù del punto (vii) so che $\|v_1 \wedge v_2\|$ dipende solo dai vettori v_1 e v_2. Concludo che una diversa scelta della base può cambiare $v_1 \wedge v_2$ nel suo opposto e, per il punto (x) del corollario 1, il segno di $v_1 \wedge v_2$ dipende solo dall'orientazione di V definita dalla base $\{i, j, k\}$. □

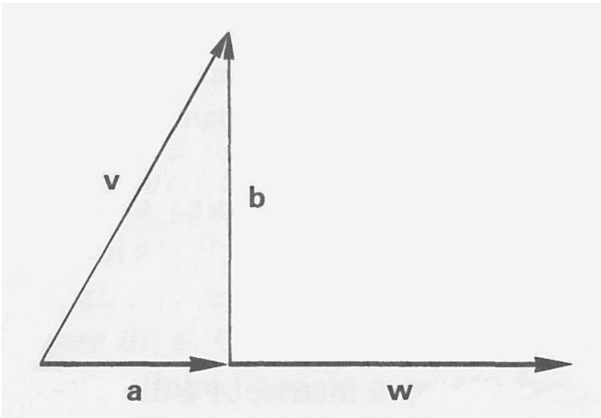
Proposizione 1. *Siano V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 3, $\{i, j, k\}$ una base ortonormale di V, $v, w \in V$ vettori linearmente indipendenti e siano $a, b \in V$ tali che $a \parallel w$, $b \perp w$, $v = a + b$. Allora*

$$\|v \wedge w\| = \|b\|\|w\|$$

Dimostrazione. L'asserto segue facilmente dalle proprietà (iii), (vii) e (viii) del teorema 1, infatti

$$\|v \wedge w\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per ipotesi} \\ v=a+b}}{=} \|(a+b) \wedge w\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(iii)}}}{=} \|(a \wedge w) + (b \wedge w)\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(viii) con} \\ a \parallel w}}{=} \|b \wedge w\| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(vii) con} \\ b \perp w}}{=} \|b\|\|w\| \qquad \square$$

Osservazione 4. Se considero lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard e la base canonica $\{E_1, E_2, E_3\}$, allora $\|v \wedge w\|$ è uguale all'area del parallelogramma costruito sui vettori v e w.



Definizione 2. Siano V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 3, $\{i, j, k\}$ una base ortonormale di V e siano $v_1, v_2, v_3 \in V$. Il prodotto scalare $\langle v_1, v_2 \wedge v_3 \rangle$ si dice il *prodotto misto di* v_1, v_2, v_3.

Osservazione 5. Siano V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 3, $\{i, j, k\}$ una base ortonormale di V e siano $v_1, v_2, v_3 \in V$, $v_1 = x_1 i + y_1 j + z_1 k$, $v_2 = x_2 i + y_2 j + z_2 k$, $v_3 = x_3 i + y_3 j + z_3 k$. Allora

$$\langle v_1, v_2 \wedge v_3 \rangle = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

per la formula di Laplace applicata alla prima riga. Segue immediatamente che

(i) il prodotto misto di v_1, v_2, v_3 cambia segno scambiando fra loro due vettori.

(ii) $\langle v_1, v_2 \wedge v_3 \rangle = 0$ se e solo se v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.

Proposizione 2 (Identità di Lagrange)**.** *Siano V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 3, $\{i, j, k\}$ una base ortonormale di V e siano $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$. Allora*

$$\langle v_1 \wedge w_1, v_2 \wedge w_2 \rangle = \begin{vmatrix} \langle v_1, v_2 \rangle & \langle v_1, w_2 \rangle \\ \langle w_1, v_2 \rangle & \langle w_1, w_2 \rangle \end{vmatrix}$$

Dimostrazione. Innanzitutto, assumo $v_1 = x_1 i + y_1 j + z_1 k$, $v_2 = x_2 i + y_2 j + z_2 k$, $w_1 = x'_1 i + y'_1 j + z'_1 k$, $w_2 = x'_2 i + y'_2 j + z'_2 k$. Dalla definizione di prodotto vettoriale segue che

$$v_1 \wedge w_1 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y'_1 & z'_1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x'_1 & z'_1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x'_1 & y'_1 \end{vmatrix} k, \quad v_2 \wedge w_2 = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y'_2 & z'_2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x'_2 & z'_2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x'_2 & y'_2 \end{vmatrix} k$$

A questo punto, scrivendo esplicitamente primo e secondo membro dell'identità di Lagrange, si ottiene

$$(y_1 z'_1 - y'_1 z_1)(y_2 z'_2 - y'_2 z_2) + (x_1 z'_1 - x'_1 z_1)(x_2 z'_2 - x'_2 z_2) + (x_1 y'_1 - x'_1 y_1)(x_2 y'_2 - x'_2 y_2)$$
$$(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)(x'_1 x'_2 + y'_1 y'_2 + z'_1 z'_2) - (x'_1 x_2 + y'_1 y_2 + z'_1 z_2)(x_1 x'_2 + y_1 y'_2 + z_1 z'_2)$$

L'identità si verifica, dunque, svolgendo i calcoli e confrontando le due espressioni. $\square$

1.11 Spazi euclidei

Definizione 1. Sia V uno spazio vettoriale euclideo. Uno spazio affine E su V si dice uno *spazio euclideo su* V. Un riferimento affine $\{\mathrm{O}, e_1, \dots, e_n\}$ tale che $\{e_1, \dots, e_n\}$ sia una base ortonormale di V si dice un *sistema di coordinate cartesiane* (o un *riferimento cartesiano*) *su* E.

Esempio 1. L'n-spazio affine numerico $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ diventa uno spazio euclideo se su $\mathbb{R}^n$ si assegna il prodotto scalare standard. Tale spazio euclideo viene detto *n-spazio euclideo numerico* e si denota $\mathbb{E}^n$. Se $\{E_1, \dots, E_n\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$, allora $\{\mathrm{O}, E_1, \dots, E_n\}$ è un sistema di coordinate cartesiane su $\mathbb{E}^n$.

Osservazione 1 (Cambi di coordinate cartesiane). Sia E uno spazio euclideo su V e siano $\{\mathrm{O}, e_1, \dots, e_n\}$, $\{\mathrm{O}', e_1', \dots, e_n'\}$ due sistemi di coordinate cartesiane su E. Sia $\mathrm{P} \in E$ il punto di coordinate $x_1, \dots, x_n$ nel riferimento $\{\mathrm{O}, e_1, \dots, e_n\}$, di coordinate $x_1', \dots, x_n'$ nel riferimento $\{\mathrm{O}', e_1', \dots, e_n'\}$ e siano inoltre $x = {}^t(x_1 \cdots x_n)$, $x' = {}^t(x_1' \cdots x_n')$. Allora

$$\exists\, A \in \mathrm{O}(n),\, c \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \;\Big|\; x' = Ax + c$$

Dimostrazione. Per definizione di riferimento cartesiano, le basi $e := \{e_1, \dots, e_n\}$, $e' := \{e_1', \dots, e_n'\}$ di V sono ortonormali. Siano $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ le coordinate del punto O nel riferimento $\{\mathrm{O}', e_1', \dots, e_n'\}$ e siano $A := \mathrm{M}_{e',e}(\mathrm{id}_V)$, $c := {}^t(c_1 \cdots c_n)$. Dato che A è definita come matrice del cambiamento di coordinate tra basi ortonormali, si ha che $A \in \mathrm{O}(n)$ per la proposizione 3 della sezione 1.7. Ora suppongo che $A = (a_{ij})$ e osservo che vale la relazione

$$\overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{P}} = \overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{O}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \sum_{i=1}^n c_i e_i' + \sum_{j=1}^n x_j e_j = \sum_{i=1}^n c_i e_i' + \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i' = \sum_{i=1}^n \left(c_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) e_i'$$

Ma allora dall'indipendenza lineare dei vettori $e_1', \dots, e_n'$ si ricava, per ogni $1 \leq i \leq n$, la relazione

$$x_i' = c_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \qquad \Longleftrightarrow \qquad x' = Ax + c$$ □

Definizione 2. Sia E uno spazio euclideo su V e siano $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in E$. La *distanza di* P *da* Q è

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) := \|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\|$$

Osservazione 2. Siano E uno spazio euclideo su V, $\{\mathrm{O}, e_1, \dots, e_n\}$ un sistema di coordinate cartesiane su E e siano $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in E$, $\mathrm{P} = \mathrm{P}(x_1, \dots, x_n)$, $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}(y_1, \dots, y_n)$. Allora

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$$

Dimostrazione. L'asserto segue dalla definizione 2 e dalle proprietà delle basi ortonormali, infatti

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{\mathrm{PQ}}, \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \rangle} = \sqrt{\Big\langle \sum_{1 \leq i \leq n} (y_i - x_i) e_i, \sum_{1 \leq j \leq n} (y_j - x_j) e_j \Big\rangle} =$$

$$\underset{\text{bilinearità}}{=} \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq n} (y_i - x_i)(y_j - x_j) \langle e_i, e_j \rangle} \underset{\text{base ortonormale}}{=} \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$$ □

Proposizione 1. *Sia E uno spazio euclideo su V. La distanza soddisfa le seguenti proprietà:*

SM1	$\mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \geq 0 \ \forall\, \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in E$ *e* $\mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = 0 \iff \mathrm{P} = \mathrm{Q}$	(*positività e non degenerazione*)
SM2	$\mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \mathrm{d}(\mathrm{Q}, \mathrm{P}) \ \forall\, \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in E$	(*simmetria*)
SM3	$\mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) + \mathrm{d}(\mathrm{Q}, \mathrm{R}) \geq \mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{R}) \ \forall\, \mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R} \in E$	(*disuguaglianza triangolare*)

Dimostrazione. Le proprietà SM1, SM2, SM3 della distanza sono una diretta conseguenza delle proprietà N1, N2, N3 della norma (proposizione 1, sezione 1.7). □

Definizione 3. Sia X un insieme non vuoto. Un'applicazione $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ che soddisfa le proprietà SM1, SM2 e SM3 della proposizione 1 si dice una *distanza*. Un insieme su cui sia definita una distanza si dice uno *spazio metrico*.

Osservazione 3. Dalla definizione 3 segue immediatamente che ogni spazio euclideo è uno spazio metrico.

Definizione 4. Siano E uno spazio euclideo su V, $r, r' \subseteq E$ due rette e siano $v, v' \in V$ vettori di direzione di r e di r' rispettivamente. L'angolo convesso tra i vettori v e v' si dice un *angolo convesso tra r e r'*.

Osservazione 4. La definizione 4 dipende dalla scelta di $v, v' \in V$. Infatti, moltiplicando uno dei due vettori per uno scalare negativo, l'angolo θ viene sostituito da $\pi - \theta$.

Dimostrazione. Sia u un altro vettore di direzione di r. Ovviamente $\langle u \rangle = \langle v \rangle$ e quindi $u \parallel v$, cioè $\exists\, c \in \mathbb{R},\ c \neq 0 \mid u = cv$. Ora sia θ l'angolo convesso tra v e v' e sia γ l'angolo convesso tra u e v'. Allora

$$\gamma = \arccos \frac{\langle u, v' \rangle}{\|u\|\|v'\|} = \arccos \frac{\langle cv, v' \rangle}{\|cv\|\|v'\|} = \arccos \frac{c}{|c|} \frac{\langle v, v' \rangle}{\|v\|\|v'\|} = \begin{cases} \theta & \text{se } c > 0 \\ \pi - \theta & \text{se } c < 0 \end{cases} \qquad \square$$

Definizione 5. Siano E uno spazio euclideo su V, $r, r' \subseteq E$ due rette e siano $v, v' \in V$ vettori di direzione di r e di r' rispettivamente. Le rette r e r' si dicono[2] *ortogonali* e si denota $r \perp r'$ se $v \perp v'$.

Definizione 6. Siano E uno spazio euclideo su V, $r \subseteq E$ una retta e sia $v \in V$ un vettore di direzione di r. Un vettore $w \in V$, $w \neq \mathbf{0}$ si dice *ortogonale* (o *normale*) *a r* e si denota $r \perp w$ se $v \perp w$.

Le definizioni 5 e 6 sono ben poste. Infatti, se u è un altro vettore di direzione della retta r allora, come si è visto nella dimostrazione dell'osservazione 4, si ha che $\exists\, c \in \mathbb{R},\ c \neq 0 \mid u = cv$ e quindi

$$u \perp w \iff \langle u, w \rangle = 0 \iff \langle cv, w \rangle = 0 \iff c \langle v, w \rangle = 0 \iff \langle v, w \rangle = 0 \iff v \perp w$$

1.12 Piani euclidei

Definizione 1. Uno spazio euclideo di dimensione 2 si dice un *piano euclideo*.

D'ora in avanti, qualora non venisse specificato diversamente, si assume che E sia un piano euclideo e che l'insieme $\{o, i, j\}$ sia un sistema di coordinate cartesiane su E.

Osservazione 1. Considero una retta r di E, avente equazione cartesiana

$$AX + BY + C = 0 \;\Big|\; \mathrm{r}(A \;\; B) \neq 0$$

- Ogni *vettore di direzione di r* è dato da una soluzione non nulla dell'equazione omogenea associata $AX + BY = 0$. In particolare, un vettore di direzione di r è

$$v_r := -Bi + Aj$$

- Un *versore di direzione di r* è un vettore di direzione di r di lunghezza 1. I versori di direzione di r sono il versore associato a v_r e il suo opposto, cioè

$$\pm u_r := \pm\Big(\frac{-B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\, i + \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\, j\Big)$$

- Un *vettore normale a r* è dato da

$$w_r := Ai + Bj$$

infatti $\langle v_r, w_r \rangle = -BA + AB = 0$ e quindi $r \perp w_r$ per definizione.

- Un *versore normale a r* è un vettore normale a r di lunghezza 1. I versori normali a r sono il versore associato a w_r e il suo opposto, cioè

$$\pm n_r := \pm\Big(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\, i + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\, j\Big)$$

[2] Più in generale, si può dare la seguente definizione: assegnato uno spazio euclideo E su V, due sottospazi $S, T \subseteq E$ si dicono *ortogonali* e si denota $S \perp T$ se le rispettive giaciture sono ortogonali (si veda la definizione 2 della sezione 1.4).

Osservazione 2. Siano $r \subseteq E$ una retta, $\mathrm{P}_0 \in r$, $\mathrm{P}_0 = \mathrm{P}_0(x_0, y_0)$ e sia $w_r = Ai + Bj$ un vettore normale a r. Allora l'equazione cartesiana di r si può esprimere nella forma

$$A(X - x_0) + B(Y - y_0) = 0$$

In altre parole, una qualsiasi retta di E è individuata da un suo punto e da un vettore a essa ortogonale.

Dimostrazione. Dato che w_r è un vettore normale alla retta r, posso assumere che $AX + BY + C = 0$ sia l'equazione cartesiana di r. Per ipotesi, so che $\mathrm{P}_0 \in r$ e quindi le coordinate di P_0 verificano la relazione $Ax_0 + By_0 + C = 0$ dalla quale si ricava, ovviamente, che $C = -Ax_0 - By_0$. Ma allora, sostituendo, l'equazione cartesiana di r assume la forma $AX+BY-Ax_0-By_0 = 0$, cioè $A(X-x_0)+B(Y-y_0) = 0$. □

Osservazione 3. Siano $r, r_1 \subseteq E$ due rette e siano $v_r = -Bi + Aj$, $v_{r_1} = -B_1 i + A_1 j$ vettori di direzione di r e di r_1 rispettivamente. Allora un angolo convesso[3] tra r e r_1 è l'angolo

$$\theta \in [0, \pi] \;\Big|\; \cos\theta = \frac{\langle v_r, v_{r_1} \rangle}{\|v_r\|\|v_{r_1}\|} = \frac{AA_1 + BB_1}{\sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}$$

Dimostrazione. L'asserto segue banalmente dalla definizione 4 della sezione 1.11. □

Definizione 2. Siano $r \subseteq E$ una retta, $\mathrm{P}_0 \in E$ e sia $s \subseteq E$ la retta passante per P_0 e ortogonale a r. Il punto di intersezione tra r e s si dice il *piede della perpendicolare condotta da* P_0 *a* r.

La definizione 2 è ben posta perché, in uno spazio affine di dimensione 2, due rette non parallele hanno sempre un unico punto di intersezione. Inoltre, la retta s passante per P_0 e ortogonale a r è univocamente determinata in virtù dell'osservazione 2.

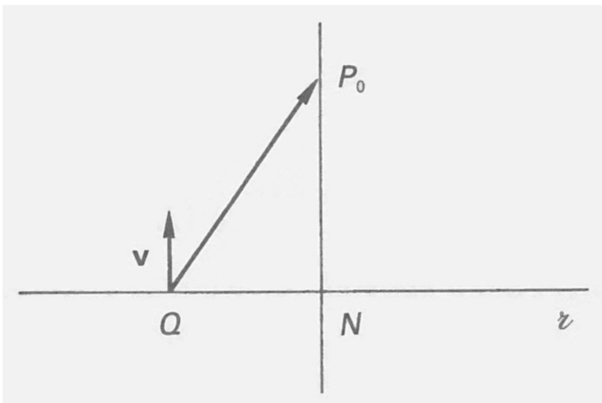
Definizione 3. Siano $r \subseteq E$ una retta, $\mathrm{P}_0 \in E$ e sia N il piede della perpendicolare condotta da P_0 a r. La *distanza di* P_0 *da* r è

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}_0, r) := \|\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{N}}\|$$

Proposizione 1. *Siano $r \subseteq E$ una retta, $AX + BY + C = 0$ l'equazione cartesiana di r e sia $\mathrm{P}_0 \in E$, $\mathrm{P}_0 = \mathrm{P}_0(x_0, y_0)$. Allora vale la formula*

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}_0, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Dimostrazione. Siano v_r un vettore di direzione di r, n_r un versore normale a r, $s \subseteq E$ la retta passante per P_0 e di giacitura $\langle n_r \rangle$ e sia N il piede della perpendicolare condotta da P_0 a r. Innanzitutto, per la definizione 5 della sezione 1.11 si ha che s è una retta ortogonale a r, in quanto n_r è un vettore di direzione di s e $n_r \perp v_r$ per definizione di vettore normale a una retta. Dunque, essendo s la retta passante per P_0 e ortogonale a r, N è per definizione il punto di intersezione tra r e s. Sia inoltre $\mathrm{Q} \in r$, $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}(a, b)$.



[3]Notare che l'altro angolo convesso è quello formato dai vettori v_r e $-v_{r_1}$ e vale $\pi - \theta$ (osservazione 4, sezione 1.11).

Dal secondo assioma degli spazi affini[4] segue che $\overrightarrow{\mathrm{QP}_0} = \overrightarrow{\mathrm{QN}} + \overrightarrow{\mathrm{NP}_0}$. Osservo che $\mathrm{Q}, \mathrm{N} \in r$, quindi $\overrightarrow{\mathrm{QN}} \in \langle v_r \rangle$. Similmente, poiché $\mathrm{N}, \mathrm{P}_0 \in s$, si ha che $\overrightarrow{\mathrm{NP}_0} \in \langle n_r \rangle$. Ora, se E è un piano euclideo su V, allora posso scomporre $V = \langle n_r \rangle \oplus n_r^\perp$ per l'osservazione 5 della sezione 1.4 perché $n_r \neq \mathbf{0}$. Deduco dalla formula di Grassmann che $\dim n_r^\perp = 1$ ed essendo $v_r \in n_r^\perp$, $v_r \neq \mathbf{0}$ posso affermare che $\langle v_r \rangle = n_r^\perp$. In particolare, ho mostrato che $\overrightarrow{\mathrm{QN}} \in n_r^\perp$ e quindi $\overrightarrow{\mathrm{NP}_0}$ è la proiezione ortogonale di $\overrightarrow{\mathrm{QP}_0}$ su $\langle n_r \rangle$ (sezione 1.8, definizione 2). Ma allora dall'osservazione 4 della sezione 1.8 e dall'unicità della proiezione ortogonale segue che

$$\overrightarrow{\mathrm{NP}_0} = a_{n_r}(\overrightarrow{\mathrm{QP}_0}) n_r = \frac{\langle n_r, \overrightarrow{\mathrm{QP}_0} \rangle}{\langle n_r, n_r \rangle} n_r = \langle n_r, \overrightarrow{\mathrm{QP}_0} \rangle n_r$$

Di conseguenza, in virtù della definizione 3 si ottiene che

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}_0, r) = \|\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{N}}\| = \|\overrightarrow{\mathrm{NP}_0}\| = \|\langle n_r, \overrightarrow{\mathrm{QP}_0} \rangle n_r\| = |\langle n_r, \overrightarrow{\mathrm{QP}_0} \rangle|$$

A questo punto, basta osservare che $\overrightarrow{\mathrm{QP}_0} = (x_0 - a)i + (y_0 - b)j$, mentre n_r si esprime come nell'osservazione 1. Inoltre, dal momento che $\mathrm{Q} \in r$, le coordinate di Q verificano la relazione $Aa + Bb + C = 0$, dalla quale si ricava che $C = -Aa - Bb$. Posso dunque concludere che

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}_0, r) = \left| \frac{A(x_0 - a) + B(y_0 - b)}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad \square$$

Definizione 4. Siano $r, r' \subseteq E$ due rette parallele e sia $\mathrm{P} \in r$. La *distanza di r da r'* è

$$\mathrm{d}(r, r') := \mathrm{d}(\mathrm{P}, r')$$

La definizione 4 è ben posta perché la distanza di r da r' non dipende dalla particolare scelta del punto $\mathrm{P} \in r$. Siano infatti $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1 \in r$, $\mathrm{P}_0 = \mathrm{P}_0(x_0, y_0)$, $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_1(x_1, y_1)$. Poiché r e r' sono rette parallele, esse condividono una stessa giacitura di equazione cartesiana $AX + BY = 0$. In virtù dell'osservazione 2, due possibili equazioni cartesiane della retta r sono $A(X - x_0) + B(Y - y_0) = 0$ e $A(X - x_1) + B(Y - y_1) = 0$. Da queste due relazioni si ricava che $Ax_0 + By_0 = Ax_1 + By_1$. Posso invece supporre che r' sia la retta di equazione cartesiana $AX + BY + C = 0$. Ma allora dalla proposizione 1 segue che

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}_0, r') = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \mathrm{d}(\mathrm{P}_1, r')$$

1.13 Spazi euclidei di dimensione 3

Da questo punto in poi, qualora non venisse specificato altrimenti, si assume che E sia uno spazio euclideo su V di dimensione 3 e che l'insieme $\{\mathrm{O}, i, j, k\}$ sia un sistema di coordinate cartesiane su E.

Definizione 1. Sia $p \subseteq E$ un piano e sia $W \subseteq V$ la giacitura del piano p. Un vettore $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$ si dice *ortogonale* (o *normale*) *a p* e si denota $v \perp p$ se $v \in W^\perp$.

Osservazione 1. Considero un piano $p \subseteq E$, avente giacitura $W \subseteq V$, di equazione cartesiana

$$AX + BY + CZ + D = 0 \;\Big|\; \mathrm{r}(A \;\; B \;\; C) \neq 0$$

Ovviamente, $W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale euclideo di dimensione finita, dunque posso ricorrere alla proposizione 1 della sezione 1.8 per scomporre $V = W \oplus W^\perp$. Utilizzando la formula di Grassmann si ricava quindi che $\dim W^\perp = 1$. Di conseguenza, due qualsiasi vettori normali a p sono tra loro paralleli e quindi p possiede esattamente due versori normali, l'uno l'opposto dell'altro. Ora sia fissato $\mathrm{P}_0 \in p$, $\mathrm{P}_0 = \mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$. Le coordinate del punto P_0 soddisfano la relazione $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ ma allora, esplicitando il termine noto, l'equazione cartesiana del piano si può scrivere nella forma equivalente

$$A(X - x_0) + B(Y - y_0) + C(Z - z_0) = 0$$

[4] Si ricorda che uno spazio affine su V è un insieme non vuoto A che soddisfa i due seguenti assiomi:

$$\forall\, \mathrm{Q} \in A,\, v \in V \;\; \exists!\, \mathrm{P} \in A \;\mid\; \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = v \qquad \text{(SA1)}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QR}} = \overrightarrow{\mathrm{PR}} \;\; \forall\, \mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R} \in A \qquad \text{(SA2)}$$

Definisco $v_p := Ai+Bj+Ck$. Applicando il primo assioma degli spazi affini a un generico vettore $w \in V$, si deduce che $\exists!\, \mathrm{Q} \in E$, $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}(a,b,c) \mid w = \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{Q}}$. A questo punto, dato che $p \subseteq E$ è il sottospazio affine passante per P_0 e di giacitura W, si osserva che

$$w \in W \iff \mathrm{Q} \in p \iff A(a-x_0)+B(b-y_0)+C(c-z_0)=0 \iff \langle v_p, w\rangle = 0 \iff v_p \perp w$$

In altre parole, $v_p \perp w$ per ogni $w \in W$ e con ciò posso concludere che $v_p \in W^\perp$. Inoltre, $v_p \neq \mathbf{0}$ perché $\mathrm{r}(A\ \ B\ \ C) \neq 0$, quindi v_p è un vettore normale a p per definizione. A questo punto si verifica facilmente che i versori normali a p sono il versore associato a v_p e il suo opposto, cioè

$$\pm n_p := \pm\Big(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,i + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,j + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,k\Big)$$

Definizione 2. Siano $p, p_1 \subseteq E$ due piani e siano v_p, v_{p_1} vettori normali a p e a p_1 rispettivamente. L'angolo convesso tra i vettori v_p e v_{p_1} si dice un *angolo convesso tra p e p_1*.

Osservazione 2. La definizione 2 dipende dalla scelta di v_p e v_{p_1}. Infatti, moltiplicando uno dei vettori normali per un fattore di proporzionalità negativo, l'angolo θ viene sostituito da $\pi-\theta$.

La dimostrazione dell'osservazione 2 è del tutto analoga a quella già trattata per angoli convessi tra due rette (sezione 1.11, osservazione 4).

Osservazione 3. Siano $p, p_1 \subseteq E$ due piani e siano $v_p = Ai+Bj+Ck$, $v_{p_1} = A_1i+B_1j+C_1k$ vettori normali a p e a p_1 rispettivamente. Allora un angolo convesso[5] tra p e p_1 è l'angolo

$$\theta \in [0,\pi] \;\Big|\; \cos\theta = \frac{\langle v_p, v_{p_1}\rangle}{\|v_p\|\|v_{p_1}\|} = \frac{AA_1+BB_1+CC_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}$$

Dimostrazione. L'asserto segue banalmente dalla definizione 2. □

Definizione 3. Siano $p, p_1 \subseteq E$ due piani e siano v_p, v_{p_1} vettori normali a p e a p_1 rispettivamente. I piani p e p_1 si dicono *ortogonali* e si denota $p \perp p_1$ se $v_p \perp v_{p_1}$.

La definizione 3 è ben posta perché non dipende dalla scelta dei vettori normali ai due piani. Questo fatto si giustifica in maniera del tutto analoga al caso di rette ortogonali (sezione 1.11, definizione 5).

Osservazione 4. Siano $p, p_1 \subseteq E$ due piani, $v_p = Ai+Bj+Ck$, $v_{p_1} = A_1i+B_1j+C_1k$ vettori normali a p e a p_1 rispettivamente e sia θ un angolo convesso tra p e p_1. Allora

$$p \perp p_1 \iff AA_1+BB_1+CC_1 = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2}$$

Dimostrazione. Basta osservare che, per definizione, $p \perp p_1$ significa che $v_p \perp v_{p_1}$ e questo si verifica se e solo se $\langle v_p, v_{p_1}\rangle = 0$, cioè se e solo se $AA_1+BB_1+CC_1=0$. In virtù dell'osservazione 3, tale relazione è equivalente alla condizione $\cos\theta = 0$ e, siccome $\theta \in [0,\pi]$, si deve avere che $\theta = \frac{\pi}{2}$. □

Definizione 4. Siano $r \subseteq E$ una retta, $p \subseteq E$ un piano, v_r un vettore di direzione di r, v_p un vettore normale a p e sia ψ l'angolo convesso tra i vettori v_r e v_p. Si dice un *angolo convesso tra r e p* l'angolo

$$\varphi \in \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big] \;\Big|\; \varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$$

Osservazione 5. La definizione 4 dipende dalla scelta di v_r e v_p. Infatti, moltiplicando uno dei due vettori per uno scalare negativo, l'angolo φ viene sostituito da $-\varphi$.

Dimostrazione. Basta osservare che, moltiplicando v_r o v_p per uno scalare negativo, l'angolo ψ viene sostituito da $\pi-\psi$ (sezione 1.11, osservazione 4) e, di conseguenza, l'angolo convesso tra r e p diventa

$$\frac{\pi}{2} - (\pi-\psi) = -\frac{\pi}{2} + \psi = -\varphi$$ □

[5] Si osservi che, per l'osservazione 2, l'altro angolo convesso è quello formato dai vettori v_p e $-v_{p_1}$ e vale $\pi-\theta$.

Osservazione 6. Siano $r \subseteq E$ una retta, $p \subseteq E$ un piano, $v_r = li + mj + nk$ un vettore di direzione di r e sia $v_p = Ai + Bj + Ck$ un vettore normale a p. Allora un angolo convesso[6] tra r e p è l'angolo

$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \;\Big|\; \sin\varphi = \frac{\langle v_p, v_r \rangle}{\|v_p\|\|v_r\|} = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

Dimostrazione. Sia ψ l'angolo convesso tra v_r e v_p. Per definizione, $\psi \in [0, \pi]$ è l'unico angolo tale che

$$\cos\psi = \frac{\langle v_p, v_r \rangle}{\|v_p\|\|v_r\|} = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

Basta semplicemente osservare che $\cos\psi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi$. □

Definizione 5. Siano $r \subseteq E$ una retta, $p \subseteq E$ un piano e sia v_r un vettore di direzione di r. La retta r e il piano p si dicono *ortogonali* e si denota $r \perp p$ se $v_r \perp p$.

La definizione 5 è ben posta perché non dipende da una particolare scelta del vettore di direzione di r. Sia infatti W la giacitura di p. Basta semplicemente osservare che, se u_r è un altro vettore di direzione di r, allora $u_r \parallel v_r$, cioè $\exists\, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0 \mid u_r = cv_r$ e quindi si ottiene che

$$\begin{aligned} u_r \in W^\perp &\iff \langle u_r, w \rangle = 0 \;\; \forall\, w \in W \\ &\iff \langle cv_r, w \rangle = 0 \;\; \forall\, w \in W \\ &\iff c\langle v_r, w \rangle = 0 \;\; \forall\, w \in W \\ &\iff \langle v_r, w \rangle = 0 \;\; \forall\, w \in W \\ &\iff v_r \in W^\perp \end{aligned}$$

Definizione 6. Siano $p \subseteq E$ un piano, $\mathrm{P}_0 \in E$ e sia $s \subseteq E$ la retta passante per P_0 e ortogonale a p. Il punto di intersezione tra p e s si dice il *piede della perpendicolare condotta da* P_0 *a* p.

La definizione 6 è ben posta perché, in uno spazio affine di dimensione 3, una retta e un piano non paralleli hanno sempre un unico punto di intersezione. Inoltre, la retta s passante per P_0 e ortogonale a p è univocamente determinata perché lo è la sua giacitura. Infatti, se v_s è un vettore di direzione di s e se W è la giacitura di p, allora $v_s \in W^\perp$ perché $s \perp p$. Ma allora, ricordando quanto visto nell'osservazione 1, posso affermare che $\langle v_s \rangle = W^\perp$ in quanto $\dim W^\perp = 1$ e $v_s \neq \mathbf{0}$. Ho quindi dimostrato che la giacitura di s è l'ortogonale della giacitura di p.

Definizione 7. Siano $p \subseteq E$ un piano, $\mathrm{P}_0 \in E$ e sia N il piede della perpendicolare condotta da P_0 a p. La *distanza di* P_0 *da* p è

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}_0, p) := \|\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{N}}\|$$

Proposizione 1. *Sia $p \subseteq E$ un piano, $AX + BY + CZ + D = 0$ l'equazione cartesiana di p e sia $\mathrm{P}_0 \in E$, $\mathrm{P}_0 = \mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$. Allora vale la formula*

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}_0, p) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

La dimostrazione della proposizione 1 è del tutto analoga a quella già trattata sulla distanza tra un punto e una retta nel piano euclideo (sezione 1.12, proposizione 1).

Definizione 8. Siano $r \subseteq E$ una retta, $p \subseteq E$ un piano parallelo a r e sia $\mathrm{P} \in r$. La *distanza di* r *da* p è

$$\mathrm{d}(r, p) := \mathrm{d}(\mathrm{P}, p)$$

La definizione 8 è ben posta. Infatti si verifica, con un argomento simile a quello adottato per la definizione 4 della sezione 1.12, che la distanza di r da p non dipende dalla particolare scelta di $\mathrm{P} \in r$.

Definizione 9. Siano $r \subseteq E$ una retta, $\mathrm{P}_0 \in E$, $p \subseteq E$ il piano passante per P_0 e ortogonale a r e sia N il punto di intersezione tra r e p. La *distanza di* P_0 *da* r è

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}_0, r) := \|\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{N}}\|$$

[6] Dall'osservazione 5 segue che l'altro angolo convesso è quello ottenuto dai vettori v_r e $-v_p$ e vale $-\varphi$.

La definizione 9 è ben posta perché, in uno spazio affine di dimensione 3, una retta e un piano non paralleli hanno sempre un unico punto di intersezione. Inoltre, con un argomento simile a quello applicato per la definizione 6, si verifica che il piano p passante per P_0 e ortogonale a r è univocamente determinato.

Osservazione 7. Siano $r \subseteq E$ una retta, $v_r = li + mj + nk$ un vettore di direzione di r e siano $\mathrm{P}_0 \in E$, $\mathrm{P}_0 = \mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$, $\mathrm{Q} \in r$, $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}(a, b, c)$. Allora

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}_0, r) = \frac{\|\overrightarrow{\mathrm{QP}_0} \wedge v_r\|}{\|v_r\|} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_0 - b & z_0 - c \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0 - a & z_0 - c \\ l & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0 - a & y_0 - b \\ l & m \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

Dimostrazione. Sia p il piano passante per P_0 e ortogonale a r. Come già detto diverse volte, una retta e un piano non paralleli in uno spazio affine di dimensione 3 possiedono un unico punto di intersezione. Sia dunque N il punto di intersezione tra r e p. Distinguo il caso $\mathrm{P}_0 \in r$ dal caso $\mathrm{P}_0 \notin r$. Nel primo caso si ha che $\mathrm{P}_0 = \mathrm{N}$. Dalla definizione 9 e dalla non degenerazione della norma, quindi, segue che

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}_0, r) = \|\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{N}}\| = \|\overrightarrow{\mathrm{NN}}\| = \|\mathbf{0}\| = 0$$

Dato che, per ipotesi, v_r è un vettore di direzione della retta r e $\mathrm{Q} \in r$, posso supporre che, al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, le equazioni parametriche di r siano

$$\begin{cases} X = a + lt \\ Y = b + mt \\ Z = c + nt \end{cases}$$

Siccome $\mathrm{P}_0 \in r$, le coordinate di P_0 soddisfano le equazioni parametriche di r per un qualche $t_0 \in \mathbb{R}$, cioè

$$\begin{cases} x_0 = a + lt_0 \\ y_0 = b + mt_0 \\ z_0 = c + nt_0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 - a = lt_0 \\ y_0 - b = mt_0 \\ z_0 - c = nt_0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_0 - a \\ y_0 - b \\ z_0 - c \end{pmatrix} = t_0 \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

Il sistema esprime quindi una condizione di dipendenza lineare tra i vettori $\overrightarrow{\mathrm{QP}_0}$ e v_r. Ma allora

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} x_0 - a & y_0 - b & z_0 - c \\ l & m & n \end{pmatrix} = 1$$

Dunque, per il principio dei minori orlati, i minori di ordine 2 di tale matrice, che corrispondono a quelli presenti nella formula che si vuole dimostrare, sono tutti nulli. Ora suppongo che $\mathrm{P}_0 \notin r$. Dato che la giacitura di r è $\langle v_r \rangle$, dalla definizione di sottospazio affine segue che $\overrightarrow{\mathrm{QP}_0} \notin \langle v_r \rangle$. Equivalentemente, $\overrightarrow{\mathrm{QP}_0}$ e v_r sono vettori linearmente indipendenti. Dal secondo assioma degli spazi affini segue che posso scomporre $\overrightarrow{\mathrm{QP}_0} = \overrightarrow{\mathrm{QN}} + \overrightarrow{\mathrm{NP}_0}$. Siccome $\mathrm{Q}, \mathrm{N} \in r$, si ha che $\overrightarrow{\mathrm{QN}} \in \langle v_r \rangle$, quindi $\overrightarrow{\mathrm{QN}} \parallel v_r$. Adesso sia W la giacitura di p. Poiché $\mathrm{N}, \mathrm{P}_0 \in p$, si ha che $\overrightarrow{\mathrm{NP}_0} \in W$. Dato che p e r sono ortogonali, dalla definizione 5 segue che $v_r \in W^\perp$, cioè $v_r \perp w$ per ogni $w \in W$. In particolare, si ha che $\overrightarrow{\mathrm{NP}_0} \perp v_r$, quindi posso ricorrere alla proposizione 1 della sezione 1.10 e affermare che

$$\|\overrightarrow{\mathrm{QP}_0} \wedge v_r\| = \|\overrightarrow{\mathrm{NP}_0}\|\|v_r\|$$

Poiché $v_r \neq \mathbf{0}$, si ha che $\|v_r\| \neq 0$ per la non degenerazione della norma. Posso dunque dividere primo e secondo membro dell'equazione ottenuta per $\|v_r\|$ e, ricordando la definizione 9, si ha la tesi. □

Osservazione 8. Siano $r, r_1 \subseteq E$ due rette sghembe. Allora $\exists!\, \mathrm{N} \in r,\ \mathrm{N}_1 \in r_1 \mid \overrightarrow{\mathrm{NN}_1} \perp r,\ \overrightarrow{\mathrm{NN}_1} \perp r_1$.

Dimostrazione. Siano v_r, v_{r_1} vettori di direzione di r e di r_1 rispettivamente e siano $\mathrm{Q}, \mathrm{N} \in r$, $\mathrm{Q}_1, \mathrm{N}_1 \in r_1$. Innanzitutto, come si è già visto in altre dimostrazioni, dalla definizione di sottospazio affine posso dedurre che $\overrightarrow{\mathrm{QN}} \in \langle v_r \rangle$, quindi che $\overrightarrow{\mathrm{QN}} \parallel v_r$. Dunque esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $\overrightarrow{\mathrm{QN}} = tv_r$ e, con un ragionamento del tutto analogo, deduco che esiste anche $t_1 \in \mathbb{R}$ tale che $\overrightarrow{\mathrm{Q}_1\mathrm{N}_1} = t_1 v_{r_1}$. Ora, applicando il secondo assioma degli spazi affini, si ricava che

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QN}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + tv_r\,, \qquad \overrightarrow{\mathrm{ON}_1} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}_1} + \overrightarrow{\mathrm{Q}_1\mathrm{N}_1} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}_1} + t_1 v_{r_1}$$

Dunque, i punti N e N_1 sono univocamente determinati da t e da t_1 rispettivamente. Inoltre, osservo che

$$\overrightarrow{\mathrm{NN}_1} = \overrightarrow{\mathrm{NO}} + \overrightarrow{\mathrm{ON}_1} = -\overrightarrow{\mathrm{ON}} + \overrightarrow{\mathrm{ON}_1} = -\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - tv_r + \overrightarrow{\mathrm{OQ}_1} + t_1 v_{r_1} = \overrightarrow{\mathrm{QQ}_1} - tv_r + t_1 v_{r_1}$$

Dalla definizione 6 della sezione 1.11 segue che la condizione da imporre affinché $\overrightarrow{\mathrm{NN}_1} \perp r$, $\overrightarrow{\mathrm{NN}_1} \perp r_1$ è

$$\begin{cases} \langle \overrightarrow{\mathrm{NN}_1}, v_r \rangle = 0 \\ \langle \overrightarrow{\mathrm{NN}_1}, v_{r_1} \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t\langle v_r, v_r \rangle - t_1 \langle v_{r_1}, v_r \rangle = \langle \mathrm{QQ}_1, v_r \rangle \\ t\langle v_r, v_{r_1} \rangle - t_1 \langle v_{r_1}, v_{r_1} \rangle = \langle \mathrm{QQ}_1, v_{r_1} \rangle \end{cases}$$

Ho ottenuto un sistema di due equazioni in due indeterminate, la cui matrice dei coefficienti è

$$A := \begin{pmatrix} \langle v_r, v_r \rangle & -\langle v_{r_1}, v_r \rangle \\ \langle v_r, v_{r_1} \rangle & -\langle v_{r_1}, v_{r_1} \rangle \end{pmatrix}$$

A questo punto, sfruttando la linearità del determinante e ricordando l'osservazione 1 della sezione 1.10, si deduce che $\det A = -\|v_r \wedge v_{r_1}\|^2$. Inoltre, $v_r \nparallel v_{r_1}$ dal momento che r e r_1 sono rette sghembe, quindi $\|v_r \wedge v_{r_1}\| \neq 0$ per il teorema 1-(viii) della sezione 1.10. Posso dunque concludere che il sistema ammette un'unica soluzione, data dalla coppia (t, t_1), dalla cui esistenza e unicità segue quella dei punti N e N_1. □

Definizione 10. Siano $r, r_1 \subseteq E$ due rette sghembe e siano $\mathrm{N} \in r$, $\mathrm{N}_1 \in r_1$ tali che $\overrightarrow{\mathrm{NN}_1} \perp r$, $\overrightarrow{\mathrm{NN}_1} \perp r_1$. La retta passante per N e per N_1 si dice la *perpendicolare comune a r e a r_1*. La *distanza di r da r_1* è

$$\mathrm{d}(r, r_1) := \|\overrightarrow{\mathrm{NN}_1}\|$$

La definizione 10 è ben posta per l'osservazione 8, che garantisce esistenza e unicità dei punti N e N_1.

Osservazione 9. Siano $r, r_1 \subseteq E$ due rette sghembe, $v_r = li + mj + nk$, $v_{r_1} = l_1 i + m_1 j + n_1 k$ vettori di direzione di r e di r_1 rispettivamente e siano $\mathrm{Q} \in r$, $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}(a, b, c)$, $\mathrm{Q}_1 \in r_1$, $\mathrm{Q}_1 = \mathrm{Q}_1(a_1, b_1, c_1)$. Allora

$$\mathrm{d}(r, r_1) = \frac{|\langle \overrightarrow{\mathrm{QQ}_1}, v_r \wedge v_{r_1} \rangle|}{\|v_r \wedge v_{r_1}\|} = \frac{\left| \det \begin{pmatrix} a - a_1 & b - b_1 & c - c_1 \\ l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} m & n \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l & n \\ l_1 & n_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l & m \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix}^2}}$$

Dimostrazione. Siano $\mathrm{N} \in r$, $\mathrm{N}_1 \in r_1$ tali che $\overrightarrow{\mathrm{NN}_1} \perp r$, $\overrightarrow{\mathrm{NN}_1} \perp r_1$. Dato che r e r_1 sono rette sghembe per ipotesi, i vettori v_r e v_{r_1} sono linearmente indipendenti e quindi $\overrightarrow{\mathrm{NN}_1}$ è un multiplo scalare di $v_r \wedge v_{r_1}$ in virtù del corollario 1-(ix) della sezione 1.10. Inoltre, si ha che $v_r \wedge v_{r_1} \neq \mathbf{0}$ e ha dunque senso definire

$$n := \frac{v_r \wedge v_{r_1}}{\|v_r \wedge v_{r_1}\|}$$

Per costruzione, anche n è un multiplo scalare di $v_r \wedge v_{r_1}$ e quindi $\overrightarrow{\mathrm{NN}_1} \in \langle n \rangle$. D'altra parte, vale che $\mathbf{0} \perp n$ perché, ovviamente, il vettore nullo è ortogonale a tutti i vettori di V (osservazione 3, sezione 1.7). Ma allora $\overrightarrow{\mathrm{NN}_1}$ è la proiezione ortogonale di se stesso su $\langle n \rangle$ perché soddisfa la relazione $\overrightarrow{\mathrm{NN}_1} = \overrightarrow{\mathrm{NN}_1} + \mathbf{0}$ dove $\overrightarrow{\mathrm{NN}_1} \in \langle n \rangle$, $\mathbf{0} \in n^{\perp}$ (definizione 2, sezione 1.8). Ricordando che n è un versore, dall'osservazione 4 della sezione 1.8 e dall'unicità della proiezione ortogonale segue che

$$\overrightarrow{\mathrm{NN}_1} = a_n(\overrightarrow{\mathrm{NN}_1})n = \frac{\langle n, \overrightarrow{\mathrm{NN}_1} \rangle}{\langle n, n \rangle} n = \langle n, \overrightarrow{\mathrm{NN}_1} \rangle n$$

Ora osservo che $\overrightarrow{\mathrm{QN}} \in \langle v_r \rangle$ perché $\mathrm{Q}, \mathrm{N} \in r$. Analogamente, $\overrightarrow{\mathrm{N}_1\mathrm{Q}_1} \in \langle v_{r_1} \rangle$ in quanto $\mathrm{N}_1, \mathrm{Q}_1 \in r_1$. A questo punto, essendo n un multiplo scalare di $v_r \wedge v_{r_1}$, si ha che $n \perp \overrightarrow{\mathrm{QN}}$, $n \perp \overrightarrow{\mathrm{N}_1\mathrm{Q}_1}$ e quindi

$$\langle n, \overrightarrow{\mathrm{QQ}_1} \rangle = \langle n, \overrightarrow{\mathrm{QN}} + \overrightarrow{\mathrm{NN}_1} + \overrightarrow{\mathrm{N}_1\mathrm{Q}_1} \rangle = \langle n, \overrightarrow{\mathrm{QN}} \rangle + \langle n, \overrightarrow{\mathrm{NN}_1} \rangle + \langle n, \overrightarrow{\mathrm{N}_1\mathrm{Q}_1} \rangle = \langle n, \overrightarrow{\mathrm{NN}_1} \rangle$$

Ricordando ancora che n è un versore, posso dunque concludere che

$$\mathrm{d}(r, r_1) = \|\overrightarrow{\mathrm{NN}_1}\| = \|\langle n, \overrightarrow{\mathrm{NN}_1} \rangle n\| = |\langle n, \overrightarrow{\mathrm{NN}_1} \rangle| = |\langle n, \overrightarrow{\mathrm{QQ}_1} \rangle| = \frac{|\langle \overrightarrow{\mathrm{QQ}_1}, v_r \wedge v_{r_1} \rangle|}{\|v_r \wedge v_{r_1}\|}$$ □

Osservazione 10. Siano $r, r_1 \subseteq E$ due rette sghembe, $v_r = li + mj + nk$, $v_{r_1} = l_1 i + m_1 j + n_1 k$ vettori di direzione di r e di r_1 rispettivamente, $\mathrm{Q} \in r$, $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}(a, b, c)$, $\mathrm{Q}_1 \in r_1$, $\mathrm{Q}_1 = \mathrm{Q}_1(a_1, b_1, c_1)$ e siano

$$\alpha = \begin{vmatrix} m & n \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}, \quad \beta = -\begin{vmatrix} l & n \\ l_1 & n_1 \end{vmatrix}, \quad \gamma = \begin{vmatrix} l & m \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix}$$

Allora la perpendicolare comune a r e a r_1 ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} X-a & Y-b & Z-c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} X-a_1 & Y-b_1 & Z-c_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Dimostrazione. Innanzitutto, si osservi che α, β, γ sono le componenti del vettore $v_r \wedge v_{r_1}$ nella base ortonormale $\{i, j, k\}$. Ora, detta s la perpendicolare comune a r e a r_1, si vuole mostrare che ogni punto di s verifica il sistema (3). Sia dunque $\mathrm{P} \in s$, $\mathrm{P} = \mathrm{P}(x, y, z)$. Siano inoltre $\mathrm{N} \in r$, $\mathrm{N}_1 \in r_1$ tali che $\overrightarrow{\mathrm{NN}_1} \perp r$, $\overrightarrow{\mathrm{NN}_1} \perp r_1$. Per definizione so che $\mathrm{N}, \mathrm{N}_1 \in s$ e $\mathrm{N} \neq \mathrm{N}_1$ perché r e r_1 sono sghembe, quindi $\overrightarrow{\mathrm{NN}_1}$ è un vettore di direzione di s. D'altra parte, come si è visto nella dimostrazione dell'osservazione 9, $\overrightarrow{\mathrm{NN}_1}$ è un multiplo scalare di $v_r \wedge v_{r_1}$ e di conseguenza anche $v_r \wedge v_{r_1}$ è un vettore di direzione di s. A questo punto osservo che r e s sono complanari perché incidenti nel punto N, dunque vale la relazione

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$$

Ragionando allo stesso modo sulle rette r_1 e s si dimostra che le coordinate del punto P verificano anche l'altra equazione del sistema. Ora si vuole mostrare che lo spazio delle soluzioni del sistema (3) definisce una retta affine. Siano dunque p e p_1 i piani definiti dalle due equazioni del sistema. Suppongo per assurdo che $p \parallel p_1$. Essendo p e p_1 sottospazi affini di uguale dimensione, la condizione $p \parallel p_1$ equivale a richiedere che p e p_1 condividano una stessa giacitura $W \subseteq V$. Sia dunque v_p un vettore normale a p e a p_1. Osservo che $r, s \subseteq p$. Infatti, fissato $\mathrm{P} \in r$, $\mathrm{P} = \mathrm{P}(x, y, z)$, il vettore $(x-a, y-b, z-c)$ è un multiplo di v_r, mentre un qualsiasi punto $\mathrm{P} \in s$, $\mathrm{P} = \mathrm{P}(x, y, z)$ è tale che $(x-a, y-b, z-c)$ sia una combinazione lineare di v_r e di $v_r \wedge v_{r_1}$. In ambo i casi, quindi, il determinante che compare nell'equazione di p si annulla. Appurato che $r, s \subseteq p$, posso affermare che $v_r, v_r \wedge v_{r_1} \in W$. Di conseguenza, vale che $v_p \perp v_r$, $v_p \perp (v_r \wedge v_{r_1})$ in quanto $v_p \in W^\perp$. Applicando un ragionamento analogo, si dimostra che $r_1, s \subseteq p_1$. In particolare, si ha che $v_{r_1} \in W$ e quindi $v_p \perp v_{r_1}$. Ma allora v_p è un multiplo scalare di $v_r \wedge v_{r_1}$ per il corollario 1-(ix) della sezione 1.10 e ciò equivale a dire che $\exists\, c \in \mathbb{R} \mid v_p = c(v_r \wedge v_{r_1})$. Da quanto ottenuto prima si ricava quindi che $(v_r \wedge v_{r_1}) \perp (v_r \wedge v_{r_1})$, cioè che $v_r \wedge v_{r_1} = \mathbf{0}$. Equivalentemente, per il teorema 1-(viii) della sezione 1.10, si ha che $v_r \parallel v_{r_1}$, ma questo contraddice l'ipotesi che r e r_1 siano sghembe. Posso dunque affermare che $p \nparallel p_1$ e, siccome l'intersezione di due piani non paralleli in uno spazio affine di dimensione 3 è una retta, posso concludere che la perpendicolare comune a r e a r_1 ha equazioni cartesiane (3). □

1.14 Operatori unitari

Definizione 1. Sia V uno spazio vettoriale euclideo. Un operatore lineare T di V si dice *unitario* se

$$\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall\, v, w \in V$$

Osservazione 1. Siano V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita $n \geq 1$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormale di V e sia $v \in V$, $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. Allora $x_i = \langle v, e_i \rangle$ per ogni $1 \leq i \leq n$.

Dimostrazione. Fissato un indice $1 \leq i \leq n$, basta osservare che

$$\langle v, e_i \rangle = \langle x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n, e_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \langle e_j, e_i \rangle = x_i$$ □

Teorema 1 (Prima caratterizzazione dell'operatore unitario)**.** *Sia V uno spazio vettoriale euclideo e sia $T\colon V \to V$ un'applicazione. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(i) *T è un operatore unitario di V.*

(ii) *T è un operatore lineare di V tale che $\|T(v)\| = \|v\|$ per ogni $v \in V$.*

Inoltre, se $\dim V < \infty$, allora le seguenti condizioni sono equivalenti a (i) *e* (ii)*:*

(iii) *$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e $\|T(v) - T(w)\| = \|v - w\|$ per ogni $v, w \in V$.*

(iv) *T è un operatore lineare di V e, scelta arbitrariamente una base ortonormale $\{e_1, \dots, e_n\}$ di V, si ha che $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ è una base ortonormale di V.*

(v) *T è un operatore lineare di V ed esiste almeno una base ortonormale $\{e_1, \dots, e_n\}$ di V tale che $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ sia una base ortonormale di V.*

Dimostrazione. Innanzitutto, dimostro l'equivalenza di (i) e (ii). Ovviamente (i) $\Longrightarrow$ (ii). Infatti, se T è un operatore unitario di V, allora è lineare per definizione e per ogni $v \in V$ si ha che

$$\|T(v)\| = \sqrt{\langle T(v), T(v) \rangle} = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \|v\|$$

Dimostro che (ii) $\Longrightarrow$ (i). Siano $v, w \in V$. Assunta la condizione (ii), valgono le seguenti implicazioni:

$$\begin{aligned}
&\|T(v+w)\| = \|v+w\| \\
&\quad\Longrightarrow \|T(v+w)\|^2 = \|v+w\|^2 \\
&\quad\Longrightarrow \langle T(v+w), T(v+w) \rangle = \langle v+w, v+w \rangle \text{ per definizione di norma} \\
&\quad\Longrightarrow \langle T(v)+T(w), T(v)+T(w) \rangle = \langle v+w, v+w \rangle \text{ per linearità} \\
&\quad\Longrightarrow \langle T(v), T(v) \rangle + 2\langle T(v), T(w) \rangle + \langle T(w), T(w) \rangle = \langle v, v \rangle + 2\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle \\
&\quad\Longrightarrow \|T(v)\|^2 + 2\langle T(v), T(w) \rangle + \|T(w)\|^2 = \|v\|^2 + 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2 \\
&\quad\Longrightarrow 2\langle T(v), T(w) \rangle = 2\langle v, w \rangle \text{ per la condizione (ii)} \\
&\quad\Longrightarrow \langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle
\end{aligned}$$

Dunque T è un operatore unitario per definizione. Ora assumo che $\dim V < \infty$ e mostro che le condizioni (iii), (iv) e (v) sono equivalenti a (i) e (ii). Ovviamente (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Infatti, se T è un operatore lineare di V, allora $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e per ogni $v, w \in V$ si ha che

$$\|T(v) - T(w)\| = \|T(v-w)\| = \|v - w\|$$

Ora mi occupo di mostrare che (iii) $\Longrightarrow$ (ii). Innanzitutto osservo che, per ogni $v \in V$, vale la relazione

$$\|T(v)\| = \|T(v) - \mathbf{0}\| = \|T(v) - T(\mathbf{0})\| = \|v - \mathbf{0}\| = \|v\| \tag{4}$$

Resta da dimostrare che T è un operatore lineare di V. Siano quindi $v, w \in V$. Avendo assunto la condizione (iii), valgono le seguenti implicazioni:

$$\begin{aligned}
&\|T(v) - T(w)\| = \|v - w\| \\
&\quad\Longrightarrow \|T(v) - T(w)\|^2 = \|v - w\|^2 \\
&\quad\Longrightarrow \langle T(v) - T(w), T(v) - T(w) \rangle = \langle v - w, v - w \rangle \text{ per definizione di norma} \\
&\quad\Longrightarrow \langle T(v), T(v) \rangle - 2\langle T(v), T(w) \rangle + \langle T(w), T(w) \rangle = \langle v, v \rangle - 2\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle \\
&\quad\Longrightarrow \|T(v)\|^2 - 2\langle T(v), T(w) \rangle + \|T(w)\|^2 = \|v\|^2 - 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2 \\
&\quad\Longrightarrow -2\langle T(v), T(w) \rangle = -2\langle v, w \rangle \text{ per la relazione (4)} \\
&\quad\Longrightarrow \langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle \qquad (5)
\end{aligned}$$

In virtù del corollario 1 della sezione 1.7 esiste almeno una base ortonormale di V perché, per ipotesi, si ha che $\dim V < \infty$. Sia dunque $\{e_1, \dots, e_n\}$ una qualsiasi base ortonormale di V. Dalla relazione (5) segue che, per ogni $1 \leq i, j \leq n$, vale la relazione

$$\langle T(e_i), T(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

Di conseguenza, $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ è una base ortonormale di V. A questo punto, dall'osservazione 1 e dalla relazione (5) segue che, per ogni $v \in V$, $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, vale la relazione

$$\begin{aligned} T(v) &= \langle T(v), T(e_1) \rangle T(e_1) + \dots + \langle T(v), T(e_n) \rangle T(e_n) \\ &= \langle v, e_1 \rangle T(e_1) + \dots + \langle v, e_n \rangle T(e_n) \\ &= x_1 T(e_1) + \dots + x_n T(e_n) \end{aligned} \tag{6}$$

Ma allora, fissati in maniera arbitraria $v, w \in V$, $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $w = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$, $c, c' \in \mathbb{R}$, in virtù della relazione (6) si ha che

$$\begin{aligned} T(cv + c'w) &= (cx_1 + c'y_1) T(e_1) + \dots + (cx_n + c'y_n) T(e_n) \\ &= c\big(x_1 T(e_1) + \dots + x_n T(e_n)\big) + c'\big(y_1 T(e_1) + \dots + y_n T(e_n)\big) \\ &= cT(v) + c'T(w) \end{aligned}$$

Posso quindi concludere che T è lineare. Con lo stesso procedimento si è dimostrato che (iii) $\Longrightarrow$ (iv), mentre è ovvio che (iv) $\Longrightarrow$ (v). Dimostro infine che (v) $\Longrightarrow$ (i). Per ipotesi, è nota l'esistenza di una base ortonormale $\{e_1, \dots, e_n\}$ di V tale che $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ sia anch'essa una base ortonormale di V. Siano $v, w \in V$, $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $w = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$. Ricordando che T è un operatore lineare di V per ipotesi, si ricava la relazione

$$\begin{aligned} \langle T(v), T(w) \rangle &= \langle x_1 T(e_1) + \dots + x_n T(e_n), y_1 T(e_1) + \dots + y_n T(e_n) \rangle \\ &= \sum_{1 \le i,j \le n} x_i y_j \langle T(e_i), T(e_j) \rangle = \sum_{1 \le i \le n} x_i y_i = \sum_{1 \le i,j \le n} x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \langle x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \rangle = \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

In conclusione, T è un operatore unitario di V e l'equivalenza delle cinque affermazioni è dimostrata. □

Osservazione 2. La condizione (iii) del teorema 1 può essere interpretata come una condizione su V inteso come spazio euclideo su se stesso. Essa, infatti, afferma che T mappa l'origine in se stessa e rispetta le distanze, senza supporre a priori che T sia un'applicazione lineare.

Osservazione 3. La condizione (ii) del teorema 1 afferma che T conserva la norma dei vettori. Da ciò segue che se T è un operatore unitario di V e $\dim V < \infty$, allora T è un automorfismo di V.

Dimostrazione. Fissato $v \in N(T)$, si ha che $T(v) = \mathbf{0}$. Dalla non degenerazione della norma segue che $\|T(v)\| = 0$ e, in virtù del teorema 1-(ii), anche $\|v\| = 0$. Ma allora $v = \mathbf{0}$ per la non degenerazione della norma e dall'arbitrarietà nella scelta di v segue che $N(T) = \{\mathbf{0}\}$. Di conseguenza, T è un'operatore lineare iniettivo e, per un corollario del teorema di rango-nullità valido se dominio e codominio dell'applicazione lineare hanno dimensione finita e uguale, posso concludere che T è un automorfismo di V. □

Osservazione 4. Sia V uno spazio vettoriale euclideo. Si dimostra facilmente che l'applicazione inversa di un operatore unitario e la composizione di due operatori unitari sono ancora operatori unitari.

Definizione 2. Sia V uno spazio vettoriale euclideo. Si dice *gruppo ortogonale di* V l'insieme

$$\mathrm{O}(V) := \big\{\, T \in \mathrm{End}(V) \;\big|\; T \text{ è unitario} \,\big\}$$

Osservazione 5. Sia V uno spazio vettoriale euclideo. L'applicazione id_V è banalmente un operatore unitario di V. Dall'osservazione 4 segue dunque che $\mathrm{O}(V)$ è un sottogruppo di $\mathrm{GL}(V)$.

Corollario 1. *Siano V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita $n \ge 1$, $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormale di V e sia $T \in \mathrm{End}(V)$. Allora $T \in \mathrm{O}(V)$ se e solo se $\mathrm{M}_e(T) \in \mathrm{O}(n)$. Inoltre, la mappa*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{M}_e\colon & \mathrm{GL}(V) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ & F & \longmapsto & \mathrm{M}_e(F) \end{array}$$

induce un isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{O}(V) & \longrightarrow & \mathrm{O}(n) \\ T & \longmapsto & \mathrm{M}_e(T) \end{array}$$

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare la prima parte dell'enunciato, perché la seconda è conseguenza immediata della prima. Sia $A = \mathrm{M}_e(T)$. Poiché le colonne $A_{(1)}, \ldots, A_{(n)}$ di A sono i vettori delle componenti di $T(e_1), \ldots, T(e_n)$ nella base e, ricordando che rispetto a una base ortonormale il prodotto scalare di due vettori coincide con il prodotto scalare standard dei vettori delle loro coordinate, si ha che

$$
\begin{aligned}
T \in \mathrm{O}(V) &\iff \{T(e_1), \ldots, T(e_n)\} \text{ è una base ortonormale di } V \text{ (teorema 1-(iv))} \\
&\iff \langle T(e_i), T(e_j) \rangle = \delta_{ij} \text{ per ogni } 1 \leq i, j \leq n \\
&\iff A_{(i)} \cdot A_{(j)} = \delta_{ij} \text{ per ogni } 1 \leq i, j \leq n \\
&\iff {}^t A^{(i)} A_{(j)} = \delta_{ij} \text{ per ogni } 1 \leq i, j \leq n \\
&\iff {}^t A A = I_n \\
&\iff A \in \mathrm{O}(n)
\end{aligned}
$$

Inoltre osservo che, quando si assume $T \in \mathrm{O}(V)$, l'ultima implicazione è giustificata in quanto

$$\det {}^t A \det A = \det {}^t A A = \det I_n = 1$$

In particolare, $\det A \neq 0$ e quindi $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. ☐

Osservazione 6. Se V è uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita e $T \in \mathrm{O}(V)$, allora $\det T = \pm 1$.

Dimostrazione. Per il corollario 1 della sezione 1.7 esiste una base ortonormale $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ di V, perché $\dim V < \infty$ per ipotesi. Sia quindi $A := \mathrm{M}_e(T)$. Poiché il determinante di un'applicazione lineare è per definizione il determinante di una sua matrice associata rispetto a una qualunque base, si ha che

$$
\begin{aligned}
T \in \mathrm{O}(V) &\implies A \in \mathrm{O}(n) \text{ per il corollario 1} \\
&\implies {}^t A A = I_n \text{ per definizione di matrice ortogonale} \\
&\implies (\det A)^2 = \det {}^t A \det A = \det {}^t A A = \det I_n = 1 \\
&\implies \det A = \pm 1 \\
&\implies \det T = \pm 1
\end{aligned}
$$

☐

Definizione 3. Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita. Un operatore $T \in \mathrm{O}(V)$ si dice *speciale* se $\det T = 1$. Inoltre, l'insieme

$$\mathrm{SO}(V) := \left\{ T \in \mathrm{O}(V) \;\middle|\; T \text{ è speciale} \right\}$$

si dice *gruppo ortogonale speciale di* V (o *gruppo delle rotazioni di* V).

Definizione 4. Una matrice $A \in \mathrm{O}(n)$ si dice *speciale* se $\det A = 1$. Inoltre, l'insieme

$$\mathrm{SO}(n) := \left\{ A \in \mathrm{O}(n) \;\middle|\; A \text{ è speciale} \right\}$$

si dice *gruppo ortogonale speciale di ordine* n.

Osservazione 7. Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita. Si dimostra che $\mathrm{SO}(V)$ è un sottogruppo di $\mathrm{O}(V)$ isomorfo a $\mathrm{SO}(n)$.

Corollario 2. *Sia V uno spazio vettoriale euclideo e sia T un operatore unitario di V. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di T, allora $\lambda = \pm 1$.*

Dimostrazione. Per definizione, se λ è un autovalore di T allora $\exists\, v \in V$, $v \neq \mathbf{0} \mid T(v) = \lambda v$. Dall'omogeneità della norma (sezione 1.7, proposizione 1-N2) e dal teorema 1-(ii) segue che

$$\|v\| = \|T(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

Siccome $v \neq \mathbf{0}$, anche $\|v\| \neq 0$ per la non degenerazione della norma (sezione 1.7, proposizione 1-N1). Ma allora posso dividere entrambi i membri dell'equazione ottenuta per $\|v\|$, ottenendo che $|\lambda| = 1$. Posso quindi concludere che $\lambda = \pm 1$. ☐

1.15 Operatori aggiunti

Proposizione 1. *Siano V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita $n \geq 1$, $F \in \mathrm{End}(V)$. Allora*

$$\exists!\, G \in \mathrm{End}(V) \;\big|\; \langle F(v), w \rangle = \langle v, G(w) \rangle \quad \forall\, v, w \in V$$

Dimostrazione. Innanzitutto, per ogni $w \in V$ l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} F_w\colon & V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \longmapsto & \langle F(v), w \rangle \end{array}$$

è un funzionale lineare di V. Infatti, fissati $v, v' \in V$, $c, c' \in \mathbb{R}$, si verifica facilmente, sfruttando la linearità di F e la bilinearità del prodotto scalare, che vale la relazione

$$\begin{aligned} F_w(cv + c'v') &= \langle F(cv + c'v'), w \rangle \\ &= \langle cF(v) + c'F(v'), w \rangle \\ &= c\langle F(v), w \rangle + c'\langle F(v'), w \rangle \\ &= cF_w(v) + c'F_w(v') \end{aligned}$$

Sia ora b il prodotto scalare assegnato su V. Siccome b è non degenere, per la proposizione 1-(iv) della sezione 1.3 so che l'applicazione δ_b è un isomorfismo e da questo segue che

$$\exists!\, w' \in V \;\big|\; \delta_b(w') = F_w$$

Ma allora, per ogni $v \in V$, vale che $\delta_b(w')(v) = F_w(v)$. Dato che b è una forma bilineare simmetrica, la relazione precedente equivale a dire che $b(v, w') = \langle F(v), w \rangle$ cioè, tornando a utilizzare la notazione usuale per prodotti scalari, si ha che $\langle v, w' \rangle = \langle F(v), w \rangle$. Posso dunque definire $G\colon V \to V$ come l'applicazione tale che, per ogni $v, w \in V$, $G(w)$ sia l'unico elemento di V per cui valga

$$\langle F(v), w \rangle = \langle v, G(w) \rangle$$

L'unicità dell'applicazione G segue quindi dal fatto che δ_b è un isomorfismo, ma si può dimostrare, alternativamente, come segue. Sia $G'\colon V \to V$ una qualsiasi applicazione tale che $\langle F(v), w \rangle = \langle v, G'(w) \rangle$ per ogni $v, w \in V$. Poiché $\dim V < \infty$ per ipotesi, l'esistenza di una base ortonormale $\{e_1, \ldots, e_n\}$ di V è garantita dal corollario 1 della sezione 1.7. Fissato un indice $1 \leq i \leq n$, vale per ogni $w \in V$ la relazione

$$\langle e_i, G'(w) \rangle = \langle F(e_i), w \rangle = \langle e_i, G(w) \rangle$$

Ora dato che, rispetto a una base ortonormale, il prodotto scalare assegnato su V coincide con il prodotto scalare standard delle componenti, posso affermare che $G(w) = G'(w)$ per arbitrarietà nella scelta dell'indice $1 \leq i \leq n$. Ma allora $G = G'$, in quanto la relazione precedente non dipende da una particolare scelta di $w \in V$. Resta da dimostrare che G è un operatore lineare. Siano quindi $w_1, w_2 \in V$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Fissato un indice $1 \leq i \leq n$, osservo che

$$\begin{aligned} \langle e_i, G(c_1w_1 + c_2w_2) \rangle &= \langle F(e_i), c_1w_1 + c_2w_2 \rangle \\ &= c_1\langle F(e_i), w_1 \rangle + c_2\langle F(e_i), w_2 \rangle \\ &= c_1\langle e_i, G(w_1) \rangle + c_2\langle e_i, G(w_2) \rangle \\ &= \langle e_i, c_1G(w_1) + c_2G(w_2) \rangle \end{aligned}$$

Ma allora, riapplicando lo stesso ragionamento di prima, si ha che $G(c_1w_1 + c_2w_2) = c_1G(w_1) + c_2G(w_2)$ e quindi posso concludere che G è un operatore lineare di V. $\square$

Definizione 1. Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita e sia $F \in \mathrm{End}(V)$. L'unico operatore lineare G di V tale che $\langle F(v), w \rangle = \langle v, G(w) \rangle$ per ogni $v, w \in V$ si dice l'*operatore aggiunto* (o *trasposto*) *di* F e si denota ${}^tF$.

La definizione 1 è ben posta in virtù della proposizione 1, che garantisce esistenza e unicità di G.

Osservazione 1. Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita e sia $F \in \mathrm{End}(V)$. Si dimostra facilmente che l'operatore trasposto di ${}^tF$ è F.

Osservazione 2. Siano V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita, $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormale di V, $F \in \mathrm{End}(V)$ e sia $A = \mathrm{M}_e(F)$. Allora ${}^tA = \mathrm{M}_e({}^tF)$.

Dimostrazione. Innanzitutto, suppongo che $A = (a_{ij})$ e che $B = \mathrm{M}_e({}^tF)$, $B = (b_{ij})$. Poi, per semplificare la notazione, pongo $I := I_n$. Dalla definizione 1 segue che, per ogni $1 \leq i, j \leq n$, vale la relazione

$$\langle F(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, {}^tF(e_j) \rangle$$

Come si è già visto più volte nelle dimostrazioni precedenti, rispetto a una base ortonormale il prodotto scalare di due vettori coincide con il prodotto scalare standard delle loro coordinate. Osservo che, nella base e, $A_{(i)}$ è il vettore delle componenti di $F(e_i)$, mentre $B_{(j)}$ è il vettore delle componenti di ${}^tF(e_j)$. Ma allora dalla relazione precedente si ottiene che

$$a_{ji} = A_{(i)} \cdot I_{(j)} = \langle F(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, {}^tF(e_j) \rangle = I_{(i)} \cdot B_{(j)} = b_{ij}$$

Dunque, per arbitrarietà nella scelta di $1 \leq i, j \leq n$, posso concludere che ${}^tA = B$. □

L'osservazione 2 giustifica la terminologia introdotta per denotare gli operatori aggiunti.

Definizione 2. Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita. Un operatore lineare F di V si dice *simmetrico* (o *autoaggiunto*) se $F = {}^tF$, *antisimmetrico* se $F = -{}^tF$.

Proposizione 2 (Seconda caratterizzazione dell'operatore unitario)**.** *Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita $n \geq 1$ e sia $T \in \mathrm{End}(V)$. Allora $T \in \mathrm{O}(V)$ se e solo se ${}^tT \circ T = \mathrm{id}_V$.*

Dimostrazione. Innanzitutto, osservo che $T \in \mathrm{O}(V)$ se e solo se, per ogni $v, w \in V$, vale che

$$\langle v, w \rangle = \langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, {}^tT\big(T(w)\big) \rangle = \langle v, ({}^tT \circ T)(w) \rangle$$

Da tale relazione si deduce immediatamente che, se ${}^tT \circ T = \mathrm{id}_V$, allora $T \in \mathrm{O}(V)$. Ora, per dimostrare l'altra implicazione, utilizzo l'ipotesi che $\dim V < \infty$ per affermare l'esistenza di una base ortonormale $\{e_1, \dots, e_n\}$ di V. Dato che $T \in \mathrm{O}(V)$, nella relazione precedente si può prendere $v := e_i$ al variare dell'indice $1 \leq i \leq n$. Così facendo, infatti, ottengo che $w = ({}^tT \circ T)(w)$ e, siccome ciò non dipende da una particolare scelta di $w \in V$, posso concludere che ${}^tT \circ T = \mathrm{id}_V$. □

1.16 Isomorfismi tra spazi affini

Definizione 1. Siano A uno spazio affine su V e A' uno spazio affine su V'. Un'applicazione $f\colon A \to A'$ si dice un *isomorfismo di A su A'* se $\exists\, \varphi\colon V \to V'$ isomorfismo di spazi vettoriali tale che

$$\overrightarrow{f(\mathrm{P})f(\mathrm{Q})} = \varphi(\overrightarrow{\mathrm{PQ}})$$

per ogni $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in A$. L'applicazione φ si dice l'*isomorfismo associato a f*.

Osservazione 1. Siano A, A' spazi affini. Ogni isomorfismo di A su A' è un'applicazione biiettiva.

Dimostrazione. Sia $f\colon A \to A'$ un isomorfismo di spazi affini e sia $\varphi\colon V \to V'$ l'isomorfismo di spazi vettoriali associato a f. Innanzitutto, dimostro che f è iniettiva. Siano dunque $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in A$ due punti qualsiasi tali che $f(\mathrm{P}) = f(\mathrm{Q})$. Allora valgono le seguenti implicazioni:

$$\begin{aligned}
&f(\mathrm{P}) = f(\mathrm{Q}) \\
&\qquad \implies \mathrm{d}\big(f(\mathrm{P}), f(\mathrm{Q})\big) = 0 && \text{per la non degenerazione della distanza} \\
&\qquad \implies \|\overrightarrow{f(\mathrm{P})f(\mathrm{Q})}\| = 0 && \text{per definizione di distanza} \\
&\qquad \implies \|\varphi(\overrightarrow{\mathrm{PQ}})\| = 0 && \text{in virtù della definizione 1} \\
&\qquad \implies \varphi(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}) = \mathbf{0} && \text{per la non degenerazione della norma} \\
&\qquad \implies \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \mathbf{0} && \text{perché } \varphi \text{ è un'applicazione lineare e iniettiva} \\
&\qquad \implies \mathrm{P} = \mathrm{Q}
\end{aligned}$$

Di conseguenza, f è iniettiva. Ora sia $\mathrm{Q}' \in A'$. Poiché per ipotesi φ è un'applicazione suriettiva, fissato un qualsiasi punto $\mathrm{P} \in A$ esiste un vettore $v \in V$ tale che

$$\overrightarrow{f(\mathrm{P})\mathrm{Q}'} = \varphi(v)$$

Per il primo assioma degli spazi affini $\exists!\, \mathrm{Q} \in A \mid \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = v$ e quindi, ricordando la definizione 1, si ha che

$$\overrightarrow{f(\mathrm{P})f(\mathrm{Q})} = \varphi(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}) = \varphi(v) = \overrightarrow{f(\mathrm{P})\mathrm{Q}'}$$

Posso dunque affermare che $f(\mathrm{Q}) = \mathrm{Q}'$ ancora in virtù del primo assioma degli spazi affini. Avendo quindi mostrato che f è iniettiva e suriettiva, posso concludere che f è un'applicazione biiettiva. □

Definizione 2. Sia A uno spazio affine. Un isomorfismo f di A su se stesso si dice un'*affinità di A* e l'isomorfismo associato a f si dice[7] l'*automorfismo associato a f*. Inoltre, l'insieme

$$\mathrm{Aff}(A) := \left\{ f\colon A \to A \;\middle|\; f \text{ è un'affinità} \right\}$$

si dice *gruppo delle affinità di A*.

Osservazione 2. Sia A uno spazio affine. Si dimostra facilmente che $\mathrm{Aff}(A)$ è un gruppo.

Esempio 1. Sia A uno spazio affine su V. Si verifica facilmente che l'applicazione id_A è un'affinità con automorfismo associato id_V. Basta infatti osservare che, per ogni $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in A$, vale la relazione

$$\overrightarrow{\mathrm{id}_A(\mathrm{P})\mathrm{id}_A(\mathrm{Q})} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \mathrm{id}_V(\overrightarrow{\mathrm{PQ}})$$

Esempio 2. Sia A uno spazio affine su V e sia $v \in V$. L'applicazione

$$\begin{array}{rccl} t_v\colon & A & \longrightarrow & A \\ & \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{Q} \mid \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = v \end{array}$$

si dice la *traslazione definita da v* ed è un'affinità con automorfismo associato id_V. Prima di dimostrarlo, osservo che si tratta di un'applicazione ben definita per il primo assioma degli spazi affini. Dal secondo assioma degli spazi affini segue invece che, per ogni $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in A$, vale la relazione

$$\overrightarrow{t_v(\mathrm{P})t_v(\mathrm{Q})} = \overrightarrow{t_v(\mathrm{P})\mathrm{P}} + \overrightarrow{\mathrm{P}t_v(\mathrm{Q})} = -\overrightarrow{\mathrm{P}t_v(\mathrm{P})} + \overrightarrow{\mathrm{PQ}} + \overrightarrow{\mathrm{Q}t_v(\mathrm{Q})} = -v + \overrightarrow{\mathrm{PQ}} + v = \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \mathrm{id}_V(\overrightarrow{\mathrm{PQ}})$$

Di conseguenza, t_v è un'affinità con automorfismo associato id_V. Si osservi, inoltre, che l'applicazione id_A è la traslazione definita da $\mathbf{0}$.

Osservazione 3. Sia A uno spazio affine su V e sia $v \in V$. Allora l'applicazione inversa di t_v è t_{-v}.

Dimostrazione. Sia $\mathrm{P} \in A$ e sia $\mathrm{Q} = t_{-v}(\mathrm{P})$. Per definizione di traslazione definita da un vettore, vale la relazione $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = -v$ oppure, equivalentemente, $\overrightarrow{\mathrm{QP}} = v$. Ma allora deduco dal primo assioma degli spazi affini che $\mathrm{P} = t_v(\mathrm{Q})$. Ricordando come è stato definito Q, si ottiene che $\mathrm{P} = t_v\big(t_{-v}(\mathrm{P})\big)$ e, dall'arbitrarietà nella scelta di $\mathrm{P} \in A$, si deduce che $t_v \circ t_{-v} = \mathrm{id}_A$. Con un ragionamento del tutto analogo si dimostra anche che $t_{-v} \circ t_v = \mathrm{id}_A$, dunque posso concludere che t_{-v} è l'applicazione inversa di t_v. □

Definizione 3. Sia E uno spazio euclideo su V. Un'affinità di E si dice un'*isometria di E* se l'automorfismo associato è un operatore unitario di V.

Esempio 3. Sia E uno spazio euclideo su V. Ogni traslazione, compresa l'applicazione id_E, è un'isometria. Infatti l'automorfismo associato, cioè l'applicazione id_V, è banalmente un operatore unitario di V.

Osservazione 4. Sia E uno spazio euclideo su V e siano $f, g\colon E \to E$ due isometrie con automorfismi associati $\varphi, \psi\colon V \to V$ rispettivamente. Allora $f \circ g$ è un'isometria con automorfismo associato $\varphi \circ \psi$.

[7] In questo caso, ovviamente, l'isomorfismo associato a f è effettivamente un automorfismo.

Dimostrazione. Siano $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in E$. Ricordando la definizione 1, osservo che

$$\overrightarrow{(f \circ g)(\mathrm{P})(f \circ g)(\mathrm{Q})} = \overrightarrow{f\big(g(\mathrm{P})\big)f\big(g(\mathrm{Q})\big)} = \varphi\big(\overrightarrow{g(\mathrm{P})g(\mathrm{Q})}\big) = \varphi\big(\psi(\overrightarrow{\mathrm{PQ}})\big) = (\varphi \circ \psi)(\overrightarrow{\mathrm{PQ}})$$

A questo punto, dato che f e g sono isometrie, si ha che φ e ψ sono operatori unitari per definizione, ma allora anche $\varphi \circ \psi$ è un operatore unitario per l'osservazione 4 della sezione 1.14. In conclusione, quindi, posso affermare che $f \circ g$ è un'isometria con automorfismo associato $\varphi \circ \psi$. $\square$

Osservazione 5. Sia E uno spazio euclideo su V e sia $f : E \to E$ un'isometria con automorfismo associato $\varphi : V \to V$. Allora f^{-1} è un'isometria con automorfismo associato φ^{-1}.

Dimostrazione. Innanzitutto, per l'osservazione 1 si ha che f è un'applicazione biiettiva. Dunque, fissati in maniera arbitraria $\mathrm{P}_1, \mathrm{Q}_1 \in E$ so che $\exists!\, \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in E$ tali che $f(\mathrm{P}) = \mathrm{P}_1$, $f(\mathrm{Q}) = \mathrm{Q}_1$. Dato che f è invertibile posso affermare, in maniera del tutto equivalente, che $f^{-1}(\mathrm{P}_1) = \mathrm{P}$, $f^{-1}(\mathrm{Q}_1) = \mathrm{Q}$. Inoltre, siccome anche φ è una corrispondenza biunivoca, quindi invertibile, dalla definizione 1 ottengo che $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \varphi^{-1}\big(\overrightarrow{f(\mathrm{P})f(\mathrm{Q})}\big)$. Di conseguenza, alla luce di queste osservazioni, posso affermare che

$$\overrightarrow{f^{-1}(\mathrm{P}_1)f^{-1}(\mathrm{Q}_1)} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \varphi^{-1}\big(\overrightarrow{f(\mathrm{P})f(\mathrm{Q})}\big) = \varphi^{-1}(\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1})$$

Infine, dal momento che f è per ipotesi un'isometria, si ha per definizione che l'automorfismo φ associato a f è un operatore unitario. Ma allora dall'osservazione 4 della sezione 1.14 segue che anche φ^{-1} è un operatore unitario, dunque posso concludere che f^{-1} è un'isometria con automorfismo associato φ^{-1}. $\square$

Le osservazioni 4 e 5 valgono anche nel caso più generale delle affinità. Infatti, le dimostrazioni date nel caso particolare delle isometrie possono essere adattate al caso delle affinità eliminando le considerazioni finali sulla natura unitaria dell'automorfismo associato.

Definizione 4. Sia E uno spazio euclideo. Si dice *gruppo delle isometrie di E* l'insieme

$$\mathrm{Isom}(E) := \big\{\, f : E \to E \;\big|\; f \text{ è un'isometria} \,\big\}$$

Osservazione 6. Sia E uno spazio euclideo. Dall'esempio 3 e dalle osservazioni 4 e 5 segue immediatamente che $\mathrm{Isom}(E)$ è un sottogruppo di $\mathrm{Aff}(E)$.

Definizione 5. Sia E uno spazio euclideo. I sottogruppi di $\mathrm{Isom}(E)$ si dicono *gruppi di isometrie di E*.

La definizione 5 è ben posta perché $\mathrm{Isom}(E)$ è un gruppo in virtù dell'osservazione 6.

Definizione 6. Sia A uno spazio affine e sia $\mathrm{O} \in A$. L'insieme

$$\mathrm{Aff}_{\mathrm{O}}(A) := \big\{\, f \in \mathrm{Aff}(A) \;\big|\; f(\mathrm{O}) = \mathrm{O} \,\big\}$$

si dice *gruppo delle affinità di A che fissano* O (oppure *stabilizzatore di* O *in* A).

Osservazione 7. Sia A uno spazio affine e sia $\mathrm{O} \in A$. Si dimostra che $\mathrm{Aff}_{\mathrm{O}}(A)$ è un sottogruppo di $\mathrm{Aff}(A)$.

Definizione 7. Sia E uno spazio euclideo e sia $\mathrm{O} \in E$. L'insieme

$$\mathrm{Isom}_{\mathrm{O}}(E) := \big\{\, f \in \mathrm{Isom}(E) \;\big|\; f(\mathrm{O}) = \mathrm{O} \,\big\}$$

si dice *gruppo delle isometrie di E che fissano* O (oppure *stabilizzatore di* O *in* E).

Osservazione 8. Sia E uno spazio euclideo e sia $\mathrm{O} \in E$. Come nel caso più generale delle affinità, si può dimostrare che $\mathrm{Isom}_{\mathrm{O}}(E)$ è un sottogruppo di $\mathrm{Isom}(E)$.

Definizione 8. Sia E uno spazio euclideo su V e sia $f : E \to E$ un'isometria con automorfismo associato $\varphi : V \to V$. L'isometria f si dice *diretta* se $\det \varphi = 1$, *inversa* se $\det \varphi = -1$. Inoltre, l'insieme

$$\mathrm{Isom}^+(E) := \big\{\, f \in \mathrm{Isom}(E) \;\big|\; f \text{ è diretta} \,\big\}$$

si dice *gruppo delle isometrie dirette di E*.

Osservazione 9. Sia E uno spazio euclideo. Si dimostra che $\mathrm{Isom}^+(E)$ è un sottogruppo di $\mathrm{Isom}(E)$.

Definizione 9. Sia E uno spazio euclideo e sia $\mathrm{O} \in E$. Un'isometria diretta di E che fissa O si dice una *rotazione di centro* O *in* E. Inoltre, si dice *gruppo delle rotazioni di centro* O *in* E l'insieme

$$\mathrm{Rot}_{\mathrm{O}}(E) := \mathrm{Isom}_{\mathrm{O}}(E) \cap \mathrm{Isom}^+(E)$$

Osservazione 10. Sia E uno spazio euclideo e sia $\mathrm{O} \in E$. Come nei casi precedenti, si può dimostrare che $\mathrm{Rot}_{\mathrm{O}}(E)$ è un sottogruppo di $\mathrm{Isom}_{\mathrm{O}}(E)$ e di $\mathrm{Isom}^+(E)$.

Proposizione 1. *Sia A uno spazio affine su V e sia $\mathrm{O} \in A$. Allora esiste un isomorfismo di gruppi che mappa le affinità f di A che fissano O nei rispettivi automorfismi associati φ di V:*

$$\begin{array}{rccc} \Phi\colon & \mathrm{Aff}_{\mathrm{O}}(A) & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V) \\ & f & \longmapsto & \varphi \end{array}$$

Inoltre, se E è uno spazio euclideo su V e se $\mathrm{O} \in E$, allora Φ induce isomorfismi

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Isom}_{\mathrm{O}}(E) & \longrightarrow & \mathrm{O}(V) \\ \mathrm{Rot}_{\mathrm{O}}(E) & \longrightarrow & \mathrm{SO}(V) \end{array}$$

Infine, se $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ è una base ortonormale di V, allora la composizione $\mathrm{M}_e \circ \Phi$ induce isomorfismi

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Isom}_{\mathrm{O}}(E) & \longrightarrow & \mathrm{O}(n) \\ \mathrm{Rot}_{\mathrm{O}}(E) & \longrightarrow & \mathrm{SO}(n) \end{array}$$

Dimostrazione. Basta dimostrare la prima parte dell'enunciato, in quanto il resto segue banalmente da fatti già noti. Infatti, un'isometria è un'affinità che ha per automorfismo associato un operatore unitario (definizione 3), mentre una rotazione è una particolare isometria diretta, cioè un'affinità che ha per automorfismo associato un operatore unitario speciale (definizione 8). La parte finale dell'enunciato è invece una conseguenza immediata della parte precedente e del corollario 1 della sezione 1.14.

In effetti, è sufficiente dimostrare che Φ è una corrispondenza biunivoca. Infatti, Φ è banalmente un omomorfismo di gruppi in virtù dell'osservazione 4 (nella sua variante generalizzata al caso delle affinità). Siano quindi $f, g \in \mathrm{Aff}_{\mathrm{O}}(A)$ tali che $\Phi(f) = \Phi(g)$ e sia φ l'automorfismo associato a f e a g. Fissato un punto qualsiasi $\mathrm{P} \in A$, ricordando che f e g fissano O, osservo che

$$\overrightarrow{\mathrm{O}f(\mathrm{P})} = \overrightarrow{f(\mathrm{O})f(\mathrm{P})} = \varphi(\overrightarrow{\mathrm{OP}}) = \overrightarrow{g(\mathrm{O})g(\mathrm{P})} = \overrightarrow{\mathrm{O}g(\mathrm{P})}$$

Ma allora dal primo assioma degli spazi affini segue che $f(\mathrm{P}) = g(\mathrm{P})$ e, per arbitrarietà nella scelta del punto $\mathrm{P} \in A$, posso concludere che $f = g$. Dunque, Φ è un'applicazione iniettiva. Sia ora $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$ e sia $f\colon A \to A$ l'applicazione tale che, per ogni $\mathrm{P} \in A$, $f(\mathrm{P})$ sia l'unico punto per cui valga la relazione

$$\overrightarrow{\mathrm{O}f(\mathrm{P})} = \varphi(\overrightarrow{\mathrm{OP}})$$

Va notato che l'esistenza e l'unicità di f sono garantite dal primo assioma degli spazi affini. In effetti, nella dimostrazione dell'iniettività di Φ si è semplicemente formalizzata l'unicità di f. A questo punto, per mostrare che f fissa O, basta notare che

$$\overrightarrow{\mathrm{O}f(\mathrm{O})} = \varphi(\overrightarrow{\mathrm{OO}}) = \varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0} = \overrightarrow{\mathrm{OO}}$$

Quindi, dal primo assioma degli spazi affini segue che $f(\mathrm{O}) = \mathrm{O}$. Sfruttando invece il secondo assioma degli spazi affini osservo che, per ogni $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in A$, vale la relazione

$$\overrightarrow{f(\mathrm{P})f(\mathrm{Q})} = \overrightarrow{f(\mathrm{P})\mathrm{O}} + \overrightarrow{\mathrm{O}f(\mathrm{Q})} = -\overrightarrow{\mathrm{O}f(\mathrm{P})} + \overrightarrow{\mathrm{O}f(\mathrm{Q})} = -\varphi(\overrightarrow{\mathrm{OP}}) + \varphi(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}) = \varphi(-\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}) = \varphi(\overrightarrow{\mathrm{PQ}})$$

Di conseguenza, f è un'affinità di A che fissa O con automorfismo associato φ. Dunque, avendo dimostrato che Φ è anche un'applicazione suriettiva, posso concludere che Φ è un isomorfismo di gruppi. $\square$

Osservazione 11. La proposizione 1 diventa falsa se non si assume che le affinità di A fissino O, in quanto l'applicazione Φ definita nell'enunciato non sarebbe iniettiva. Un controesempio concreto è dato dalle traslazioni definite da un qualsiasi vettore di V. Come si è visto nell'esempio 2, infatti, esse sono affinità di A con automorfismo associato l'applicazione id_V. Si noti, in particolare, che le traslazioni definite da un vettore non nullo di V non fissano alcun punto.

Teorema 1. *Sia E uno spazio euclideo su V e sia $\{\mathrm{O}, e_1, \dots, e_n\}$ un riferimento cartesiano su E. Siano $f \in \mathrm{Isom}(E)$ con automorfismo associato φ, $A = \mathrm{M}_e(\varphi)$ con $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ e sia c il vettore colonna delle coordinate di $f(\mathrm{O})$ nella base e. Allora, per ogni $\mathrm{P} \in E$, $\mathrm{P} = \mathrm{P}(x_1, \dots, x_n)$, vale la relazione*

$$f\big(\mathrm{P}(x_1, \dots, x_n)\big) = \mathrm{Q}(y_1, \dots, y_n)\,, \text{ con } y = Ax + c \tag{7}$$

dove $x = {}^t(x_1 \cdots x_n)$, $y = {}^t(y_1 \cdots y_n)$. Viceversa, siano ora $A \in \mathrm{O}(n)$, $c \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ e sia $f \colon E \to E$ un'applicazione che soddisfa la condizione (7) per ogni $\mathrm{P} \in E$, $\mathrm{P} = \mathrm{P}(x_1, \dots, x_n)$. Allora $f \in \mathrm{Isom}(E)$ con automorfismo associato φ_A. In particolare, le isometrie di $\mathbb{E}^n$ sono le affinità di $\mathbb{E}^n$ tali che $A \in \mathrm{O}(n)$ e le isometrie dirette di $\mathbb{E}^n$ sono le affinità di $\mathbb{E}^n$ tali che $A \in \mathrm{SO}(n)$.

Dimostrazione. Utilizzando il secondo assioma degli spazi affini e ricordando che la matrice associata a φ rispetto alla base e calcola φ, la prima parte dell'enunciato segue immediatamente dalla relazione

$$y = \overrightarrow{\mathrm{O}f(\mathrm{P})} = \overrightarrow{f(\mathrm{O})f(\mathrm{P})} + \overrightarrow{\mathrm{O}f(\mathrm{O})} = \varphi(\overrightarrow{\mathrm{OP}}) + c = \varphi(x) + c = Ax + c$$

Nel viceversa basta invece osservare che, per ogni $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in E$, $\mathrm{P} = \mathrm{P}(x_1, \dots, x_n)$, $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}(y_1, \dots, y_n)$, vale che

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f(\mathrm{P})f(\mathrm{Q})} &= \overrightarrow{f(\mathrm{P})\mathrm{O}} + \overrightarrow{\mathrm{O}f(\mathrm{Q})} = -\overrightarrow{\mathrm{O}f(\mathrm{P})} + \overrightarrow{\mathrm{O}f(\mathrm{Q})} = -(Ax + c) + (Ay + c) \\ &= A(y - x) = \varphi_A(y - x) = \varphi_A(\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}) = \varphi_A(\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{PO}}) = \varphi_A(\overrightarrow{\mathrm{PQ}})\end{aligned}$$

Inoltre, φ_A è un operatore unitario di V per il corollario 1 della sezione 1.14, perché la matrice associata rispetto alla base ortonormale $\{e_1, \dots, e_n\}$ è per ipotesi $A \in \mathrm{O}(n)$. Si deduce quindi che $f \in \mathrm{Isom}(E)$ con automorfismo associato φ_A. La parte finale dell'enunciato segue infine da fatti già noti. □

Il teorema 1 vale anche nel caso più generale delle affinità, con la sola differenza che A è una matrice invertibile non necessariamente ortogonale. La dimostrazione data nel caso particolare delle isometrie si adatta facilmente al caso delle affinità.

Teorema 2 (Caratterizzazione geometrica delle isometrie)**.** *Sia E uno spazio euclideo su V di dimensione finita. Un'applicazione $f \colon E \to E$ è un'isometria se e solo se $\mathrm{d}\big(f(\mathrm{P}), f(\mathrm{Q})\big) = \mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ per ogni $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in E$.*

Dimostrazione. Innanzitutto, dimostro la prima implicazione. Osservo che l'automorfismo φ associato a f è un operatore unitario di V perché $f \in \mathrm{Isom}(E)$ per ipotesi. Ma allora dalla definizione di distanza e dal teorema 1-(ii) della sezione 1.14 segue che

$$\mathrm{d}\big(f(\mathrm{P}), f(\mathrm{Q})\big) = \|\overrightarrow{f(\mathrm{P})f(\mathrm{Q})}\| = \|\varphi(\overrightarrow{\mathrm{PQ}})\| = \|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\| = \mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$$

Ora mi occupo di mostrare il viceversa. Fissato un punto $\mathrm{O} \in E$, sia $\varphi \colon V \to V$ l'applicazione definita da

$$\varphi(\overrightarrow{\mathrm{OP}}) = \overrightarrow{f(\mathrm{O})f(\mathrm{P})}$$

L'applicazione è ben definita per il primo assioma degli spazi affini. Inoltre, si noti che ogni vettore $v \in V$ è della forma $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ per un opportuno punto $\mathrm{P} \in E$, sempre in virtù del primo assioma degli spazi affini. A questo punto, ricordando che $\dim V < \infty$ per ipotesi, si vuole mostrare che φ è un operatore unitario di V utilizzando il teorema 1-(iii) della sezione 1.14. Innanzitutto, osservo che

$$\varphi(\mathbf{0}) = \varphi(\overrightarrow{\mathrm{OO}}) = \overrightarrow{f(\mathrm{O})f(\mathrm{O})} = \mathbf{0}$$

Ora siano $v, w \in V$ vettori qualsiasi. Dal primo assioma degli spazi affini segue che $\exists!\, \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in E$ tali che $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = v$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = w$. Ma allora, ricordando che $\mathrm{d}\big(f(\mathrm{P}), f(\mathrm{Q})\big) = \mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ per ipotesi e che, come si è visto nella proposizione 1-SM2 della sezione 1.11, la distanza è simmetrica, si ha che

$$\begin{aligned}\|\varphi(v) - \varphi(w)\| &= \|\varphi(\overrightarrow{\mathrm{OP}}) - \varphi(\overrightarrow{\mathrm{OQ}})\| = \|\overrightarrow{f(\mathrm{O})f(\mathrm{P})} - \overrightarrow{f(\mathrm{O})f(\mathrm{Q})}\| = \|\overrightarrow{f(\mathrm{O})f(\mathrm{P})} + \overrightarrow{f(\mathrm{Q})f(\mathrm{O})}\| \\ &= \|\overrightarrow{f(\mathrm{Q})f(\mathrm{P})}\| = \mathrm{d}\big(f(\mathrm{Q}), f(\mathrm{P})\big) = \mathrm{d}(\mathrm{Q}, \mathrm{P}) = \|\overrightarrow{\mathrm{QP}}\| = \|\overrightarrow{\mathrm{QO}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}\| = \|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}}\| \\ &= \|v - w\|\end{aligned}$$

Dunque, φ è un operatore unitario di V. Resta da dimostrare soltanto che φ è l'automorfismo associato a f. A tale scopo, fissati due punti qualsiasi $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in E$, basta osservare che

$$\begin{aligned}\overrightarrow{f(\mathrm{P})f(\mathrm{Q})} &= \overrightarrow{f(\mathrm{P})f(\mathrm{O})} + \overrightarrow{f(\mathrm{O})f(\mathrm{Q})} = -\overrightarrow{f(\mathrm{O})f(\mathrm{P})} + \overrightarrow{f(\mathrm{O})f(\mathrm{Q})} \\ &= -\varphi(\overrightarrow{\mathrm{OP}}) + \varphi(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}) = \varphi(-\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}) = \varphi(\overrightarrow{\mathrm{PQ}})\end{aligned}$$

Posso quindi concludere che f è un'isometria di E con automorfismo associato φ. □

1.17 Figure geometriche e riflessioni

Definizione 1. Sia A uno spazio affine. Un insieme $F \subseteq A$ si dice una *figura geometrica di A*.

Definizione 2. Siano E uno spazio euclideo, $F \subseteq E$ una figura geometrica e sia $f \in \mathrm{Isom}(E)$. Si dice che *f fissa F* se $f(F) = F$. Inoltre, si dice *gruppo delle isometrie di F* l'insieme

$$\mathrm{Isom}(F) := \left\{ f \in \mathrm{Isom}(E) \;\middle|\; f(F) = F \right\}$$

Osservazione 1. Sia E uno spazio euclideo e sia $F \subseteq E$ una figura geometrica. Si dimostra facilmente che $\mathrm{Isom}(F)$ è un sottogruppo di $\mathrm{Isom}(E)$.

Definizione 3. Sia A uno spazio affine. Si dice che due figure geometriche $F, F' \subseteq A$ sono *affinemente equivalenti* se esiste $f \in \mathrm{Aff}(A)$ tale che $f(F) = F'$. Una proprietà di F si dice una *proprietà affine* se è posseduta da ogni figura geometrica affinemente equivalente a F.

Definizione 4. Sia E uno spazio euclideo. Due figure geometriche $F, F' \subseteq E$ si dicono *congruenti* se esiste $f \in \mathrm{Isom}(E)$ tale che $f(F) = F'$. Una proprietà di F si dice una *proprietà euclidea* se è posseduta da ogni figura geometrica congruente a F.

Esempio 1. Sia E uno spazio euclideo e siano $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in E$. Allora, ricordando l'esempio 3 della sezione 1.16, la traslazione definita da $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ è un'isometria di E e inoltre $t_{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}(\mathrm{P}) = \mathrm{Q}$, dunque due punti in uno spazio euclideo sono sempre congruenti.

Definizione 5. Sia V uno spazio vettoriale euclideo e sia $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$. L'applicazione

$$\begin{array}{rccc}\rho_v\colon & V & \longrightarrow & V \\ & u & \longmapsto & u - 2a_v(u)v\end{array}$$

si dice la *riflessione definita da v* (o *rispetto a v*).

Osservazione 2. Sia V uno spazio vettoriale euclideo e sia $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$. Valgono le seguenti proprietà:

(i) $\rho_v \in \mathrm{O}(V)$

(ii) $\rho_v = \rho_v^{-1}$

(iii) $\rho_{cv} = \rho_v$ per ogni[8] $c \in \mathbb{R}^*$

Dimostrazione.

(i) Utilizzando il teorema 1-(ii) della sezione 1.14 si dimostra che ρ_v è un operatore unitario di V. Innanzitutto, bisogna mostrare che ρ_v è un operatore lineare di V. Per farlo basta osservare che, per ogni $u, u' \in V$, $c, c' \in \mathbb{R}$, vale la relazione

$$\begin{aligned}\rho_v(cu + c'u') &= cu + c'u' - 2a_v(cu + c'u')v \\ &= cu + c'u' - 2\frac{\langle v, cu + c'u' \rangle}{\langle v, v \rangle}v \\ &= cu + c'u' - 2\frac{c\langle v, u \rangle + c'\langle v, u' \rangle}{\langle v, v \rangle}v \\ &= c\Big(u - 2\frac{\langle v, u \rangle}{\langle v, v \rangle}v\Big) + c'\Big(u' - 2\frac{\langle v, u' \rangle}{\langle v, v \rangle}v\Big) \\ &= c\big(u - 2a_v(u)v\big) + c'\big(u' - 2a_v(u')v\big) \\ &= c\rho_v(u) + c'\rho_v(u')\end{aligned}$$

[8]Utilizzo la notazione con asterisco per indicare un qualsiasi insieme numerico privato dello zero.

A questo punto, osservo che ρ_v conserva la norma dei vettori. Infatti, per ogni $u \in V$ si ha che

$$\begin{aligned}
\|\rho_v(u)\|^2 &= \|u - 2a_v(u)v\|^2 \\
&= \left\| u - 2\frac{\langle v, u\rangle}{\langle v, v\rangle} v \right\|^2 \\
&= \langle u - 2\frac{\langle v, u\rangle}{\langle v, v\rangle} v, u - 2\frac{\langle v, u\rangle}{\langle v, v\rangle} v\rangle \\
&= \langle u, u\rangle - 4\frac{\langle v, u\rangle^2}{\langle v, v\rangle} + 4\frac{\langle v, u\rangle^2}{\langle v, v\rangle} \\
&= \langle u, u\rangle \\
&= \|u\|^2
\end{aligned}$$

Di conseguenza, $\|\rho_v(u)\| = \|u\|$ in quanto la norma di un vettore è una quantità sempre positiva. Posso dunque concludere che ρ_v è un operatore unitario di V.

(ii) Per dimostrare che ρ_v è l'applicazione inversa di se stessa, è sufficiente mostrare che $\rho_v \circ \rho_v = \mathrm{id}_V$. A tale scopo, basta semplicemente osservare che, per ogni $u \in V$, vale la relazione

$$\begin{aligned}
\rho_v\big(\rho_v(u)\big) &= \rho_v\big(u - 2a_v(u)v\big) \\
&= \rho_v(u) - 2a_v(u)\rho_v(v) \\
&= \big(u - 2a_v(u)v\big) - 2a_v(u)\big(v - 2a_v(v)v\big) \\
&= u - 2a_v(u)v - 2a_v(u)v + 4a_v(u)v \\
&= u
\end{aligned}$$

(iii) L'asserto si dimostra facilmente osservando che, per ogni $u \in V$, $c \in \mathbb{R}^*$, vale la relazione

$$\rho_{cv}(u) = u - 2a_{cv}(u)cv = u - 2\frac{\langle cv, u\rangle}{\langle cv, cv\rangle} cv = u - 2\frac{\langle v, u\rangle}{\langle v, v\rangle} v = u - 2a_v(u)v = \rho_v(u) \qquad \square$$

Le seguenti definizioni generalizzano concetti già noti per spazi euclidei di dimensione 2 e 3.

Definizione 6. Siano E uno spazio euclideo su V, $H \subseteq E$ un iperpiano e sia $W \subseteq V$ la giacitura di H. Un vettore $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$ si dice *ortogonale* (o *normale*) *a* H e si denota $v \perp H$ se $v \in W^\perp$.

Definizione 7. Siano E uno spazio euclideo, $r \subseteq E$ una retta, $H \subseteq E$ un iperpiano e sia v_r un vettore di direzione di r. La retta r e l'iperpiano H si dicono ortogonali e si denota $r \perp H$ se $v_r \perp H$.

Definizione 8. Siano E uno spazio euclideo, $H \subseteq E$ un iperpiano, $\mathrm{P}_0 \in E$ e sia $s \subseteq E$ la retta passante per P_0 e ortogonale a H. Il punto di intersezione tra H e s si dice il *piede della perpendicolare condotta da* P_0 *a* H.

La definizione 8 è ben posta perché, in uno spazio affine di dimensione $n \geq 2$, una retta e un iperpiano non paralleli hanno sempre un unico punto di intersezione. Inoltre, la retta s passante per P_0 e ortogonale a H è univocamente determinata. Per dimostrarlo, si applica un ragionamento analogo a quello visto nel caso degli spazi euclidei di dimensione 3. Suppongo che E sia uno spazio euclideo su V e che $W \subseteq V$ sia la giacitura di H. Dato che $\dim W < \infty$, posso scomporre $V = W \oplus W^\perp$ in virtù della proposizione 1 della sezione 1.8. Applicando la formula di Grassmann, si deduce quindi che $\dim W^\perp = 1$. Ora, se v_s è un vettore di direzione di s, allora $v_s \in W^\perp$ perché sto assumendo che $s \perp H$. Di conseguenza, si ha che $\langle v_s\rangle = W^\perp$ perché $\dim W^\perp = 1$ e $v_s \neq \mathbf{0}$. Posso dunque concludere che s è la retta passante per P_0 di giacitura $W^\perp$.

Definizione 9. Sia E uno spazio euclideo e sia $H \subseteq E$ un iperpiano. L'applicazione

$$\begin{array}{rccl}
\rho_H\colon & E & \longrightarrow & E \\
& \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{Q} \mid \overrightarrow{\mathrm{NP}} = \overrightarrow{\mathrm{QN}}
\end{array}$$

dove N è il piede della perpendicolare condotta da P a H, si dice la *riflessione definita da* H.

La definizione 9 è ben posta perché l'applicazione ρ_H è ben definita. Infatti, se E è uno spazio euclideo su V, dal primo assioma degli spazi affini segue che, una volta fissati il vettore $\overrightarrow{\mathrm{NP}} \in V$ e il punto $\mathrm{N} \in E$, esiste un unico punto $\mathrm{Q} \in E$ tale che $\overrightarrow{\mathrm{NP}} = \overrightarrow{\mathrm{QN}}$.

Osservazione 3. Siano E uno spazio euclideo su V, $H \subseteq E$ un iperpiano e sia $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$, $v \perp H$. Allora ρ_H è un'isometria di E con automorfismo associato ρ_v.

Dimostrazione. Siano $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in E$ due punti qualsiasi, N il piede della perpendicolare condotta da P a H e sia M il piede della perpendicolare condotta da Q a H. Innanzitutto, dalla definizione 9 e dal secondo assioma degli spazi affini segue immediatamente che

$$\overrightarrow{\mathrm{P}\rho_H(\mathrm{P})} = \overrightarrow{\mathrm{PN}} + \overrightarrow{\mathrm{N}\rho_H(\mathrm{P})} = -\overrightarrow{\mathrm{NP}} - \overrightarrow{\rho_H(\mathrm{P})\mathrm{N}} = -2\overrightarrow{\mathrm{NP}}$$

Ora sia s la retta passante per P e ortogonale a H. Per quanto osservato subito dopo la definizione 8, la giacitura di tale retta è l'ortogonale della giacitura di H, dunque v è un vettore di direzione di s perché per ipotesi $v \neq \mathbf{0}$ e $v \perp H$. Osservo che $\mathrm{P} \in s$ per costruzione, mentre $\mathrm{N} \in s$ in virtù della definizione 8, ma allora $\overrightarrow{\mathrm{NP}} \in \langle v \rangle$ e quindi $\overrightarrow{\mathrm{NP}} \parallel v$. Questo significa, ovviamente, che esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\overrightarrow{\mathrm{NP}} = cv$. Di conseguenza, applicando il prodotto scalare per v a primo e secondo membro, si ricava che

$$c = \frac{\langle v, \overrightarrow{\mathrm{NP}} \rangle}{\langle v, v \rangle}$$

Va notato che tale espressione ha senso perché $v \neq \mathbf{0}$. Posso dunque affermare che

$$\overrightarrow{\mathrm{P}\rho_H(\mathrm{P})} = -2\frac{\langle v, \overrightarrow{\mathrm{NP}} \rangle}{\langle v, v \rangle} v$$

Con un ragionamento analogo sul punto Q si arriva alla stessa conclusione. A questo punto, osservo che $v \perp \overrightarrow{\mathrm{MN}}$ perché $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ appartiene alla giacitura di H e $v \perp H$. Ma allora vale la relazione

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\rho_H(\mathrm{P})\rho_H(\mathrm{Q})} &= \overrightarrow{\rho_H(\mathrm{P})\mathrm{P}} + \overrightarrow{\mathrm{P}\rho_H(\mathrm{Q})} \\
&= -\overrightarrow{\mathrm{P}\rho_H(\mathrm{P})} + \overrightarrow{\mathrm{PQ}} + \overrightarrow{\mathrm{Q}\rho_H(\mathrm{Q})} \\
&= 2\frac{\langle v, \overrightarrow{\mathrm{NP}} \rangle}{\langle v, v \rangle} v + \overrightarrow{\mathrm{PQ}} - 2\frac{\langle v, \overrightarrow{\mathrm{MQ}} \rangle}{\langle v, v \rangle} v \\
&= 2\frac{\langle v, \overrightarrow{\mathrm{NP}} \rangle}{\langle v, v \rangle} v + \overrightarrow{\mathrm{PQ}} - 2\frac{\langle v, \overrightarrow{\mathrm{MN}} + \overrightarrow{\mathrm{NQ}} \rangle}{\langle v, v \rangle} v \\
&= 2\frac{\langle v, \overrightarrow{\mathrm{NP}} \rangle}{\langle v, v \rangle} v + \overrightarrow{\mathrm{PQ}} - 2\frac{\langle v, \overrightarrow{\mathrm{MN}} \rangle + \langle v, \overrightarrow{\mathrm{NQ}} \rangle}{\langle v, v \rangle} v \\
&= 2\frac{\langle v, \overrightarrow{\mathrm{NP}} \rangle}{\langle v, v \rangle} v + \overrightarrow{\mathrm{PQ}} - 2\frac{\langle v, \overrightarrow{\mathrm{NQ}} \rangle}{\langle v, v \rangle} v \\
&= \overrightarrow{\mathrm{PQ}} - 2\frac{\langle v, \overrightarrow{\mathrm{NQ}} \rangle - \langle v, \overrightarrow{\mathrm{NP}} \rangle}{\langle v, v \rangle} v \\
&= \overrightarrow{\mathrm{PQ}} - 2\frac{\langle v, \overrightarrow{\mathrm{NQ}} - \overrightarrow{\mathrm{NP}} \rangle}{\langle v, v \rangle} v \\
&= \overrightarrow{\mathrm{PQ}} - 2\frac{\langle v, \overrightarrow{\mathrm{NQ}} + \overrightarrow{\mathrm{PN}} \rangle}{\langle v, v \rangle} v \\
&= \overrightarrow{\mathrm{PQ}} - 2\frac{\langle v, \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \rangle}{\langle v, v \rangle} v \\
&= \overrightarrow{\mathrm{PQ}} - 2a_v(\overrightarrow{\mathrm{PQ}})v \\
&= \rho_v(\overrightarrow{\mathrm{PQ}})
\end{aligned}$$

Dal momento che ρ_v è un operatore unitario di V in virtù dell'osservazione 2-(i), posso concludere che ρ_H è un'isometria di E con automorfismo associato ρ_v. $\square$

1.18 Isometrie di piani

Idealmente, si vuole dare una caratterizzazione delle matrici di ordine 2 appartenenti al gruppo ortogonale. Innanzitutto, si può dimostrare che tutte le matrici in $\mathrm{SO}(2)$ sono della forma

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

per un opportuno $\theta \in [0, 2\pi)$. Infatti, per il teorema 1-(iv) della sezione 1.14 si ha che R_θ è la matrice di un operatore unitario e dal corollario 1 della stessa sezione segue che R_θ è una matrice ortogonale, mentre dal calcolo del determinante si evince che R_θ è ortogonale speciale. Ora, se si vogliono descrivere i restanti elementi di $\mathrm{O}(2)$, cioè quelli con determinante -1, si può utilizzare il fatto che, se $A, B \in \mathrm{O}(2)\backslash\mathrm{SO}(2)$, allora $AB \in \mathrm{SO}(2)$ perché vale la relazione

$$\det AB = \det A \det B = (-1)(-1) = 1$$

Segue che ogni matrice $A \in \mathrm{O}(2)\backslash\mathrm{SO}(2)$ si può esprimere come prodotto di un elemento $AB \in \mathrm{SO}(2)$ per una fissata matrice $B^{-1} \in \mathrm{O}(2)\backslash\mathrm{SO}(2)$. Prendendo per comodità la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{O}(2)\backslash\mathrm{SO}(2)$ si deduce quindi che tutti gli elementi di $\mathrm{O}(2)\backslash\mathrm{SO}(2)$ sono della forma

$$A_\theta = R_\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

per un qualche $\theta \in [0, 2\pi)$. In particolare, $R_0 = I_2$ e $A_0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Lemma 1. *Gli autovalori di una matrice* $A \in \mathrm{O}(2)\backslash\mathrm{SO}(2)$ *sono* ± 1 *e gli autospazi associati a tali autovalori sono tra loro ortogonali.*

Dimostrazione. Da quanto osservato prima sulle matrici in $\mathrm{O}(2)\backslash\mathrm{SO}(2)$ segue che $\exists\, \theta \in [0, 2\pi)$ tale che $A = A_\theta$. Il polinomio caratteristico di A_θ è dato da

$$P_{A_\theta}(T) \;=\; \begin{vmatrix} \cos\theta - T & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - T \end{vmatrix} \;=\; (\cos\theta - T)(-\cos\theta - T) - \sin^2\theta \;=\; T^2 - 1$$

Gli autovalori di A_θ sono le radici del polinomio caratteristico, cioè ± 1. A questo punto, avendo individuato due autovalori distinti in uno spazio vettoriale di dimensione 2, la loro molteplicità geometrica è uguale a 1 e quindi gli autospazi associati a tali autovalori hanno dimensione 1. Ora sia $\{e_1, e_2\}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$. L'autospazio associato all'autovalore 1 è dato da

$$\begin{aligned}
V_1(A_\theta) &= \left\{\, v \in \mathbb{R}^2,\, v = xe_1 + ye_2 \;\middle|\; Av = v \,\right\} \\
&= \left\{\, v \in \mathbb{R}^2,\, v = xe_1 + ye_2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\right\} \\
&= \left\{\, v \in \mathbb{R}^2,\, v = xe_1 + ye_2 \;\middle|\; (\cos\theta)x + (\sin\theta)y = x \,\right\} \\
&= \left\{\, v \in \mathbb{R}^2,\, v = xe_1 + ye_2 \;\middle|\; (\cos\theta - 1)x + (\sin\theta)y = 0 \,\right\} \\
&= \left\{\, v \in \mathbb{R}^2,\, v = (-\sin\theta, \cos\theta - 1)t,\, \exists\, t \in \mathbb{R} \,\right\} \\
&= \langle e_1 \sin\theta - e_2(\cos\theta - 1) \rangle
\end{aligned}$$

Similmente, l'autospazio associato all'autovalore -1 è dato da

$$\begin{aligned}
V_{-1}(A_\theta) &= \left\{\, v \in \mathbb{R}^2,\, v = xe_1 + ye_2 \;\middle|\; Av = -v \,\right\} \\
&= \left\{\, v \in \mathbb{R}^2,\, v = xe_1 + ye_2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \,\right\} \\
&= \left\{\, v \in \mathbb{R}^2,\, v = xe_1 + ye_2 \;\middle|\; (\cos\theta)x + (\sin\theta)y = -x \,\right\} \\
&= \left\{\, v \in \mathbb{R}^2,\, v = xe_1 + ye_2 \;\middle|\; (\cos\theta + 1)x + (\sin\theta)y = 0 \,\right\} \\
&= \left\{\, v \in \mathbb{R}^2,\, v = (-\sin\theta, \cos\theta + 1)t,\, \exists\, t \in \mathbb{R} \,\right\} \\
&= \langle e_1 \sin\theta - e_2(\cos\theta + 1) \rangle
\end{aligned}$$

Infine, basta osservare che vale la relazione

$$\langle e_1 \sin\theta - e_2(\cos\theta - 1), e_1 \sin\theta - e_2(\cos\theta + 1) \rangle = \sin^2\theta + \cos^2\theta - 1 = 0$$

dalla quale si deduce che gli autospazi associati agli autovalori ± 1 sono tra loro ortogonali. $\square$

Ora siano E un piano euclideo, $\{\mathrm{O}, i, j\}$ un riferimento cartesiano su E, sia $\mathrm{C} \in E$, $\mathrm{C} = \mathrm{C}(x_0, y_0)$ e sia $\sigma \colon E \to E$ una rotazione di centro C. Dalla proposizione 1 della sezione 1.16 segue che si può associare a σ una matrice $R_\theta \in \mathrm{SO}(2)$. Si dice che θ è l'*angolo della rotazione* σ. Per la proposizione 1 della sezione 1.16 e per quanto osservato sulle matrici in $\mathrm{SO}(2)$, la rotazione σ è univocamente determinata dal punto C fissato e dall'angolo θ. Dal teorema 1 della sezione 1.16 segue invece che posso esprimere la rotazione di centro O e di angolo θ nella formula esplicita

$$R_{\mathrm{O},\theta}\left(\mathrm{P}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Q}\left(\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

A questo punto la rotazione σ, cioè la rotazione di centro C e di angolo θ, è ottenuta componendo la traslazione definita dal vettore $\overrightarrow{\mathrm{CO}}$, la rotazione $R_{\mathrm{O},\theta}$ e infine la traslazione definita da $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, in simboli

$$R_{\mathrm{C},\theta} = t_{\overrightarrow{\mathrm{OC}}} \circ R_{\mathrm{O},\theta} \circ t_{\overrightarrow{\mathrm{CO}}}$$

In coordinate, si ha

$$R_{\mathrm{C},\theta}\left(\mathrm{P}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Q}\left(\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right)$$

Ora considero la riflessione ρ_r definita da una retta r di E. Innanzitutto, si dice che r è l'*asse della riflessione* ρ_r. Ovviamente, ρ_r fissa ogni punto del suo asse. Dunque, se $\mathrm{O} \in r$, allora ρ_r è un'isometria che fissa O. Ciononostante, si verifica facilmente che ρ_r è un'isometria inversa, quindi non è una rotazione. Di conseguenza, per la proposizione 1 della sezione 1.16, la riflessione ρ_r si identifica con un elemento di $\mathrm{O}(2) \backslash \mathrm{SO}(2)$, cioè con una matrice della forma A_θ per un opportuno $\theta \in [0, 2\pi)$. Per distinguere i due oggetti, la riflessione corrispondente alla matrice A_θ si denota $A_{\mathrm{O},\theta}$. Si dimostra facilmente che l'asse della riflessione $A_{\mathrm{O},\theta}$ è la retta r_θ passante per l'origine che ha per vettore di direzione un autovettore di A_θ associato all'autovalore 1, cioè una retta con equazione cartesiana

$$(\cos\theta - 1)X + (\sin\theta)Y = 0$$

mentre un versore di direzione di tale retta è dato da $u_\theta = \left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)$.

Una *glissoriflessione* è un'isometria f di E ottenuta come composizione di una riflessione ρ_r di asse una retta r e di una traslazione t_v definita da un vettore $v \neq \mathbf{0}$ parallelo a r, in simboli

$$f = t_v \circ \rho_r$$

La retta r si dice l'*asse della glissoriflessione*. È immediato verificare che si ha anche $f = \rho_r \circ t_v$.

Il seguente teorema, la cui dimostrazione non verrà trattata, afferma che ogni isometria di E è di uno dei tipi descritti finora.

Teorema 1 (Chasles)**.** *Sia E un piano euclideo. Un'isometria di E che fissa un punto è una rotazione oppure una riflessione a seconda che sia diretta o inversa. Un'isometria di E che non fissa alcun punto è una traslazione oppure una glissoriflessione a seconda che sia diretta o inversa.*

1.19 Diagonalizzazione di operatori simmetrici

Siano $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$. Fino a questo punto sono note due relazioni di equivalenza tra matrici quadrate:

- similitudine: $\exists\, M \in \mathrm{GL}_n(K) \mid B = M^{-1}AM$
- congruenza: $\exists\, M \in \mathrm{GL}_n(K) \mid B = {}^tMAM$

In corrispondenza alle due nozioni si hanno due diversi problemi di diagonalizzazione, che possono così enunciarsi: data una matrice $A \in \mathrm{M}_n(K)$, trovare una matrice diagonale simile [risp. congruente] ad A. Il primo dei due problemi, equivalente al problema della diagonalizzazione delle applicazioni lineari, non ammette soluzione in generale, cioè non tutte le classi di similitudine contengono una matrice diagonale. La matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{smallmatrix}\right)$, per esempio, non è simile a una matrice diagonale (sezione 1.6, osservazione 2).

Il secondo problema, equivalente al problema della diagonalizzazione delle forme bilineari, è risolubile se si considerano forme bilineari simmetriche e cioè matrici simmetriche in un campo con caratteristica diversa da 2 (sezione 1.6, teorema 1). Tuttavia, nel caso particolare in cui la matrice diagonalizzante M è ortogonale, vale la relazione

$$M^{-1}AM = {}^tMAM \tag{8}$$

Di conseguenza, la matrice (8) è simultaneamente simile e congruente ad A. In questo caso particolare non è dunque necessario specificare se ci si riferisce alla similitudine o alla congruenza perché le due nozioni sono del tutto equivalenti. Il limitarsi a considerare le matrici ortogonali è equivalente a restringersi, in uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita, alle sole basi ortonormali (sezione 1.7, proposizione 3). La diagonalizzabilità di una matrice simmetrica A per mezzo di matrici ortogonali significa, quindi, che la forma quadratica e l'operatore lineare definiti da A hanno una comune base diagonalizzante ortonormale.

Lemma 1. *Sia $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica. Allora $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}^*$ tali che*

(i) $n = n_1 + \cdots + n_k$

(ii) $P_A(T) = (T - \lambda_1)^{n_1} \cdots (T - \lambda_k)^{n_k}$

In altre parole, il polinomio caratteristico di una matrice simmetrica possiede solo radici reali.

Dimostrazione. Innanzitutto bisogna osservare che, se $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, in particolare vale che $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ e quindi $P_A(T) \in \mathbb{C}[T]$. Allora, per il teorema fondamentale dell'algebra, $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$, $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}^*$ tali che $n = n_1 + \cdots + n_k$ e tali che il polinomio caratteristico di A si fattorizzi

$$P_A(T) = (T - \lambda_1)^{n_1} \cdots (T - \lambda_k)^{n_k}$$

A questo punto, fissato $1 \leq i \leq k$ e posto $\lambda := \lambda_i$, va dimostrato che $\lambda \in \mathbb{R}$. Innanzitutto, se $P_A(\lambda) = 0$, cioè se λ è radice del polinomio caratteristico di A, allora λ è anche un autovalore di A e quindi

$$\exists\, x \in \mathbb{C}^n,\ x \neq \mathbf{0} \;\big|\; Ax = \lambda x$$

Prendendo i complessi coniugati di primo e secondo membro, si ha $\overline{Ax} = \overline{\lambda x}$ e quindi $A\overline{x} = \overline{\lambda}\overline{x}$ perché $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. A questo punto, sfruttando l'ipotesi che A sia simmetrica, cioè che ${}^tA = A$, osservo che

$$\begin{aligned} {}^t\overline{x}Ax &= {}^t\overline{x}(Ax) = {}^t\overline{x}(\lambda x) = \lambda\, {}^t\overline{x}x \\ {}^t\overline{x}Ax &= {}^t(A\overline{x})x = {}^t(\overline{\lambda}\overline{x})x = \overline{\lambda}\, {}^t\overline{x}x \end{aligned}$$

e inoltre, essendo $x \neq \mathbf{0}$, si ha che[9]

$${}^t\overline{x}x = \overline{x}_1 x_1 + \cdots + \overline{x}_n x_n = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 \neq 0$$

Di conseguenza, $\lambda = \overline{\lambda}$ e posso dunque concludere che $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Teorema 1 (spettrale)**.** *Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita $n \geq 1$ e sia $F \colon V \to V$ un operatore simmetrico. Allora $\exists\, e = \{e_1, \dots, e_n\}$ base ortonormale di V tale che $\mathrm{M}_e(F)$ sia diagonale.*

Dimostrazione. Si procede per induzione su n. La base di induzione è ovvia. Infatti, se $n = 1$ è sufficiente normalizzare un qualunque vettore non nullo di V per ottenere una base ortonormale e la matrice associata a F rispetto alla base ottenuta è banalmente diagonale perché di ordine 1. Nel passo di induzione assumo quindi $n \geq 2$ e suppongo che il teorema sia vero per spazi vettoriali euclidei di dimensione $n - 1$. Sia $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ una base di V e sia $A = \mathrm{M}_f(F)$. Osservo che A è una matrice simmetrica, perché

[9] Se $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, è un numero complesso, allora il modulo di z è $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$. Inoltre, vale che $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.

F è un operatore simmetrico, a coefficienti reali, perché V è uno spazio vettoriale euclideo. Dunque, per il lemma 1, $\exists\, \lambda \in \mathbb{R} \mid P_A(\lambda) = 0$, ma allora λ è un autovalore di A e quindi di F. Ciò equivale a dire che

$$\exists\, v \in V,\, v \neq \mathbf{0} \;\Big|\; F(v) = \lambda v$$

A questo punto, definendo $e_1 := \frac{v}{\|v\|}$, si ottiene un autovettore di lunghezza 1 associato a λ. Ovviamente, anche $e_1 \neq \mathbf{0}$ e quindi, in virtù dell'osservazione 5 della sezione 1.4, posso decomporre

$$V = \langle e_1 \rangle \oplus e_1^{\perp}$$

Ponendo per semplicità $W := e_1^{\perp}$, per la formula di Grassmann si ha che $\dim W = n - 1$. Inoltre, W è banalmente uno spazio vettoriale euclideo perché la restrizione del prodotto scalare di V su W è ancora una forma bilineare simmetrica definita positiva.

Ora voglio dimostrare che $F\big|_W \in \operatorname{End}(W)$, cioè che $F(w) \in W$ per ogni $w \in W$. Siccome $W = e_1^{\perp}$, basta dimostrare che $F(w) \perp e_1$ per un fissato $w \in W$. Sfruttando la definizione data di W e l'ipotesi che F sia un operatore simmetrico cioè, ricordando la definizione 2 della sezione 1.15, che ${}^tF = F$, si ha che

$$\langle F(w), e_1 \rangle = \langle w, {}^tF(e_1) \rangle = \langle w, F(e_1) \rangle = \langle w, \lambda e_1 \rangle = \lambda \langle w, e_1 \rangle = \lambda 0 = 0$$

Inoltre, $F\big|_W$ è un operatore simmetrico perché, per ogni $w_1, w_2 \in W$, vale la relazione

$$\langle F\big|_W(w_1), w_2 \rangle = \langle F(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, F(w_2) \rangle = \langle w_1, F\big|_W(w_2) \rangle$$

Ma allora, per ipotesi induttiva, esiste una base ortonormale $e' = \{e_2, \dots, e_n\}$ di W tale che $\mathrm{M}_{e'}\big(F\big|_W\big)$ sia una matrice diagonale. Di conseguenza, $\exists\, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tali che $F\big|_W(e_i) = \lambda_i e_i$ per ogni $2 \leq i \leq n$. Equivalentemente, si ha che $F(e_i) = \lambda_i e_i$ per ogni $2 \leq i \leq n$, quindi $e_2, \dots, e_n$ sono autovettori di F. In conclusione, $e_2, \dots, e_n \perp e_1$ in quanto elementi di W, e_1 è un autovettore di lunghezza 1 per costruzione, mentre $e_2, \dots, e_n$ sono autovettori di lunghezza 1 fra loro ortogonali per ipotesi induttiva. Posso dunque affermare che $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ è una base ortonormale di autovettori di F, cioè una base ortonormale di V che diagonalizza F, quindi $\mathrm{M}_e(F)$ è una matrice diagonale. □

Corollario 1. *Sia $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica. Allora esiste una matrice $M \in \mathrm{O}(n)$ tale che la matrice $M^{-1}AM = {}^tMAM$ sia diagonale.*

Dimostrazione. Considero lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$ munito del prodotto scalare standard e della base canonica $E = \{E_1, \dots, E_n\}$. Ovviamente, la base canonica è una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard. Osservo che l'operatore lineare di $\mathbb{R}^n$ definito da A, cioè l'applicazione F_A definita dalla relazione $F_A(x) = Ax$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, è un operatore simmetrico in quanto A è simmetrica. Ma allora, essendo verificate tutte le ipotesi del teorema spettrale, esiste una base ortonormale $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $\mathrm{M}_e(F_A)$ sia una matrice diagonale. A questo punto basta definire $M := \mathrm{M}_{E,e}(\mathrm{id})$. Infatti, dato che M è una matrice del cambiamento di coordinate tra basi ortonormali, M è ortogonale in virtù della proposizione 3 della sezione 1.7 ed è una matrice che diagonalizza A in quanto vale la relazione

$$\mathrm{M}_e(F_A) = \mathrm{M}_{e,E}(\mathrm{id})\mathrm{M}_E(F_A)\mathrm{M}_{E,e}(\mathrm{id}) = M^{-1}AM$$ □

Corollario 2. *Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita $n \geq 1$ e sia $q\colon V \to \mathbb{R}$ una forma quadratica. Allora esiste una base ortonormale di V che diagonalizza q.*

Dimostrazione. L'asserto segue banalmente dal teorema spettrale. Innanzitutto, $\dim V < \infty$ per ipotesi, dunque esiste una base ortonormale $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ di V per il corollario 1 della sezione 1.7. Sia ora b la forma bilineare polare di q e sia $A := \mathrm{M}_f(b)$. Dato che b è una forma bilineare simmetrica, la matrice associata A è simmetrica, ma allora anche l'operatore lineare F_A definito da A è simmetrico. Sono dunque verificate le ipotesi del teorema spettrale, in virtù del quale esiste una base ortonormale $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ di V tale che $\mathrm{M}_e(F_A)$ sia una matrice diagonale. Come si è visto nella dimostrazione del corollario 1, la matrice che diagonalizza A è $M := \mathrm{M}_{f,e}(\mathrm{id}_V)$. Ma allora, dato che M è ortogonale in quanto matrice del cambiamento di coordinate tra basi ortonormali (sezione 1.7, proposizione 3), vale la relazione

$$\mathrm{M}_e(F_A) = \mathrm{M}_{e,f}(\mathrm{id}_V)\mathrm{M}_f(F_A)\mathrm{M}_{f,e}(\mathrm{id}_V) = {}^t\mathrm{M}_{f,e}(\mathrm{id}_V)\mathrm{M}_f(b)\mathrm{M}_{f,e}(\mathrm{id}_V) = \mathrm{M}_e(b)$$

Di conseguenza, $\mathrm{M}_e(b)$ è una matrice diagonale. Posso dunque concludere che $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ è una base ortonormale di V ortogonale rispetto a b, cioè una base ortonormale di V che diagonalizza q. □

Proposizione 1. *Sia V uno spazio vettoriale euclideo e sia $F\colon V \to V$ un operatore simmetrico. Se v, v' sono due autovettori di F associati ad autovalori λ, λ' tali che $\lambda \neq \lambda'$, allora $v \perp v'$.*

Dimostrazione. Dalla definizione di autovettore di un endomorfismo segue che

$$\langle F(v), v' \rangle = \langle \lambda v, v' \rangle = \lambda \langle v, v' \rangle, \quad \langle v, F(v') \rangle = \langle v, \lambda' v' \rangle = \lambda' \langle v, v' \rangle$$

Dato che, per ipotesi, F è un operatore simmetrico, dalle relazioni precedenti si deduce che

$$\lambda \langle v, v' \rangle = \lambda' \langle v, v' \rangle \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda - \lambda')\langle v, v' \rangle = 0$$

Ma allora $\langle v, v' \rangle = 0$, in quanto $\lambda \neq \lambda'$ per ipotesi. Concludo quindi che $v \perp v'$. □

1.20 Il caso complesso

Definizione 1. Sia V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale. Una *forma hermitiana su V* è un'applicazione

$$\begin{array}{rccc} h\colon & V \times V & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (v, w) & \longmapsto & h(v, w) \end{array}$$

che soddisfa le seguenti proprietà:

FH1	$h(v + v', w) = h(v, w) + h(v', w)$	$\forall\, v, v', w \in V$
FH2	$h(v, w + w') = h(v, w) + h(v, w')$	$\forall\, v, w, w' \in V$
FH3	$h(cv, w) = ch(v, w)$	$\forall\, v, w \in V$, $c \in \mathbb{C}$
FH4	$h(v, w) = \overline{h(w, v)}$	$\forall\, v, w \in V$

Osservazione 1. Sia V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale e sia $h\colon V \times V \to \mathbb{C}$ una forma hermitiana. Allora

(i)	$h(v, cw) = \bar{c}h(v, w)$	$\forall\, v, w \in V$, $c \in \mathbb{C}$
(ii)	$h(v, v) \in \mathbb{R}$	$\forall\, v \in V$
(iii)	$h(v, \mathbf{0}) = h(\mathbf{0}, v) = 0$	$\forall\, v \in V$

Dimostrazione. Siano $v, w \in V$ due vettori qualsiasi e sia $c \in \mathbb{C}$.

(i) Dalle proprietà FH3 e FH4 delle forme hermitiane (definizione 1) segue immediatamente che

$$h(v, cw) = \overline{h(cw, v)} = \overline{ch(w, v)} = \bar{c}\overline{h(w, v)} = \bar{c}h(v, w)$$

(ii) Dalla proprietà FH4 delle forme hermitiane segue, in particolare, che $h(v, v) = \overline{h(v, v)}$. Da questa osservazione segue immediatamente che $h(v, v) \in \mathbb{R}$.

(iii) Utilizzando la proprietà FH3 delle forme hermitiane e il punto (i) appena dimostrato si ricava che

$$h(v, \mathbf{0}) = h(v, 0 \cdot \mathbf{0}) = \bar{0} \cdot h(v, \mathbf{0}) = 0 = 0 \cdot h(\mathbf{0}, v) = h(0 \cdot \mathbf{0}, v) = h(\mathbf{0}, v)$$ □

Definizione 2. Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita $n \geq 1$. Una forma hermitiana $h\colon V \times V \to \mathbb{C}$ si dice

- *definita positiva* se $h(v, v) > 0 \;\; \forall\, v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$
- *definita negativa* se $h(v, v) < 0 \;\; \forall\, v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$
- *semidefinita positiva* se $h(v, v) \geq 0 \;\; \forall\, v \in V$
- *semidefinita negativa* se $h(v, v) \leq 0 \;\; \forall\, v \in V$
- *indefinita* se non è semidefinita positiva né semidefinita negativa.

La definizione 2 è ben posta in virtù dell'osservazione 1-(ii).

Definizione 3. Sia $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})$. Si dice *matrice complessa coniugata di* A la matrice i cui elementi sono i complessi coniugati dei rispettivi elementi di A, cioè la matrice $\overline{A} := (\bar{a}_{ij})$. Si dice *matrice trasposta coniugata di* A la matrice ottenuta effettuando la trasposta di A e sostituendo a ciascun elemento il rispettivo complesso coniugato, cioè ${}^t\overline{A} := (\bar{a}_{ji})$.

Definizione 4. Una matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})$ si dice *hermitiana* se $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ per ogni $1 \leq i, j \leq n$.

Osservazione 2. Sia $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})$ una matrice hermitiana. Dalla definizione 4 segue che

(i) ${}^t\overline{A} = A$

(ii) $a_{ii} \in \mathbb{R}$ per ogni $1 \leq i \leq n$

Osservazione 3. Dall'osservazione 2-(i) segue immediatamente che ogni matrice simmetrica a coefficienti reali è una particolare matrice hermitiana.

Definizione 5. Siano V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale, $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base di V e sia $h \colon V \times V \to \mathbb{C}$ una forma hermitiana. La matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})$ tale che $a_{ij} = h(e_i, e_j)$ per ogni $1 \leq i, j \leq n$ si dice la *matrice associata a* h *rispetto alla base* e e si denota $\mathrm{M}_e(h)$.

Osservazione 4. Siano V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale, $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base di V e sia $h \colon V \times V \to \mathbb{C}$ una forma hermitiana. Allora $\mathrm{M}_e(h)$ è una matrice hermitiana.

Dimostrazione. L'asserto segue dalla definizione 5 e dalla proprietà FH4 delle forme hermitiane. □

Osservazione 5. Siano V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale, $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base di V e sia $h \colon V \times V \to \mathbb{C}$ una forma hermitiana. Siano $v, w \in V$, $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, $w = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$ e siano $x = {}^t(x_1 \cdots x_n)$, $y = {}^t(y_1 \cdots y_n)$. Allora la matrice associata a h rispetto alla base e calcola h, cioè $h(v, w) = {}^tx\mathrm{M}_e(h)\bar{y}$.

Dimostrazione. Basta osservare che, per le proprietà delle forme hermitiane, vale la relazione

$$h(v, w) = h\Big(\sum_{i=1}^n x_ie_i, \sum_{j=1}^n y_je_j\Big) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i\bar{y}_j h(e_i, e_j) = {}^tx\mathrm{M}_e(h)\bar{y}$$ □

Definizione 6. Siano V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale, $h \colon V \times V \to \mathbb{C}$ una forma hermitiana e siano $v, w \in V$. Si dice che v *è ortogonale a* w *rispetto a* h e si denota $v \perp_h w$ se $h(v, w) = 0$. Sia inoltre $S \subseteq V$ un insieme. Si dice l'*ortogonale di* S *rispetto a* h l'insieme

$$S^{\perp_h} := \{\, v \in V \mid v \perp_h w \quad \forall w \in S \,\}$$

Per semplificare la notazione, si scrive $v \perp w$ anziché $v \perp_h w$ e l'ortogonale di S rispetto a h si denota $S^\perp$. Inoltre, se $S = \{s\}$ per un qualche $s \in V$, l'ortogonale di S rispetto a h si denota anche $s^\perp$.

Osservazione 6. Siano V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale, $h \colon V \times V \to \mathbb{C}$ una forma hermitiana e sia $S \subseteq V$ un insieme. Si dimostra facilmente che $S^\perp$ è un sottospazio vettoriale di V.

Definizione 7. Sia V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale e sia $h \colon V \times V \to \mathbb{C}$ una forma hermitiana. Un vettore $v \in V$ si dice *isotropo rispetto a* h se $v \perp v$, cioè se $h(v, v) = 0$.

Definizione 8. Siano V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale, $h \colon V \times V \to \mathbb{C}$ una forma hermitiana e siano $v, w \in V$. Se v non è isotropo rispetto a h, si dice il *coefficiente di Fourier di* w *rispetto a* v lo scalare

$$a_v(w) := \frac{h(w, v)}{h(v, v)}$$

Definizione 9. Sia V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale e sia $h \colon V \times V \to \mathbb{C}$ una forma hermitiana. Una base $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ di V si dice *ortogonale* o *diagonalizzante rispetto a* h se $h(e_i, e_j) = 0 \;\forall 1 \leq i \neq j \leq n$ oppure, equivalentemente, se $\mathrm{M}_e(h)$ è una matrice diagonale.

Teorema 1 (Diagonalizzazione di forme hermitiane)**.** *Sia V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale di dimensione finita $n \geq 1$ e sia $h \colon V \times V \to \mathbb{C}$ una forma hermitiana. Allora esiste una base di V ortogonale rispetto a h.*

La dimostrazione del teorema 1 è analoga a quella del teorema 1 della sezione 1.6.

Definizione 10. Sia V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale. Una forma hermitiana su V definita positiva si dice un *prodotto hermitiano su V*. Se su V è assegnato un prodotto hermitiano, V si dice uno *spazio vettoriale hermitiano*. In generale, il prodotto hermitiano di due vettori $v, w \in V$ si denota $\langle v, w \rangle$.

Esempio 1. Siano $x, y \in \mathbb{C}^n$, $x = {}^t(x_1 \cdots x_n)$, $y = {}^t(y_1 \cdots y_n)$. Ponendo

$$x \cdot y := {}^t x \bar{y} = x_1 \bar{y}_1 + \cdots + x_n \bar{y}_n$$

si definisce un prodotto hermitiano, detto il *prodotto hermitiano standard su $\mathbb{C}^n$*. Munito del prodotto hermitiano standard, $\mathbb{C}^n$ viene detto *n-spazio vettoriale hermitiano.*

Osservazione 7. Gli spazi vettoriali hermitiani sono l'analogo complesso degli spazi vettoriali euclidei e quindi la teoria sviluppata in quel caso si generalizza a essi con pochi cambiamenti. Per esempio, in uno spazio vettoriale hermitiano le nozioni di *norma*, di *base ortonormale* e di *proiezione ortogonale* si definiscono esattamente come in uno spazio vettoriale euclideo. Dal teorema 1 segue immediatamente che ogni spazio vettoriale hermitiano di dimensione finita $n \geq 1$ ammette una base ortonormale, ottenuta a partire da una base ortogonale normalizzandone gli elementi, cioè dividendo ogni vettore della base per la sua norma. Inoltre, il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt si estende senza cambiamenti agli spazi vettoriali hermitiani.

Teorema 2 (Disuguaglianza di Schwarz)**.** *Sia V uno spazio vettoriale hermitiano e siano $v, w \in V$. Allora*

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$$

Inoltre, l'uguaglianza sussiste se e solo se $v \parallel w$.

Dimostrazione. Innanzitutto, se $w = \mathbf{0}$ l'asserto è ovvio, poiché sono uguali a 0 entrambi i membri della disuguaglianza. Posso dunque supporre che $w \neq \mathbf{0}$. Osservo che, per ogni $a, b \in \mathbb{C}$, vale la relazione

$$0 \leq \langle av + bw, av + bw \rangle = a\bar{a}\langle v, v \rangle + a\bar{b}\langle v, w \rangle + b\bar{a}\langle w, v \rangle + b\bar{b}\langle w, w \rangle$$

Inoltre, per definizione di prodotto hermitiano (si veda anche la definizione 2) l'uguaglianza sussiste se e solo se $av + bw = \mathbf{0}$, cioè se e solo se $v \parallel w$. Prendendo $a := \langle w, w \rangle$, $b := -\langle v, w \rangle$ e osservando che $a \in \mathbb{R}$ in virtù dell'osservazione 1-(ii), si ottiene che

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle w, w \rangle^2 \langle v, v \rangle - \langle w, w \rangle \overline{\langle v, w \rangle} \langle v, w \rangle - \langle v, w \rangle \langle w, w \rangle \langle w, v \rangle + \langle v, w \rangle \overline{\langle v, w \rangle} \langle w, w \rangle \\ &= \langle w, w \rangle^2 \langle v, v \rangle - \langle v, w \rangle \langle w, w \rangle \langle w, v \rangle = \langle w, w \rangle^2 \langle v, v \rangle - \langle w, w \rangle \langle v, w \rangle \overline{\langle v, w \rangle} \end{aligned}$$

Poiché $w \neq \mathbf{0}$, si ha che $\langle w, w \rangle > 0$ ancora per definizione di prodotto hermitiano e, dividendo quindi per tale valore ambo i membri della disuguaglianza ottenuta, si ottiene che

$$0 \leq \langle w, w \rangle \langle v, v \rangle - |\langle v, w \rangle|^2 \quad \iff \quad |\langle v, w \rangle|^2 \leq \langle w, w \rangle \langle v, v \rangle$$

Dunque, estraendo la radice quadrata di primo e secondo membro, si ottiene la tesi. □

Proposizione 1. *Sia V uno spazio vettoriale hermitiano. La norma soddisfa le seguenti proprietà:*

N1 $\|v\| \geq 0 \ \forall\, v \in V$ e $\|v\| = 0 \iff v = \mathbf{0}$ (*positività e non degenerazione*)

N2 $\|cv\| = |c| \|v\| \ \forall\, v \in V, c \in \mathbb{C}$ (*omogeneità*)

N3 $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \ \forall\, v, w \in V$ (*disuguaglianza triangolare*)

Dimostrazione. Siano $v, w \in V$ e sia $c \in \mathbb{C}$.

N1 $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ per definizione di norma e $\sqrt{\langle v, v \rangle} \geq 0$ perché $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$ in virtù dell'osservazione 1-(ii). Inoltre, $\|v\| = 0$ se e solo se $\langle v, v \rangle = 0$, cioè se e solo se $v = \mathbf{0}$.

N2 $\|cv\| = \sqrt{\langle cv, cv \rangle} = \sqrt{c\bar{c}\langle v, v \rangle} = \sqrt{c\bar{c}}\sqrt{\langle v, v \rangle} = |c|\|v\|$.

N3 Innanzitutto osservo che, dato un qualsiasi numero complesso $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, vale la disuguaglianza $z + \bar{z} \leq 2|z|$. Infatti

$$z + \bar{z} = a + ib + a - ib = 2a \leq 2\sqrt{a^2 + b^2} = 2|z|$$

Ma allora da questa stima e dalla disuguaglianza di Schwarz segue che

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= \|v\|^2 + \langle v, w \rangle + \overline{\langle v, w \rangle} + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2|\langle v, w \rangle| + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 \\ &= \big(\|v\| + \|w\|\big)^2 \end{aligned}$$

Dunque, passando alla radice quadrata e sfruttando la positività della norma (proprietà N1) posso concludere che $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$. □

Definizione 11. Sia V uno spazio vettoriale hermitiano. Un operatore lineare T di V si dice *unitario* se

$$\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall\, v, w \in V$$

Teorema 3 (Prima caratterizzazione dell'operatore unitario)**.** *Sia V uno spazio vettoriale hermitiano e sia $T\colon V \to V$ un'applicazione. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(i) *T è un operatore unitario di V.*

(ii) *T è un operatore lineare di V tale che $\|T(v)\| = \|v\|$ per ogni $v \in V$.*

Inoltre, se $\dim V < \infty$, allora le seguenti condizioni sono equivalenti a (i) *e* (ii)*:*

(iii) *$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e $\|T(v) - T(w)\| = \|v - w\|$ per ogni $v, w \in V$.*

(iv) *T è un operatore lineare di V e, scelta arbitrariamente una base ortonormale $\{e_1, \dots, e_n\}$ di V, si ha che $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ è una base ortonormale di V.*

(v) *T è un operatore lineare di V ed esiste almeno una base ortonormale $\{e_1, \dots, e_n\}$ di V tale che $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ sia una base ortonormale di V.*

La dimostrazione del teorema 3 ricalca esattamente quella del teorema 1 della sezione 1.14. Inoltre, come nel caso analogo degli spazi vettoriali euclidei, si dimostra che ogni operatore unitario in uno spazio vettoriale hermitiano di dimensione finita è un automorfismo di quello spazio.

Corollario 1. *Sia V uno spazio vettoriale hermitiano e sia T un operatore unitario di V.*

(i) *Se λ è un autovalore di T, allora $|\lambda| = 1$.*

(ii) *Se v, v' sono autovettori di T associati ad autovalori λ, λ' tali che $\lambda \neq \lambda'$, allora $v \perp v'$.*

Dimostrazione.

(i) Per definizione, se λ è un autovalore di T allora $\exists\, v \in V$, $v \neq \mathbf{0} \mid T(v) = \lambda v$. Dall'omogeneità della norma (proposizione 1-N2) e dal teorema 3-(ii) segue che

$$\|v\| = \|T(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$$

Siccome $v \neq \mathbf{0}$, anche $\|v\| \neq 0$ per la non degenerazione della norma (proposizione 1-N1). Posso quindi dividere entrambi i membri dell'equazione ottenuta per $\|v\|$, ottenendo che $|\lambda| = 1$.

(ii) Dalle definizioni di operatore unitario e di autovettore di un endomorfismo segue che

$$\langle v, v' \rangle = \langle T(v), T(v') \rangle = \langle \lambda v, \lambda' v' \rangle = \lambda\overline{\lambda}' \langle v, v' \rangle$$

Se per assurdo fosse $\langle v, v' \rangle \neq 0$ allora, dividendo per tale quantità ambo i membri della relazione precedente, si avrebbe che $\lambda\overline{\lambda}' = 1$. Equivalentemente, varrebbe che $\lambda\overline{\lambda}'\lambda' = \lambda'$, cioè $\lambda|\lambda'|^2 = \lambda'$. Tuttavia, per il punto (i) appena dimostrato, so che $|\lambda'| = 1$ perché λ' è un autovalore di T. Di conseguenza, si arriverebbe ad affermare che $\lambda = \lambda'$, contraddicendo le ipotesi. In conclusione, dunque, deduco che $\langle v, v' \rangle = 0$ e quindi che $v \perp v'$. □

Definizione 12. Una matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ si dice *unitaria* se ${}^t\overline{A}A = I_n$. L'insieme

$$\mathrm{U}(n) := \left\{ A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \;\middle|\; A \text{ è unitaria} \right\}$$

si dice *gruppo unitario di ordine n.*

Osservazione 8. Dalla definizione 12 segue immediatamente che, se A è una matrice unitaria, allora

$$\det {}^t\overline{A} \det A = \det {}^t\overline{A}A = \det I_n = 1$$

In particolare, $\det A \neq 0$ e quindi $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Di conseguenza, si può definire in modo equivalente una matrice unitaria come matrice che ha per inversa la propria trasposta coniugata.

Osservazione 9. Si dimostra che $\mathrm{U}(n)$ è un sottogruppo di $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Proposizione 2. *Siano V uno spazio vettoriale hermitiano di dimensione finita $n \geq 1$, $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortonormale di V e sia $T \in \mathrm{End}(V)$. Allora T è unitario se e solo se $\mathrm{M}_e(T) \in \mathrm{U}(n)$.*

Dimostrazione. Sia $A = \mathrm{M}_e(T)$. Come nel caso analogo degli spazi vettoriali euclidei, rispetto a una base ortonormale il prodotto hermitiano di due vettori coincide con il prodotto hermitiano standard dei vettori colonna delle loro coordinate. Di conseguenza, dato che $A_{(1)}, \ldots, A_{(n)}$ sono i vettori delle componenti di $T(e_1), \ldots, T(e_n)$ nella base e e ricordando che $\dim V < \infty$ per ipotesi, valgono le seguenti equivalenze:

$$\begin{aligned}
T \text{ è unitario} &\iff \{T(e_1), \ldots, T(e_n)\} \text{ è una base ortonormale di } V \text{ (teorema 3-(iv))} \\
&\iff \langle T(e_i), T(e_j) \rangle = \delta_{ij} \text{ per ogni } 1 \leq i, j \leq n \\
&\iff A_{(i)} \cdot A_{(j)} = \delta_{ij} \text{ per ogni } 1 \leq i, j \leq n \\
&\iff {}^tA^{(i)}\overline{A}_{(j)} = \delta_{ij} \text{ per ogni } 1 \leq i, j \leq n \\
&\iff {}^tA\overline{A} = I_n \\
&\iff {}^t\overline{A}A = I_n \\
&\iff A \in \mathrm{U}(n)
\end{aligned}$$

□

Osservazione 10. La principale differenza tra operatori unitari nel caso reale e in quello complesso riguarda la loro diagonalizzabilità. Infatti, non tutti gli operatori unitari nel caso reale sono diagonalizzabili, come mostra il seguente esempio. Considero l'operatore unitario associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Si verifica facilmente che il polinomio caratteristico di A non ammette radici reali, infatti

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - T & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} - T \end{vmatrix} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - T\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} > 0 \quad \forall T \in \mathbb{R}$$

Non è dunque possibile costruire una base diagonalizzante per A. Tuttavia, osservo che tale polinomio ammette radici complesse per il teorema fondamentale dell'algebra. In effetti, con il seguente teorema si afferma che ogni operatore unitario è diagonalizzabile nel caso complesso.

Teorema 4. *Sia V uno spazio vettoriale hermitiano di dimensione finita $n \geq 1$ e sia T un operatore unitario di V. Allora esiste una base ortonormale di V che diagonalizza T.*

Dimostrazione. Si procede per induzione su n. La base di induzione è banale, in quanto per $n = 1$ basta normalizzare un qualsiasi vettore non nullo di V per ottenere una base ortonormale che diagonalizza T. Nel passo di induzione assumo quindi $n \geq 2$ e suppongo che il teorema sia vero in ogni spazio vettoriale hermitiano di dimensione $n-1$. Innanzitutto, osservo che il polinomio caratteristico di T è un polinomio a coefficienti complessi di grado n, perciò $\exists\, \lambda \in \mathbb{C}$ tale che $P_T(\lambda) = 0$ in virtù del teorema fondamentale dell'algebra. Essendo una radice del polinomio caratteristico, λ è un autovalore di T, quindi

$$\exists\, v \in V,\ v \neq \mathbf{0} \;\big|\; T(v) = \lambda v$$

A questo punto, definendo $e_1 := \frac{v}{\|v\|}$, si ottiene un autovettore di lunghezza 1 associato a λ. Ovviamente, anche $e_1 \neq \mathbf{0}$ e quindi, per un risultato analogo all'osservazione 5 della sezione 1.4, posso decomporre

$$V = \langle e_1 \rangle \oplus e_1^{\perp}$$

Ponendo per semplicità $W := e_1^{\perp}$, per la formula di Grassmann si ha che $\dim W = n - 1$. Inoltre, W è banalmente uno spazio vettoriale hermitiano perché la restrizione del prodotto hermitiano di V su W è ancora una forma hermitiana definita positiva.

Ora voglio dimostrare che $T\big|_W \in \mathrm{End}(W)$, cioè che $T(w) \in W$ per ogni $w \in W$. Siccome $W = e_1^{\perp}$, basta dimostrare che $T(w) \perp e_1$ per un fissato $w \in W$. Sfruttando la definizione data di W e l'ipotesi che T sia un operatore unitario, osservo che

$$0 = \langle w, e_1 \rangle = \langle T(w), T(e_1) \rangle = \langle T(w), \lambda e_1 \rangle = \bar{\lambda} \langle T(w), e_1 \rangle$$

Tuttavia, dato che λ è un autovalore di un operatore unitario, $|\lambda| = 1$ per il corollario 1-(i). In particolare, $\bar{\lambda} \neq 0$ e di conseguenza $\langle T(w), e_1 \rangle = 0$. Inoltre, $T\big|_W$ è banalmente un operatore unitario di W in quanto, per ogni $w_1, w_2 \in W$, vale la relazione

$$\langle T\big|_W(w_1), T\big|_W(w_2) \rangle = \langle T(w_1), T(w_2) \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$$

Ma allora, per ipotesi induttiva, esiste una base ortonormale $e' = \{e_2, \ldots, e_n\}$ di W che diagonalizza $T\big|_W$. Di conseguenza, $\exists\, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tali che $T\big|_W(e_i) = \lambda_i e_i$ per ogni $2 \leq i \leq n$. Equivalentemente, si ha che $T(e_i) = \lambda_i e_i$ per ogni $2 \leq i \leq n$, quindi $e_2, \ldots, e_n$ sono autovettori di T. Riepilogando, $e_2, \ldots, e_n \perp e_1$ in quanto elementi di W, e_1 è un autovettore di lunghezza 1 per costruzione, mentre $e_2, \ldots, e_n$ sono autovettori di lunghezza 1 fra loro ortogonali per ipotesi induttiva. In conclusione, dunque, posso affermare che $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ è una base ortonormale di autovettori di T, cioè una base ortonormale di V che diagonalizza T. $\square$

Corollario 2. *Sia $A \in \mathrm{U}(n)$. Allora $\exists\, M \in \mathrm{U}(n)$ tale che $M^{-1}AM = {}^t\overline{M}AM$ sia una matrice diagonale.*

Dimostrazione. Considero lo spazio vettoriale hermitiano $\mathbb{C}^n$ munito del prodotto hermitiano standard e della base canonica $E = \{E_1, \ldots, E_n\}$. Ovviamente, la base canonica è una base ortonormale rispetto al prodotto hermitiano standard. Osservo che l'operatore lineare di $\mathbb{C}^n$ definito da A, cioè l'applicazione T_A definita dalla relazione $T_A(x) = Ax$ per ogni $x \in \mathbb{C}^n$, è un operatore unitario perché $A = \mathrm{M}_E(T_A)$ è una matrice unitaria (proposizione 2). Ma allora, essendo verificate tutte le ipotesi del teorema 4, esiste una base ortonormale $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ di $\mathbb{C}^n$ tale che $\mathrm{M}_e(T_A)$ sia una matrice diagonale. A questo punto basta definire $M := \mathrm{M}_{E,e}(\mathrm{id})$. Infatti, adattando la dimostrazione della proposizione 3 della sezione 1.7 al caso complesso, si deduce facilmente che una matrice del cambiamento di coordinate tra basi ortonormali è unitaria. Inoltre, M diagonalizza A perché ovviamente vale la relazione

$$\mathrm{M}_e(T_A) = \mathrm{M}_{e,E}(\mathrm{id})\mathrm{M}_E(T_A)\mathrm{M}_{E,e}(\mathrm{id}) = M^{-1}AM$$ $\square$

Osservazione 11. Dal corollario 2 segue immediatamente che ogni matrice $A \in \mathrm{O}(n)$ è diagonalizzabile nel campo dei complessi, perché $\mathrm{O}(n)$ è un sottogruppo di $\mathrm{U}(n)$.

Definizione 13. In uno spazio vettoriale hermitiano V, un operatore lineare T di V si dice *hermitiano* se

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle \quad \forall\, v, w \in V$$

Proposizione 3. *Siano V uno spazio vettoriale hermitiano di dimensione finita $n \geq 1$, $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortonormale di V e sia $T \in \mathrm{End}(V)$. Allora T è hermitiano se e solo se $\mathrm{M}_e(T)$ è hermitiana.*

Dimostrazione. Sia $A = \mathrm{M}_e(T)$, $A = (a_{ij})$ e siano $v, w \in V$, $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, $w = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$ due vettori qualsiasi. Siano inoltre $x = {}^t(x_1 \cdots x_n)$, $y = {}^t(y_1 \cdots y_n)$. Siccome $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ è una base ortonormale di V per ipotesi, il prodotto hermitiano di due vettori nella base e coincide con il prodotto hermitiano standard dei vettori colonna delle loro componenti. Di conseguenza, valgono le relazioni

$$\langle T(v), w \rangle = Ax \cdot y = {}^t(Ax)\bar{y} = {}^t x\, {}^t A \bar{y}\,, \quad \langle v, T(w) \rangle = x \cdot Ay = {}^t x \overline{Ay} = {}^t x \bar{A} \bar{y}$$

A questo punto, l'asserto deriva dalle seguenti equivalenze:

$$\begin{aligned} T \text{ è hermitiano} &\iff \langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle \text{ per definizione} \\ &\iff {}^t x\, {}^t A \bar{y} = {}^t x \bar{A} \bar{y} \text{ per le relazioni precedenti} \\ &\iff {}^t A = \bar{A} \text{ per arbitrarietà di } v, w \in V \\ &\iff {}^t \bar{A} = A \\ &\iff A \text{ è hermitiana} \end{aligned}$$

Va notato che, quando si assume T hermitiano, la terza implicazione è giustificata perché, facendo variare v e w fra i vettori della base e, si ottiene che $a_{ji} = \bar{a}_{ij}$ al variare di $1 \leq i, j \leq n$. □

Teorema 5 (spettrale)**.** *Sia V uno spazio vettoriale hermitiano di dimensione finita $n \geq 1$ e sia T un operatore hermitiano di V. Allora esiste una base ortonormale di V che diagonalizza T.*

La dimostrazione del teorema spettrale nel caso complesso è identica a quella dell'analogo risultato per spazi vettoriali euclidei, pertanto è omessa.

Proposizione 4. *Sia V uno spazio vettoriale hermitiano e sia T un operatore hermitiano di V. Allora tutti gli autovalori di T sono reali.*

Dimostrazione. Se λ è un autovalore qualsiasi di T, allora $\exists\, v \in V$, $v \neq \mathbf{0} \mid T(v) = \lambda v$. Osservo che

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle T(v), v \rangle = \langle v, T(v) \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle$$

Ora, siccome V è uno spazio vettoriale hermitiano, su V è assegnato un prodotto hermitiano, cioè una forma hermitiana definita positiva. Di conseguenza, $\langle v, v \rangle > 0$ perché $v \neq \mathbf{0}$. Ma allora dalla relazione precedente deduco che $\lambda = \bar{\lambda}$ e quindi posso concludere che $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Osservazione 12. Sia V un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale e sia $h\colon V \times V \to \mathbb{C}$ una forma hermitiana. Separando la parte reale da quella immaginaria, per ogni $v, w \in V$ si ha che

$$h(v, w) = s(v, w) + ia(v, w)$$

per opportune applicazioni $s, a\colon V \times V \to \mathbb{R}$. Dalle proprietà delle forme hermitiane segue immediatamente che s e a sono forme bilineari su V. Infatti, fissati $v, v', w, w' \in V$, $c \in \mathbb{R}$, esse soddisfano:

FB1
$$\begin{aligned} s(v+v', w) + ia(v+v', w) &= h(v+v', w) \\ &= h(v, w) + h(v', w) \\ &= s(v, w) + ia(v, w) + s(v', w) + ia(v', w) \end{aligned}$$

FB2
$$\begin{aligned} s(v, w+w') + ia(v, w+w') &= h(v, w+w') \\ &= h(v, w) + h(v, w') \\ &= s(v, w) + ia(v, w) + s(v, w') + ia(v, w') \end{aligned}$$

FB3
$$\begin{aligned} s(cv, w) + ia(cv, w) &= h(cv, w) = ch(v, w) = cs(v, w) + ica(v, w) \\ s(v, cw) + ia(v, cw) &= h(v, cw) = ch(v, w) = cs(v, w) + ica(v, w) \end{aligned}$$

Inoltre, dalla proprietà FH4 delle forme hermitiane segue che

$$s(v,w) + ia(v,w) = h(v,w) = \overline{h(w,v)} = s(w,v) - ia(w,v)$$

Di conseguenza, $s(v,w) = s(w,v)$ mentre $a(v,w) = -a(w,v)$, il che vale a dire che s è una forma bilineare simmetrica, a è una forma bilineare antisimmetrica. Inoltre, esplicitando le identità $h(iv,w) = ih(v,w)$ e $h(v,iw) = -ih(v,w)$ si ricava che

$$s(v,w) = a(iv,w) = -a(v,iw)\,, \qquad a(v,w) = -s(iv,w) = s(v,iw) \tag{9}$$

per cui s individua a e a individua s. Infine, esplicitando l'uguaglianza $h(iv,iw) = h(v,w)$ si ottiene che

$$s(iv,iw) = s(v,w)\,, \qquad a(iv,iw) = a(v,w) \tag{10}$$

Allora, data una forma bilineare simmetrica $s\colon V \times V \to \mathbb{R}$ che soddisfi le condizioni (9) e (10), ponendo

$$h(v,w) := s(v,w) + is(v,iw)$$

si definisce una forma hermitiana su V. Infatti, fissati $v, v', w, w' \in V$, $c \in \mathbb{C}$, utilizzando le proprietà delle forme bilineari e le condizioni (9) e (10) si verifica facilmente che tale applicazione soddisfa:

FH1
$$\begin{aligned} h(v+v',w) &= s(v+v',w) + is(v+v',iw) \\ &= s(v,w) + s(v',w) + is(v,iw) + is(v',iw) \\ &= h(v,w) + h(v',w) \end{aligned}$$

FH2
$$\begin{aligned} h(v,w+w') &= s(v,w+w') + is(v,iw+iw') \\ &= s(v,w) + s(v,w') + is(v,iw) + is(v,iw') \\ &= h(v,w) + h(v,w') \end{aligned}$$

FH3
$$\begin{aligned} h(cv,w) &= s(cv,w) + is(cv,iw) \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \exists\, a,b \in \mathbb{R} \text{ tali che } c = a+ib}}{=} s(av,w) + s(ibv,w) + is(av,iw) + is(ibv,iw) \\ &= as(v,w) + bs(iv,w) + ias(v,iw) + ibs(iv,iw) \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ (9) \text{ e } (10)}}{=} as(v,w) - bs(v,iw) + ias(v,iw) + ibs(v,w) \\ &= a\big(s(v,w) + is(v,iw)\big) + ib\big(s(v,w) + is(v,iw)\big) \\ &= ah(v,w) + ibh(v,w) \\ &= ch(v,w) \end{aligned}$$

FH4
$$\begin{aligned} h(v,w) &= s(v,w) + is(v,iw) \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ (9)}}{=} s(v,w) - is(iv,w) \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ s \text{ è una forma bilineare simmetrica}}}{=} s(w,v) - is(w,iv) \\ &= \overline{h(w,v)} \end{aligned}$$

Con un procedimento analogo si dimostra che, data una forma bilineare antisimmetrica $a\colon V \times V \to \mathbb{R}$ che soddisfi le condizioni (9) e (10), ponendo

$$h(v,w) := a(iv,w) + ia(v,w)$$

si definisce una forma hermitiana su V.

2 Geometria proiettiva

2.1 Spazi proiettivi

Definizione 1. Sia V un K-spazio vettoriale. L'insieme $\mathbb{P}(V)$ i cui elementi, detti *punti di* $\mathbb{P}(V)$, sono i sottospazi vettoriali di V di dimensione 1 si dice lo *spazio proiettivo associato a* V. Per ogni $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$, il sottospazio generato da v, considerato come un punto di $\mathbb{P}(V)$, si denota $[v]$. Nei casi particolari in cui $K = \mathbb{R}$ oppure $K = \mathbb{C}$, lo spazio proiettivo associato a V si dice uno *spazio proiettivo reale* o *complesso* rispettivamente. La *dimensione di* $\mathbb{P}(V)$ è $\dim \mathbb{P}(V) := \dim V - 1$. In particolare, $\mathbb{P}(V)$ si dice una *retta proiettiva* se $\dim \mathbb{P}(V) = 1$, si dice invece un *piano proiettivo* se $\dim \mathbb{P}(V) = 2$. Infine, per semplificare la notazione, $\mathbb{P}(V)$ si denota $\mathbb{P}$ se non si vuole specificare lo spazio vettoriale al quale è associato.

Osservazione 1. Sia V un K-spazio vettoriale. Considero la seguente relazione di equivalenza su $V \backslash \{\mathbf{0}\}$:

$$v \sim w \iff v \parallel w$$

Si può dare una definizione equivalente di spazio proiettivo associato a V come insieme quoziente, cioè come insieme delle classi di equivalenza della relazione $\sim$, ponendo

$$\mathbb{P}(V) := \left\{ \, [v] \;\middle|\; v \in V,\, v \neq \mathbf{0} \, \right\}$$

Tale definizione alternativa giustifica dunque la notazione con parentesi quadre per i punti di $\mathbb{P}(V)$.

Osservazione 2. Sia V un K-spazio vettoriale e siano $v, w \in V$, $v, w \neq \mathbf{0}$. In virtù della definizione 1, si hanno le seguenti equivalenze:

(i) $[v] = [w] \iff \exists\, \lambda \in K^* \mid v = \lambda w$

(ii) $\mathbb{P}(V) = \varnothing \iff V = \{\mathbf{0}\} \iff \dim V = 0 \iff \dim \mathbb{P}(V) = -1$

(iii) $\mathbb{P}(V) = \{[v]\} \iff V = \langle v \rangle \iff \dim V = 1 \iff \dim \mathbb{P}(V) = 0$

Da questo punto in poi, per semplicità, si assume sempre l'ipotesi di dimensione finita sugli spazi vettoriali che definiscono spazi proiettivi.

Definizione 2. Lo spazio proiettivo associato a K^{n+1} si chiama *n-spazio proiettivo numerico su K* e si denota $\mathbb{P}^n(K)$, o semplicemente $\mathbb{P}^n$ se non vi è possibilità di equivoco. Inoltre, dato un vettore $x \in K^{n+1}$, $x \neq \mathbf{0}$, $x = {}^t(x_0 \cdots x_n)$, il punto corrispondente di $\mathbb{P}^n$ si denota $[x_0, \ldots, x_n]$.

Osservazione 3. Siano $x, y \in K^{n+1}$, $x, y \neq \mathbf{0}$, $x = {}^t(x_0 \cdots x_n)$, $y = {}^t(y_0 \cdots y_n)$. Dalla definizione 2 e dall'osservazione 2-(i) segue banalmente che

$$[x_0, \ldots, x_n] = [y_0, \ldots, y_n] \iff \exists\, \lambda \in K^* \mid x_i = \lambda y_i \;\; \forall\, 0 \leq i \leq n$$

Definizione 3. Sia V un K-spazio vettoriale e sia $e = \{e_0, \ldots, e_n\}$ una base di V. Si dice che e definisce un *sistema di coordinate omogenee* (o un *riferimento proiettivo*) *su* $\mathbb{P}(V)$. Tale sistema si denota $e_0 \ldots e_n$. Sia inoltre $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$, $v = x_0 e_0 + \cdots + x_n e_n$. Gli scalari $x_0, \ldots, x_n$ si dicono le *coordinate omogenee di* $[v]$ *rispetto al riferimento* $e_0 \ldots e_n$ e il punto $[v]$ si denota $\mathrm{P} = \mathrm{P}[x_0, \ldots, x_n]$. I punti

$$\mathrm{F}_0 = \mathrm{F}_0[1, 0, \ldots, 0] = [e_0]\,, \quad \mathrm{F}_1 = \mathrm{F}_1[0, 1, 0, \ldots, 0] = [e_1]\,, \quad \ldots\,, \quad \mathrm{F}_n = \mathrm{F}_n[0, \ldots, 0, 1] = [e_n]$$

si dicono i *punti fondamentali di* $\mathbb{P}(V)$ *nel riferimento* $e_0 \ldots e_n$, mentre il punto

$$\mathrm{U} = \mathrm{U}[1, \ldots, 1] = [e_0 + \cdots + e_n]$$

si dice il *punto unità di* $\mathbb{P}(V)$ *nel riferimento* $e_0 \ldots e_n$.

Osservazione 4. Siano $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo, $e_0 \ldots e_n$ un sistema di coordinate omogenee su $\mathbb{P}$ e siano $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{P}$, $\mathrm{P} = \mathrm{P}[x_0, \ldots, x_n]$, $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}[y_0, \ldots, y_n]$. Dalla definizione 3 segue che l'osservazione 2-(i) si può esprimere, in maniera del tutto equivalente, nella forma

$$\mathrm{P} = \mathrm{Q} \iff \exists\, \lambda \in K^* \mid x_i = \lambda y_i \;\; \forall\, 0 \leq i \leq n$$

Osservazione 5. Siano $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo, $e_0 \dots e_n$ un sistema di coordinate omogenee su $\mathbb{P}$ e sia $\mathrm{P} \in \mathbb{P}$, $\mathrm{P} = \mathrm{P}[x_0, \dots, x_n]$. Fissato $\lambda \in K^*$, il punto P ha anche coordinate omogenee $\lambda x_0, \dots, \lambda x_n$ nel riferimento proiettivo $e_0 \dots e_n$ in virtù dell'osservazione 4, ma allora ha coordinate omogenee $x_0, \dots, x_n$ nel riferimento $\lambda e_0 \dots \lambda e_n$. Le coordinate omogenee $x_0, \dots, x_n$ individuano dunque lo stesso punto nei due riferimenti. Per questo motivo si considerano identici due sistemi di coordinate omogenee se sono definiti da basi di V proporzionali.

Definizione 4. Sia $\{E_0, \dots, E_n\}$ la base canonica di K^{n+1}. Il riferimento proiettivo $E_0 \dots E_n$ su $\mathbb{P}^n(K)$ si dice il *riferimento proiettivo standard* (o *canonico*) *di* $\mathbb{P}^n(K)$. Sia inoltre $[v] \in \mathbb{P}^n(K)$. Le coordinate omogenee di $[v]$ rispetto al riferimento $E_0, \dots, E_n$ si dicono le *coordinate omogenee standard di* $[v]$.

Definizione 5. Sia $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo. Un insieme S si dice un *sottospazio proiettivo* (o un *sottospazio lineare*) *di* $\mathbb{P}$ se esiste un sottospazio vettoriale $W \subseteq V$ tale che $S = \mathbb{P}(W)$. La *codimensione di* S è il numero reale $\operatorname{codim} S := \dim \mathbb{P} - \dim S$. Inoltre, S si dice un *iperpiano di* $\mathbb{P}$ se $\operatorname{codim} S = 1$.

Lemma 1. *Sia* $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ *uno spazio proiettivo e sia* $S = \mathbb{P}(W)$ *un sottospazio proiettivo di* $\mathbb{P}$. *Allora*

(i) *fissato* $[v] \in \mathbb{P}$, *vale che* $[v] \in S$ *se e solo se* $v \in W$.

(ii) $\dim S \leq \dim \mathbb{P}$ *e inoltre* $\dim S = \dim \mathbb{P}$ *se e solo se* $S = \mathbb{P}$.

(iii) *fissato un sottospazio proiettivo* $S' = \mathbb{P}(W')$ *di* $\mathbb{P}$, *vale che* $S \subseteq S'$ *se e solo se* $W \subseteq W'$.

(iv) $\operatorname{codim} S = \operatorname{codim} W$.

Dimostrazione.

(i) Ricordando l'osservazione 2-(i), l'asserto segue banalmente dalle seguenti equivalenze:

$$\begin{aligned} [v] \in S &\iff \exists\, w \in W,\ w \neq \mathbf{0} \mid [v] = [w] \\ &\iff \exists\, w \in W,\ w \neq \mathbf{0},\ \lambda \in K^* \mid v = \lambda w \\ &\iff v \in W \end{aligned}$$

(ii) Dalla definizione di dimensione di uno spazio proiettivo segue immediatamente che

$$\dim S = \dim W - 1 \leq \dim V - 1 = \dim \mathbb{P}$$

Inoltre, l'uguaglianza sussiste se e solo se $\dim W = \dim V$, cioè se e solo se $W = V$ perché $W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale e, quindi, se e solo se $S = \mathbb{P}$.

(iii) Innanzitutto, suppongo che $S \subseteq S'$ e fisso in maniera arbitraria $w \in W$. Se $w = \mathbf{0}$, allora $w \in W'$ perché $W' \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale. Se invece $w \neq \mathbf{0}$, allora $[w] \in S$ e, quindi, $[w] \in S'$ perché sto assumendo $S \subseteq S'$. Dal punto (i) appena dimostrato segue dunque che $w \in W'$ e, per arbitrarietà nella scelta di $w \in W$, posso concludere che $W \subseteq W'$. Viceversa, assumo $W \subseteq W'$ e fisso un punto $[w] \in S$. Di nuovo, per il punto (i) so che $w \in W$, quindi $w \in W'$ perché $W \subseteq W'$ per ipotesi. Ma allora $[w] \in S'$ in quanto $w \neq \mathbf{0}$ e, per arbitrarietà nella scelta di $[w] \in S$, posso dunque concludere che $S \subseteq S'$.

(iv) Dalla definizione di codimensione in uno spazio proiettivo e in uno spazio vettoriale[10] segue che

$$\operatorname{codim} S = \dim \mathbb{P} - \dim S = \dim V - 1 - \dim W + 1 = \dim V - \dim W = \operatorname{codim} W \qquad \square$$

Osservazione 6 (Equazione cartesiana di un iperpiano). Siano $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo, $e_0 \dots e_n$ un sistema di coordinate omogenee su $\mathbb{P}$, $H \subseteq \mathbb{P}$ un iperpiano e sia $\mathrm{P} \in \mathbb{P}$, $\mathrm{P} = \mathrm{P}[x_0, \dots, x_n]$. Allora esiste $(a_0, \dots, a_n) \in K^{n+1}$, $(a_0, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ tale che $\mathrm{P} \in H$ se e solo se $a_0 x_0 + \dots + a_n x_n = 0$.

[10] La codimensione del sottospazio vettoriale $W \subseteq V$ è per definizione $\operatorname{codim} W := \dim V - \dim W$.

Dimostrazione. Innanzitutto, $\exists\, W \subseteq V$ sottospazio vettoriale $\mid H = \mathbb{P}(W)$ per definizione di sottospazio proiettivo. Inoltre, $\operatorname{codim} H = 1$ perché H è un iperpiano per ipotesi. Dal lemma 1-(iv) segue che anche $\operatorname{codim} W = 1$. Di conseguenza, W è definito da un'equazione cartesiana, cioè esiste $(a_0, \dots, a_n) \in K^{n+1}$, $(a_0, \dots, a_n) \neq (0, \dots 0)$ tale che, fissato $v \in V$, $v = x_0e_0 + \dots + x_ne_n$, si abbia che $v \in W$ se e solo se le coordinate di v soddisfano $a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0$. A questo punto, l'asserto segue dal lemma 1-(i) perché, fissato $\mathrm{P} \in \mathbb{P}$, $\mathrm{P} = \mathrm{P}[x_0, \dots, x_n]$, vale che $\mathrm{P} \in H$ se e solo se $v \in W$. □

L'equazione cartesiana di un iperpiano è ben definita, cioè non dipende da una particolare scelta delle coordinate omogenee del punto P. Infatti, dall'osservazione 4 segue che per ogni $\mathrm{Q} \in \mathbb{P}$, $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}[y_0, \dots, y_n]$ tale che $\mathrm{Q} = \mathrm{P}$ si ha che $\exists\, \lambda \in K^* \mid y_i = \lambda x_i$ per ogni $0 \leq i \leq n$. Ma allora

$$a_0y_0 + \dots + a_ny_n = a_0(\lambda x_0) + \dots + a_n(\lambda x_n) = \lambda(a_0x_0 + \dots + a_nx_n) = \lambda 0 = 0$$

Definizione 6. Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo e sia $e_0 \dots e_n$ un sistema di coordinate omogenee su $\mathbb{P}$. Per ogni $0 \leq i \leq n$, l'iperpiano di $\mathbb{P}$ dato da

$$H_i := \left\{\, \mathrm{P} \in \mathbb{P},\, \mathrm{P} = \mathrm{P}[x_0, \dots, x_n] \;\middle|\; x_i = 0 \,\right\}$$

si dice l'*i-esimo iperpiano coordinato di $\mathbb{P}$ nel riferimento $e_0 \dots e_n$*.

Osservazione 7 (Equazioni cartesiane di un sottospazio proiettivo). Siano $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo, $e_0 \dots e_n$ un sistema di coordinate omogenee su $\mathbb{P}$, $S \subseteq \mathbb{P}$ un sottospazio di codimensione $s \geq 1$, $\mathrm{P} \in \mathbb{P}$, $\mathrm{P} = \mathrm{P}[x_0, \dots, x_n]$ e sia $x = {}^t(x_0 \cdots x_n)$. Allora $\exists\, A \in \mathrm{M}_{s,n+1}(K)$, $A = (a_{ij})$ tale che $\mathrm{r}(A) = s$ e tale che

$$\mathrm{P} \in S \iff Ax = \mathbf{0} \iff a_{i0}x_0 + \dots + a_{in}x_n = 0 \;\forall\, 1 \leq i \leq s$$

Dimostrazione. Come prima, $\exists\, W \subseteq V$ sottospazio vettoriale $\mid S = \mathbb{P}(W)$ per definizione di sottospazio proiettivo. Inoltre, dal lemma 1-(iv) segue che $\operatorname{codim} W = s$ perché $\operatorname{codim} S = s$ per ipotesi. Ma allora W è definito da s equazioni cartesiane, cioè esiste $A \in \mathrm{M}_{s,n+1}(K)$ tale che $\mathrm{r}(A) = s$ e tale che, fissato un vettore qualsiasi $v \in V$, $v = x_0e_0 + \dots + x_ne_n$ e detto $x = {}^t(x_0 \cdots x_n)$, si abbia che $v \in W$ se e solo se le coordinate di v soddisfano $Ax = \mathbf{0}$. In conclusione l'asserto segue, come prima, dal lemma 1-(i). Infatti, fissato $\mathrm{P} \in \mathbb{P}$, $\mathrm{P} = \mathrm{P}[x_0, \dots, x_n]$, si ha che $\mathrm{P} \in S$ se e solo se $v \in W$. □

Con un procedimento del tutto analogo a quello seguito prima per l'equazione di un iperpiano, si dimostra che anche le equazioni cartesiane di un generico sottospazio proiettivo sono ben definite.

Osservazione 8. Siano $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo, $e_0 \dots e_n$ un sistema di coordinate omogenee su $\mathbb{P}$, $A \in \mathrm{M}_{m,n+1}(K)$ e sia $r = \mathrm{r}(A)$. Si dimostra facilmente che l'insieme

$$S = \left\{\, \mathrm{P} \in \mathbb{P},\, \mathrm{P} = \mathrm{P}[x_0, \dots, x_n] \;\middle|\; Ax = \mathbf{0},\ \text{con } x = {}^t(x_0 \cdots x_n) \,\right\}$$

è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}$ di codimensione r.

Proposizione 1. *Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo e siano $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{P}$ sottospazi proiettivi. Se $S_1 = \mathbb{P}(W_1)$, $S_2 = \mathbb{P}(W_2)$, allora $S_1 \cap S_2 = \mathbb{P}(W_1 \cap W_2)$. In particolare, $S_1 \cap S_2 \subseteq \mathbb{P}$ è un sottospazio proiettivo.*

Dimostrazione. Sia $[v] \in \mathbb{P}$ un punto qualsiasi. In virtù del lemma 1-(i), valgono le seguenti equivalenze:

$$\begin{aligned} [v] \in S_1 \cap S_2 &\iff [v] \in S_1,\, [v] \in S_2 \\ &\iff v \in W_1,\, v \in W_2 \\ &\iff v \in W_1 \cap W_2 \\ &\iff [v] \in \mathbb{P}(W_1 \cap W_2) \end{aligned}$$

Dal momento che tali relazioni non dipendono da una particolare scelta del punto $[v] \in \mathbb{P}$, posso concludere che $S_1 \cap S_2 = \mathbb{P}(W_1 \cap W_2)$ per doppio contenimento. □

Osservazione 9. Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo e sia $\{S_i\}_{i \in I}$ una collezione di sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}$. Se $S_i = \mathbb{P}(W_i)\ \forall\, i \in I$, allora $\bigcap_{i \in I} S_i = \mathbb{P}\big(\bigcap_{i \in I} W_i\big)$. In particolare, $\bigcap_{i \in I} S_i \subseteq \mathbb{P}$ è un sottospazio proiettivo.

L'osservazione 9 si dimostra facilmente per induzione sull'indice $i \in \mathbb{N}$.

Definizione 7. Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo. Due sottospazi proiettivi $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{P}$ si dicono

- *incidenti* se $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$.
- *sghembi* se $S_1 \cap S_2 = \varnothing$.

Definizione 8. Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo e sia $J \subseteq \mathbb{P}$ un insieme. L'insieme

$$L(J) := \bigcap_{\substack{S \subseteq \mathbb{P} \text{ sottospazio} \\ \text{proiettivo t.c. } J \subseteq S}} S$$

si dice il *sottospazio generato da J*. Siano inoltre $\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t \in \mathbb{P}$. Al fine di semplificare la notazione, il sottospazio generato da $\{\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t\}$ si denota $L(\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t)$.

Osservazione 10. Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo e sia $J \subseteq \mathbb{P}$ un insieme. Dalla definizione 8 e dall'osservazione 9 segue immediatamente che $L(J)$ è il più piccolo sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}$ che contiene J.

Osservazione 11. Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo e sia $J \subseteq \mathbb{P}$ un insieme. Allora $L(J) = J$ se e solo se J è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}$.

Dimostrazione. L'implicazione diretta è banale perché, in virtù dell'osservazione 10, $L(J)$ è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}$ e $J = L(J)$ per ipotesi. Viceversa, suppongo ora che J sia un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}$. Osservo che l'inclusione $J \subseteq L(J)$ è sempre vera per come è definito $L(J)$. L'altra inclusione, invece, è una conseguenza diretta del fatto che J è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}$ che contiene J. Posso dunque concludere che $L(J) = J$ per doppio contenimento. □

Proposizione 2. *Siano $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo, $\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t \in \mathbb{P}$ e siano $v_1, \dots, v_t \in V$ vettori tali che $\mathrm{P}_i = [v_i]$ per ogni $1 \leq i \leq t$. Allora*

(i) $L(\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t) = \mathbb{P}(\langle v_1, \dots, v_t \rangle)$

(ii) $\dim L(\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t) \leq t - 1$

Dimostrazione.

(i) Ricordando i risultati precedenti, basta osservare che

$$\begin{aligned}
L(\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t) &= \bigcap_{\substack{S \subseteq \mathbb{P} \text{ sottospazio proiettivo} \\ \text{t.c. } \mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t \in S}} S && \text{(definizione 8)} \\
&= \bigcap_{\substack{W \subseteq V \text{ sottospazio vettoriale} \\ \text{t.c. } \mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t \in \mathbb{P}(W)}} \mathbb{P}(W) && \text{(lemma 1-(iii))} \\
&= \bigcap_{\substack{W \subseteq V \text{ sottospazio vettoriale} \\ \text{t.c. } v_1, \dots, v_t \in W}} \mathbb{P}(W) && \text{(lemma 1-(i))} \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{\substack{W \subseteq V \text{ sottospazio vettoriale} \\ \text{t.c. } v_1, \dots, v_t \in W}} W \right) && \text{(osservazione 9)} \\
&= \mathbb{P}(\langle v_1, \dots, v_t \rangle)
\end{aligned}$$

(ii) Dalla definizione di dimensione e dal punto (i) appena dimostrato segue immediatamente che

$$\dim L(\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t) = \dim \langle v_1, \dots, v_t \rangle - 1 \leq t - 1$$ □

Definizione 9. Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo e siano $\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t \in \mathbb{P}$. I punti $\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t$ si dicono

- *linearmente indipendenti* se $\dim L(\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t) = t - 1$
- *linearmente dipendenti* se $\dim L(\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t) < t - 1$

Inoltre, $\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t$ si dicono *allineati* se $\dim L(\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t) \leq 1$, *complanari* se $\dim L(\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t) \leq 2$.

Osservazione 12 ($t = 1$). Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo e sia $\mathrm{P} \in \mathbb{P}$. Dall'osservazione 2-(iii) segue che P è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}$ di dimensione 0 e dall'osservazione 11 segue che lo è anche $L(\mathrm{P})$. Dunque P è linearmente indipendente.

Osservazione 13 ($t = 2$). Sia $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo e siano $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2 \in \mathbb{P}$. Allora i punti P_1 e P_2 sono linearmente indipendenti $\iff$ $L(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$ è una retta proiettiva $\iff$ $\mathrm{P}_1 \neq \mathrm{P}_2$.

Dimostrazione. La prima equivalenza segue banalmente dalla definizione 9. Infatti, P_1 e P_2 sono punti linearmente indipendenti se e solo se $\dim L(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2) = 1$, cioè se e solo se $L(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$ è una retta proiettiva. Siano ora $v_1, v_2 \in V$ vettori tali che $\mathrm{P}_1 = [v_1]$, $\mathrm{P}_2 = [v_2]$. Per la proposizione 2-(i), la relazione precedente equivale ad affermare che $\dim \langle v_1, v_2 \rangle = 2$, cioè che v_1 e v_2 sono vettori linearmente indipendenti. Ciò equivale a dire che $v_1 \neq \lambda v_2$ per ogni $\lambda \in K$. Equivalentemente, poiché $v_1 \neq \mathbf{0}$, si ha che $v_1 \neq \lambda v_2$ per ogni $\lambda \in K^*$, il che accade se e solo se $\mathrm{P}_1 \neq \mathrm{P}_2$ per l'osservazione 2-(i). □

Osservazione 14 ($t = 3$). Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo e siano $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3 \in \mathbb{P}$. Allora i punti P_1, P_2 e P_3 sono linearmente indipendenti $\iff$ $L(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ è un piano proiettivo $\iff$ P_1, P_2 e P_3 non sono allineati.

Dimostrazione. L'asserto segue immediatamente dalla definizione 9. Infatti, P_1, P_2 e P_3 sono linearmente indipendenti se e solo se $\dim L(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3) = 2$, cioè se e solo se $L(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ è un piano proiettivo. Dato che questo accade se e solo se $\dim L(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3) > 1$ in virtù della proposizione 2-(ii), quanto detto prima è del tutto equivalente a richiedere che P_1, P_2 e P_3 non siano allineati. □

Osservazione 15. Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo di dimensione $n \geq 0$ e siano $\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t \in \mathbb{P}$. Si verifica facilmente che, se $\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t$ sono punti linearmente indipendenti, allora $t \leq n + 1$. Inoltre, ogni sottoinsieme di $\{\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t\}$ è costituito da punti linearmente indipendenti.

Definizione 10. Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo di dimensione $n \geq 0$ e siano $\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t \in \mathbb{P}$. I punti $\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t$ si dicono *in posizione generale* se sono linearmente indipendenti (in tal caso, $t \leq n+1$) oppure se $t > n+1$ e ogni sottoinsieme di cardinalità $n + 1$ di $\{\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t\}$ è costituito da punti linearmente indipendenti.

Osservazione 16. Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo di dimensione $n \geq 0$ e siano $\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t \in \mathbb{P}$. Se $\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t$ sono punti in posizione generale e $t \geq n + 1$, allora $L(\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t) = \mathbb{P}$.

Dimostrazione. Se $t = n + 1$, allora $\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t$ sono punti linearmente indipendenti perché, per ipotesi, essi sono in posizione generale. In tal caso, si ha che $\dim L(\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t) = n$ e dal lemma 1-(ii) si deduce che $L(\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t) = \mathbb{P}$ perché $L(\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t)$ è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}$. Nel caso in cui $t > n + 1$, invece, un qualsiasi sottoinsieme di cardinalità $n + 1$ di $\{\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t\}$ è costituito da punti linearmente indipendenti per definizione di punti in posizione generale. In particolare, $\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_{n+1}$ sono linearmente indipendenti. Ma allora dall'osservazione 10 e dal lemma 1-(ii) segue che

$$n = \dim L(\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_{n+1}) \leq \dim L(\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t) \leq n$$

Posso dunque concludere che $\dim L(\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t) = n$ e quindi che $L(\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_t) = \mathbb{P}$. □

Osservazione 17. Sia $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo e sia $S \subseteq \mathbb{P}$ un sottospazio proiettivo di dimensione $s \geq 0$. Allora $\exists\, \mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_s \in S$ tali che $L(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_s) = S$.

Dimostrazione. Dato che $S \subseteq \mathbb{P}$ è un sottospazio proiettivo di dimensione $s \geq 0$, esiste un sottospazio vettoriale $W \subseteq V$ di dimensione $s + 1 \geq 1$ tale che $S = \mathbb{P}(W)$. In particolare, posso assumere che W ammetta una base $\{w_0, \dots, w_s\}$ e posso definire $\mathrm{P}_i := [w_i]$ per ogni $0 \leq i \leq s$. Ma allora dal lemma 1-(i) segue che $\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_s \in S$ perché ovviamente $w_0, \dots, w_s \in W$. Di conseguenza, $L(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_s) \subseteq S$ in virtù dell'osservazione 10. A questo punto, per la proposizione 2-(i) si ha che

$$\dim L(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_s) = \dim \langle w_0, \dots, w_s \rangle - 1 = s + 1 - 1 = s$$

Dal lemma 1-(ii) segue dunque che $L(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_s) = S$. □

Osservazione 18 (Equazione cartesiana di una retta per due punti distinti in un piano proiettivo)*.* Siano $\mathbb{P}$ un piano proiettivo, $e_0e_1e_2$ un sistema di coordinate omogenee su $\mathbb{P}$ e siano $\text{P}, \text{Q} \in \mathbb{P}$, $\text{P} = \text{P}[p_0, p_1, p_2]$, $\text{Q} = \text{Q}[q_0, q_1, q_2]$ punti tali che $\text{P} \neq \text{Q}$. Allora l'equazione cartesiana della retta passante per P e Q è

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{vmatrix} = 0$$

Dimostrazione. Innanzitutto, poiché per ipotesi $\text{P} \neq \text{Q}$, per l'osservazione 4 le coordinate omogenee di P e di Q non sono proporzionali, cioè per ogni $\lambda \in K^*$ esiste $0 \leq i \leq 2$ tale che $p_i \neq \lambda q_i$. Di conseguenza

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{pmatrix} = 2$$

In particolare, almeno uno dei minori di ordine 2 di tale matrice è non nullo per il principio dei minori orlati. Ma allora, sviluppando con il metodo di Laplace il determinante che appare nella formula che si vuole dimostrare, si ottiene l'equazione

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} X_0 - \begin{vmatrix} p_0 & p_2 \\ q_0 & q_2 \end{vmatrix} X_1 + \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ q_0 & q_1 \end{vmatrix} X_2 = 0$$

Tale equazione rappresenta un iperpiano di $\mathbb{P}$ perché almeno uno dei coefficienti che vi compaiono è non nullo. Ovviamente, un iperpiano in un piano proiettivo è una retta proiettiva. Ora osservo che la retta r ottenuta contiene i punti P e Q. Infatti, valgono le identità

$$\begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{vmatrix} = 0\,, \quad \begin{vmatrix} q_0 & q_1 & q_2 \\ p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \end{vmatrix} = 0$$

Dunque, per l'osservazione 10 si ha che $L(\text{P}, \text{Q}) \subseteq r$ e, poiché i due sottospazi proiettivi considerati hanno la stessa dimensione, posso concludere che $L(\text{P}, \text{Q}) = r$ in virtù del lemma 1-(ii). □

Osservazione 19 (Equazione cartesiana di un piano per tre punti non allineati in uno spazio proiettivo di dimensione 3)*.* Siano $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo di dimensione 3, $e_0e_1e_2e_3$ un sistema di coordinate omogenee su $\mathbb{P}$ e siano $\text{P}, \text{Q}, \text{R} \in \mathbb{P}$, $\text{P} = \text{P}[p_0, p_1, p_2, p_3]$, $\text{Q} = \text{Q}[q_0, q_1, q_2, q_3]$, $\text{R} = \text{R}[r_0, r_1, r_2, r_3]$ punti non allineati. Allora l'equazione cartesiana del piano passante per P, Q e R è

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} = 0$$

Dimostrazione. Poiché per ipotesi P, Q e R non sono allineati, il sottospazio da essi generato è un piano proiettivo. Da ciò segue che i vettori associati a P, Q e R sono linearmente indipendenti e quindi

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix} = 3$$

In particolare, almeno uno dei minori di ordine 3 di tale matrice è non nullo per il principio dei minori orlati. Con un ragionamento analogo a quello seguito nella dimostrazione precedente, sviluppando con il metodo di Laplace il determinante che appare nella formula che si vuole dimostrare, si ottiene l'equazione

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} X_0 - \begin{vmatrix} p_0 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_2 & q_3 \\ r_0 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} X_1 + \begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_3 \\ r_0 & r_1 & r_3 \end{vmatrix} X_2 - \begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \\ r_0 & r_1 & r_2 \end{vmatrix} X_3 = 0$$

Tale equazione rappresenta un iperpiano di $\mathbb{P}$ perché almeno uno dei coefficienti che vi compaiono è non nullo. Ovviamente, un iperpiano in uno spazio proiettivo di dimensione 3 è un piano proiettivo. A questo punto, basta osservare che il piano p ottenuto contiene i punti P, Q e R. Infatti, valgono le identità

$$\begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} = 0\,, \qquad \begin{vmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} = 0\,, \qquad \begin{vmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} = 0$$

Dunque, per l'osservazione 10 si ha che $L(\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}) \subseteq p$ e, dato che i sottospazi proiettivi considerati hanno la stessa dimensione, posso concludere che $L(\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}) = p$ in virtù del lemma 1-(ii). □

Osservazione 20 (Equazioni parametriche di un sottospazio proiettivo). Siano $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo, $e_0 \dots e_n$ un sistema di coordinate omogenee su $\mathbb{P}$ e sia $S \subseteq \mathbb{P}$ un sottospazio proiettivo di dimensione $s \geq 0$. Innanzitutto, dalla definizione di sottospazio proiettivo segue che esiste un sottospazio vettoriale $W \subseteq V$ di dimensione $s + 1 \geq 1$ tale che $S = \mathbb{P}(W)$. Sia dunque $\{w_0, \dots, w_s\}$ una base di W. Dal momento che $\{e_0, \dots, e_n\}$ è una base di V e $w_0, \dots, w_s \in V$, vale che

$$\forall\, 0 \leq i \leq s \quad \exists\, p_{i0}, \dots, p_{in} \in K \;\Big|\; w_i = p_{i0}e_0 + \cdots + p_{in}e_n = \sum_{j=0}^{n} p_{ij}e_j$$

Sia ora $[v] \in \mathbb{P}$. Sfruttando il fatto che $\{e_0, \dots, e_n\}$ è una base di V e $v \in V$, si deduce che

$$\exists\, x_0, \dots, x_n \in K \;\Big|\; v = x_0e_0 + \cdots + x_ne_n = \sum_{j=0}^{n} x_je_j \tag{11}$$

Per il lemma 1-(i) si ha che $[v] \in S$ se e solo se $v \in W$, cioè se e solo se esistono $t_0, \dots, t_s \in K$ tali che

$$v = t_0w_0 + \cdots + t_sw_s = \sum_{i=0}^{s} t_iw_i = \sum_{i=0}^{s} t_i \sum_{j=0}^{n} p_{ij}e_j = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{s} p_{ij}t_i \right) e_j$$

Equivalentemente, per la relazione (11), deve valere

$$\sum_{j=0}^{n} x_je_j = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{s} p_{ij}t_i \right) e_j \quad \iff \quad \sum_{j=0}^{n} \left(x_j - \sum_{i=0}^{s} p_{ij}t_i \right) e_j = 0$$

Dunque, per indipendenza lineare di $e_0, \dots, e_n$, si ottengono le equazioni parametriche

$$\begin{cases} X_0 = p_{00}t_0 + \cdots + p_{s0}t_s \\ X_1 = p_{01}t_0 + \cdots + p_{s1}t_s \\ \quad \vdots \\ X_n = p_{0n}t_0 + \cdots + p_{sn}t_s \end{cases}$$

al variare dei parametri $t_0, \dots, t_s \in K$.

Definizione 11. Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo e siano $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{P}$ sottospazi proiettivi. Il sottospazio generato da $S_1 \cup S_2$ si dice il *sottospazio somma di* S_1 *e di* S_2 e si denota

$$L(S_1, S_2) := L(S_1 \cup S_2)$$

Proposizione 3. *Siano $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo, $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{P}$ sottospazi proiettivi. Se $S_1 = \mathbb{P}(W_1)$, $S_2 = \mathbb{P}(W_2)$, allora $L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W_1 + W_2)$.*

Dimostrazione. Ricordando che il sottospazio somma di due sottospazi vettoriali è il più piccolo sottospazio che contiene la loro unione, si ha che

$$\begin{aligned}
L(S_1, S_2) &= \bigcap_{\substack{S \subseteq \mathbb{P} \text{ sottospazio proiettivo} \\ \text{t.c. } S_1 \cup S_2 \subseteq S}} S && \text{(definizioni 8, 11)} \\
&= \bigcap_{\substack{S \subseteq \mathbb{P} \text{ sottospazio proiettivo} \\ \text{t.c. } S_1 \subseteq S,\ S_2 \subseteq S}} S \\
&= \bigcap_{\substack{W \subseteq V \text{ sottospazio vettoriale} \\ \text{t.c. } W_1 \subseteq W,\ W_2 \subseteq W}} \mathbb{P}(W) && \text{(lemma 1-(iii))} \\
&= \bigcap_{\substack{W \subseteq V \text{ sottospazio vettoriale} \\ \text{t.c. } W_1 \cup W_2 \subseteq W}} \mathbb{P}(W) \\
&= \mathbb{P}(W_1 + W_2)
\end{aligned}$$

L'ultimo passaggio è giustificato in virtù del lemma 1-(iii), in quanto al più piccolo sottospazio vettoriale che contiene $W_1 \cup W_2$ è associato il più piccolo spazio proiettivo. □

Proposizione 4 (Formula di Grassmann proiettiva)**.** *Siano $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo, $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{P}$ sottospazi proiettivi. Allora vale la formula*

$$\dim L(S_1, S_2) \ + \ \dim(S_1 \cap S_2) \ = \ \dim S_1 \ + \ \dim S_2$$

Dimostrazione. Innanzitutto, poiché $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{P}$ sono sottospazi proiettivi, $\exists\, W_1, W_2 \subseteq V$ sottospazi vettoriali tali che $S_1 = \mathbb{P}(W_1)$, $S_2 = \mathbb{P}(W_2)$. Ora per le proposizioni 1 e 3 si ha che $S_1 \cap S_2 = \mathbb{P}(W_1 \cap W_2)$, mentre $L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(W_1 + W_2)$. Ma allora dalla formula di Grassmann per spazi vettoriali segue che

$$\begin{aligned}
\dim L(S_1, S_2) + \dim(S_1 \cap S_2) &= \dim(W_1 + W_2) - 1 + \dim(W_1 \cap W_2) - 1 \\
&= \dim W_1 - 1 + \dim W_2 - 1 \\
&= \dim S_1 + \dim S_2
\end{aligned}$$

□

Corollario 1. *Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo e siano $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{P}$ sottospazi proiettivi. Valgono le proprietà:*

(i) $\dim(S_1 \cap S_2) \geq \dim S_1 + \dim S_2 - \dim \mathbb{P}$

(ii) *Se* $\dim S_1 + \dim S_2 - \dim \mathbb{P} \geq 0$, *allora* $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$

Dimostrazione.

(i) Basta osservare che $\dim L(S_1, S_2) \leq \dim \mathbb{P}$ per il lemma 1-(ii), perché ovviamente $L(S_1, S_2) \subseteq \mathbb{P}$ è un sottospazio proiettivo. Dalla formula di Grassmann proiettiva, quindi, segue che

$$\dim(S_1 \cap S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim L(S_1, S_2) \geq \dim S_1 + \dim S_2 - \dim \mathbb{P}$$

(ii) L'asserto segue banalmente dal punto (i) appena dimostrato e dall'osservazione 2-(ii). Infatti

$$\dim(S_1 \cap S_2) \geq \dim S_1 + \dim S_2 - \dim \mathbb{P} \geq 0$$

□

Definizione 12. Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo. Due sottospazi proiettivi $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{P}$ si dicono *in posizione generale* se $\dim(S_1 \cap S_2) = \max\{\dim S_1 + \dim S_2 - \dim \mathbb{P}, -1\}$.

Corollario 2.

(i) *Sia $\mathbb{P}$ un piano proiettivo e siano $r, r' \subseteq \mathbb{P}$ rette proiettive. Allora r e r' sono incidenti.*

(ii) *Siano $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo di dimensione 3, $r \subseteq \mathbb{P}$ una retta proiettiva e siano $p, p' \subseteq \mathbb{P}$ piani proiettivi tali che $p \neq p'$. Allora r e p sono incidenti, mentre $p \cap p'$ è una retta proiettiva.*

Dimostrazione.

(i) L'asserto è una diretta conseguenza del corollario 1-(ii), infatti

$$\dim r + \dim r' - \dim \mathbb{P} = 1 + 1 - 2 = 0$$

(ii) Si verifica facilmente che r e p sono incidenti utilizzando, come prima, il corollario 1-(ii). Infatti

$$\dim r + \dim p - \dim \mathbb{P} = 1 + 2 - 3 = 0$$

Dal corollario 1-(i) segue invece che

$$\dim(p \cap p') \geq \dim p + \dim p' - \dim \mathbb{P} = 2 + 2 - 3 = 1$$

Ora $p \cap p' \subseteq p$ e inoltre $\dim p = 2$ per ipotesi, dunque $\dim(p \cap p') \leq 2$ per il lemma 1-(ii). Se per assurdo fosse $\dim(p \cap p') = 2$, varrebbe che $p \cap p' = p$ e quindi, ripetendo lo stesso ragionamento con p' al posto di p, si avrebbe che $p = p'$, il che contraddice le ipotesi. Di conseguenza, posso concludere che $\dim(p \cap p') = 1$, cioè che $p \cap p'$ è una retta proiettiva. □

Si può dare una dimostrazione alternativa del corollario 2 utilizzando le equazioni dei sottospazi proiettivi. In ogni caso, una conseguenza del corollario 2 è che in un piano proiettivo non ha significato parlare di parallelismo tra rette, né in uno spazio proiettivo tridimensionale ha senso il parallelismo tra piani o tra rette e piani.

Osservazione 21. Siano $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo di dimensione 3, $r, s \subseteq \mathbb{P}$ rette proiettive sghembe e sia $\mathrm{P} \in \mathbb{P}$ un punto tale che $\mathrm{P} \notin r \cup s$. Allora esiste un'unica retta passante per P e incidente a r e s.

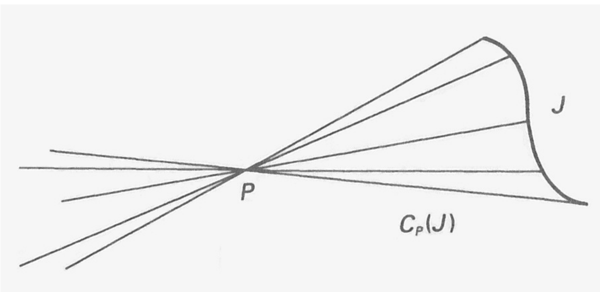
Dimostrazione. Definisco $t := L(\mathrm{P}, r) \cap L(\mathrm{P}, s)$. Innanzitutto, $L(\mathrm{P}, r)$ e $L(\mathrm{P}, s)$ sono piani proiettivi dato che, per ipotesi, $\mathrm{P} \notin r \cup s$. Inoltre, $L(\mathrm{P}, r) \neq L(\mathrm{P}, s)$ perché r e s giacciono su piani distinti, essendo rette proiettive sghembe. Dal corollario 2-(ii) segue dunque che t è una retta proiettiva. Ovviamente $\mathrm{P} \in t$, perché $\mathrm{P} \in L(\mathrm{P}, r)$ e $\mathrm{P} \in L(\mathrm{P}, s)$. Infine, t è incidente a r perché $t, r \subseteq L(\mathrm{P}, r)$ e rette che giacciono sullo stesso piano sono incidenti per il corollario 2-(i). Per lo stesso motivo, t e s sono incidenti.

Sia ora t' una retta passante per P e incidente a r e s. Osservo che $t' \subseteq L(\mathrm{P}, r)$ perché t' e r, essendo incidenti, giacciono sullo stesso piano e inoltre $\mathrm{P} \in t'$. Ragionando in maniera del tutto analoga si ottiene anche che $t' \subseteq L(\mathrm{P}, s)$, ma allora $t' \subseteq t$ per definizione di t. Dal lemma 1-(ii) segue quindi che $t = t'$ perché sono sottospazi proiettivi della stessa dimensione. Concludo che la retta passante per P e incidente a r e s esiste ed è unica. □

Definizione 13. Siano $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo, $J \subseteq \mathbb{P}$ un insieme e sia $\mathrm{P} \in \mathbb{P}$. L'insieme

$$C_{\mathrm{P}}(J) := \bigcup_{\mathrm{Q} \in J} L(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$$

si dice il *cono proiettante* J *da* P.



Osservazione 22. Siano $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo, $S \subseteq \mathbb{P}$ un sottospazio proiettivo e sia $\mathrm{P} \in \mathbb{P}$. Allora $C_{\mathrm{P}}(S) = L(\mathrm{P}, S)$. In particolare, se $S = \{\mathrm{Q}\}$ per un qualche $\mathrm{Q} \in \mathbb{P}$, allora $C_{\mathrm{P}}(S) = L(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$.

Dimostrazione. Innanzitutto, $\exists\, W \subseteq V$ sottospazio vettoriale $\mid S = \mathbb{P}(W)$ perché $S \subseteq \mathbb{P}$ è un sottospazio proiettivo per ipotesi. Inoltre, posso supporre che $\mathrm{P} = [p]$ per qualche $p \in V$. Equivalentemente, si ha che $\mathrm{P} = \mathbb{P}(\langle p \rangle)$ e quindi vale che $L(\mathrm{P}, S) = \mathbb{P}(\langle p \rangle + W)$ in virtù della proposizione 3. Fissato dunque un punto $\mathrm{R} \in C_{\mathrm{P}}(S)$, $\mathrm{R} = [r]$, si ha per definizione che $\exists\, \mathrm{Q} \in S$, $\mathrm{Q} = [q]$ tale che $\mathrm{R} \in L(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$, il che equivale a dire che $r \in \langle p, q \rangle$ in virtù della proposizione 2-(i). Vale dunque la relazione $r = ap + bq$ per opportuni $a, b \in K$, ma allora $r \in \langle p \rangle + W$ perché $ap \in \langle p \rangle$, $bq \in W$. Posso quindi affermare che $\mathrm{R} \in L(\mathrm{P}, S)$ per il lemma 1-(i). Ora sia invece fissato un qualsiasi punto $\mathrm{R} \in L(\mathrm{P}, S)$, $\mathrm{R} = [r]$. Ancora per il lemma 1-(i) si ha che $r \in \langle p \rangle + W$, perciò $r = ap + w$ per certi $a \in K$, $w \in W$. A questo punto, se $w = \mathbf{0}$ allora $\mathrm{R} = \mathrm{P}$ e quindi $\mathrm{R} \in C_{\mathrm{P}}(S)$ banalmente. Posso dunque assumere $w \neq \mathbf{0}$ e considerare il punto $\mathrm{Q} := [w]$. Sempre in virtù del lemma 1-(i) si ha che $\mathrm{Q} \in S$, ma allora $\mathrm{R} \in L(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ perché $r \in \langle p, w \rangle$. In particolare, $\mathrm{R} \in C_{\mathrm{P}}(S)$ e dunque posso concludere che $C_{\mathrm{P}}(S) = L(\mathrm{P}, S)$ perché ho mostrato la doppia inclusione. $\square$

Osservazione 23. Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo e siano $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{P}$ sottospazi proiettivi. Dall'osservazione 22 segue immediatamente la validità della seguente relazione:

$$L(S_1, S_2) = \bigcup_{\mathrm{P} \in S_1} C_{\mathrm{P}}(S_2) = \bigcup_{\substack{\mathrm{P} \in S_1 \\ \mathrm{Q} \in S_2}} L(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$$

Osservazione 24. Siano $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo, $r \subseteq \mathbb{P}$ una retta proiettiva e sia $H \subseteq \mathbb{P}$ un iperpiano tale che $r \nsubseteq H$. Allora $r \cap H$ è un punto.

Dimostrazione. Innanzitutto, sia $n := \dim \mathbb{P}$. Dal corollario 1-(i) segue immediatamente che

$$\dim(r \cap H) \geq \dim r + \dim H - \dim \mathbb{P} = 1 + (n-1) - n = 0$$

Osservo che $r \cap H \subseteq r$ e inoltre $\dim r = 1$ per ipotesi, quindi $\dim(r \cap H) \leq 1$ per il lemma 1-(ii). Se fosse $\dim(r \cap H) = 1$, allora si avrebbe che $r \cap H = r$, ma ciò equivale a dire che $r \subseteq H$ e questo è assurdo. Di conseguenza, vale che $\dim(r \cap H) = 0$, dunque posso concludere che $r \cap H$ è un punto. $\square$

Definizione 14. Siano $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo, $\mathrm{P} \in \mathbb{P}$, $H \subseteq \mathbb{P}$ un iperpiano tale che $\mathrm{P} \notin H$. La mappa

$$\begin{array}{rccc} \pi_{\mathrm{P},H}\colon & \mathbb{P} \setminus \{\mathrm{P}\} & \longrightarrow & H \\ & \mathrm{Q} & \longmapsto & L(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \cap H \end{array}$$

si dice la *proiezione di* $\mathbb{P}$ *su* H *di centro* P.

La definizione 14 è ben posta perché la proiezione di $\mathbb{P}$ su H di centro P è un'applicazione ben definita. Per dimostrarlo, basta osservare che $L(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \nsubseteq H$. Infatti, $\mathrm{P} \in L(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ ma si sta assumendo che $\mathrm{P} \notin H$. Di conseguenza posso affermare, in virtù dell'osservazione 24, che $L(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \cap H$ è un punto. Non è dunque possibile che uno stesso punto venga mappato in due punti distinti. Va inoltre osservato che la proiezione di $\mathbb{P}$ su H di centro P passa da uno spazio proiettivo di dimensione n a uno di dimensione $n-1$ e quindi si presta bene a ragionamenti di tipo induttivo.

Esempio 1. Considero lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(K)$ con il riferimento proiettivo standard $E_0 \dots E_n$, l'iperpiano coordinato $H_0 \subseteq \mathbb{P}^n$ e il punto fondamentale $\mathrm{F}_0 \in \mathbb{P}^n$. Dal momento che $\mathrm{F}_0 \notin H_0$, è possibile definire la proiezione di $\mathbb{P}^n$ su H_0 di centro F_0. Un punto $\mathrm{Q} \in \mathbb{P}^n$ tale che $\mathrm{Q} \neq \mathrm{F}_0$ ha coordinate omogenee $[x_0, x_1, \dots, x_n] \neq [1, 0, \dots, 0]$ e quindi $\exists\, 1 \leq i \leq n \mid x_i \neq 0$. Ora se $\mathrm{Q} = [v]$ si ha che

$$L(\mathrm{F}_0, \mathrm{Q}) = \mathbb{P}(\langle E_0, v \rangle) = \mathbb{P}\big(\{\lambda E_0 + \mu v \mid \lambda, \mu \in K\}\big) = \mathbb{P}\big(\{(\lambda + \mu x_0, \mu x_1, \dots, \mu x_n) \mid \lambda, \mu \in K\}\big)$$

Dalla definizione data dell'iperpiano coordinato H_0 segue che $\lambda + \mu x_0 = 0$ per certi $\lambda, \mu \in K$, altrimenti l'intersezione fra i due sottospazi sarebbe vuota e questo non può accadere. Se fosse $\mu = 0$ varrebbe che $\langle E_0, v \rangle = \{\mathbf{0}\}$, ma questo è assurdo in quanto $E_0, v \neq \mathbf{0}$. Di conseguenza $\mu \neq 0$ e ottengo che

$$\pi_{\mathrm{F}_0, H_0}(\mathrm{Q}) = L(\mathrm{F}_0, \mathrm{Q}) \cap H_0 = [0, \mu x_1, \dots, \mu x_n] = [0, x_1, \dots, x_n]$$

Inoltre, osservo che le coordinate omogenee del punto ottenuto sono non tutte nulle. Infatti, ricordo che sto assumendo $\mathrm{Q} \neq \mathrm{F}_0$ e quindi $\exists\, 1 \leq i \leq n \mid x_i \neq 0$. In definitiva

$$\begin{array}{rccc} \pi_{\mathrm{F}_0, H_0}\colon & \mathbb{P}^n \setminus \{[1, 0, \dots, 0]\} & \longrightarrow & H_0 \\ & [x_0, x_1, \dots, x_n] & \longmapsto & [0, x_1, \dots, x_n] \end{array}$$

Con un procedimento analogo posso definire, per ogni $1 \leq i \leq n$, la proiezione di $\mathbb{P}^n$ su H_i di centro F_i:

$$\begin{array}{rccc} \pi_{\mathrm{F}_i,H_i}\colon & \mathbb{P}^n \setminus \{[0,\dots,0,1,0,\dots,0]\} & \longrightarrow & H_i \\ & [x_0,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n] & \longmapsto & [x_0,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n] \end{array}$$

Osservazione 25. Siano $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo, $\mathrm{P} \in \mathbb{P}$ e sia $H \subseteq \mathbb{P}$ un iperpiano tale che $\mathrm{P} \notin H$. Si può dimostrare che, dato un insieme $J \subseteq \mathbb{P}$, vale la formula $\pi_{\mathrm{P},H}(J) = C_{\mathrm{P}}(J) \cap H$. In particolare, se $S \subseteq \mathbb{P}$ è un sottospazio proiettivo, allora $\pi_{\mathrm{P},H}(S) = L(\mathrm{P}, S) \cap H$ per l'osservazione 22.

Definizione 15. Siano $n \geq 1$, $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo, $e_0 \dots e_n$ un sistema di coordinate omogenee su $\mathbb{P}$. Siano $X_0, \dots, X_n$ indeterminate e sia $F(X_0, \dots, X_n)$ un polinomio omogeneo di grado $d \geq 0$. L'insieme

$$V(F) := \left\{ \mathrm{P} \in \mathbb{P},\ \mathrm{P} = \mathrm{P}[x_0, \dots, x_n] \;\middle|\; F(x_0, \dots, x_n) = 0 \right\}$$

si dice l'*ipersuperficie associata a* F. Se $d = 1, 2, 3$, l'ipersuperficie associata a F si dice un *iperpiano*, una *quadrica* o una *cubica* rispettivamente. Inoltre, se $n = 2$, l'ipersuperficie associata a F si dice una *curva algebrica piana*.

Esempio 2. Sia $(a_0, \dots, a_n) \in K^{n+1}, (a_0, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ e sia $F(X_0, \dots, X_n) = a_0X_0 + \dots + a_nX_n$ un polinomio omogeneo in $n+1$ indeterminate. L'ipersuperficie

$$V(F) = \left\{ \mathrm{P} \in \mathbb{P}^n(K),\ \mathrm{P} = \mathrm{P}[x_0, \dots, x_n] \;\middle|\; a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0 \right\}$$

è lo spazio delle soluzioni dell'equazione cartesiana di un iperpiano in virtù dell'osservazione 6 e, siccome $F(X_0, \dots, X_n)$ è un polinomio omogeneo di grado 1, $V(F)$ si dice anche un iperpiano per definizione.

Esempio 3. Sia $F(X_0, \dots, X_n)$ un polinomio omogeneo di grado 0. In questo caso, l'unica possibilità è che $F(X_0, \dots, X_n) = c$ per un qualche $c \in K$ e l'ipersuperficie associata a F è

$$V(F) = \begin{cases} \varnothing & \text{se } c \neq 0 \\ \mathbb{P} & \text{se } c = 0 \end{cases}$$

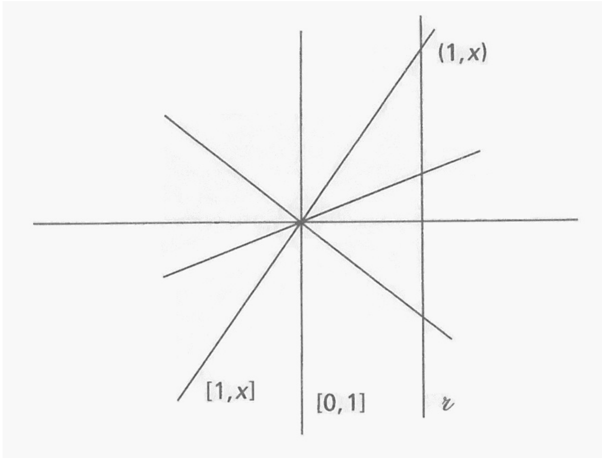
2.2 Geometria affine e geometria proiettiva

L'idea è esprimere un qualunque spazio proiettivo $\mathbb{P}$ di dimensione n come unione di uno spazio affine A di dimensione n e di un iperpiano $H \subseteq \mathbb{P}$, in simboli

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P} & \simeq & A & \cup & H \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{spazio} & & \text{spazio} & & \text{iperpiano} \\ \text{proiettivo} & & \text{affine} & & \text{“all'infinito”} \end{array}$$

A tale scopo si dimostrerà che esiste una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{P} \setminus H$ e A. In un primo momento, considero lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, lo spazio affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ con coordinate X_0, X_1 e la retta affine r di equazione cartesiana $X_0 = 1$. Esiste una corrispondenza biunivoca

$$\begin{array}{rccl} \Phi\colon & \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \left\{ s \subseteq \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \dim s = 1,\ \mathrm{O} \in s \right\} \\ & [x_0, x_1] & \longmapsto & s_{[x_0,x_1]}\colon \begin{cases} X_0 = \lambda x_0 \\ X_1 = \lambda x_1 \end{cases} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{array}$$



In particolare, $\Phi(H_0) = \Phi([0, x_1]) = \Phi([0, 1]) = s_{[0,1]}$. Osservo che $s_{[0,1]}$ è la retta di equazione cartesiana $X_0 = 0$, quindi l'iperpiano coordinato H_0 viene mappato nell'asse X_1, cioè nell'unica retta parallela a r.[11] Ora, l'intersezione tra la retta r e una qualsiasi retta $s_{[x_0,x_1]}$ tale che $x_0 \neq 0$ è data dal sistema di equazioni

$$\begin{cases} X_0 = 1 \\ X_0 = \lambda x_0 \\ X_1 = \lambda x_1 \end{cases} \iff \begin{cases} X_0 = 1 \\ 1 = \lambda x_0 \\ X_1 = \lambda x_1 \end{cases} \iff \begin{cases} X_0 = 1 \\ \lambda = \frac{1}{x_0} \\ X_1 = \lambda x_1 \end{cases} \iff \begin{cases} X_0 = 1 \\ X_1 = \frac{x_1}{x_0} \end{cases}$$

Di conseguenza, $r \cap s_{[x_0,x_1]}$ è il punto $\left(1, \frac{x_1}{x_0}\right)$. Ma allora esiste una corrispondenza biunivoca

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus H_0 & \longrightarrow & r \\ [x_0, x_1] & \longmapsto & \left(1, \frac{x_1}{x_0}\right) \end{array}$$

Concludo osservando che, nello spazio affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, la retta di equazione cartesiana $X_0 = 0$ e r hanno la stessa giacitura, ma tale giacitura corrisponde al punto $[0, 1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, quindi nello spazio proiettivo associato le due rette hanno un punto in comune. Si può dunque pensare H_0 come il "punto all'infinito" che viene aggiunto alla retta r per ottenere $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. In realtà, è possibile generalizzare questa costruzione geometrica allo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(K)$ se si considerano l'iperpiano coordinato $H_0 \subseteq \mathbb{P}^n(K)$ e l'iperpiano affine $A \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(K)$ di equazione cartesiana $X_0 = 1$. Esiste dunque una corrispondenza biunivoca

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}^n(K) \setminus H_0 & \longrightarrow & A \\ [x_0, x_1, \dots, x_n] & \longmapsto & \left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \\ [1, y_1, \dots, y_n] & \longleftarrow & (1, y_1, \dots, y_n) \end{array}$$

la quale induce a sua volta una biiezione

$$\begin{array}{rrcl} j_0 \colon & \mathbb{A}^n(K) & \longrightarrow & \mathbb{P}^n(K) \setminus H_0 \\ & (y_1, \dots, y_n) & \longmapsto & [1, y_1, \dots, y_n] \end{array}$$

detta *applicazione di passaggio a coordinate omogenee rispetto a* x_0, la cui inversa è

$$\begin{array}{rrcl} j_0^{-1} \colon & \mathbb{P}^n(K) \setminus H_0 & \longrightarrow & \mathbb{A}^n(K) \\ & [x_0, x_1, \dots, x_n] & \longmapsto & \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \end{array}$$

detta *applicazione di passaggio a coordinate non omogenee rispetto a* x_0. Si definiscono in modo analogo applicazioni di passaggio a coordinate omogenee o non omogenee rispetto a x_i per ogni $1 \leq i \leq n$. Inoltre, nel caso finora considerato, i punti di H_0 si dicono i *punti impropri* (o *punti all'infinito*) *di* $\mathbb{P}^n(K)$, mentre i punti di $\mathbb{P}^n(K) \setminus H_0$ si dicono i *punti propri* (o *punti al finito*) *di* $\mathbb{P}^n(K)$. Infine, l'iperpiano coordinato H_0 si dice l'*iperpiano improprio* (o *iperpiano all'infinito*) *di* $\mathbb{P}^n(K)$.

[11] L'unicità è conseguenza del quinto postulato di Euclide in spazi affini.

Le costruzioni precedenti possono essere generalizzate a uno spazio proiettivo qualunque. Siano quindi assegnati un K-spazio vettoriale V di dimensione finita $n+1 \geq 2$, un sottospazio vettoriale $H \subseteq V$ di codimensione 1 e lo spazio proiettivo $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$. L'obiettivo è attribuire all'insieme non vuoto $\mathbb{P} \setminus \mathbb{P}(H)$ una struttura di spazio affine, definendo un'applicazione

$$\begin{array}{rcl} \big(\mathbb{P} \setminus \mathbb{P}(H)\big) \times \big(\mathbb{P} \setminus \mathbb{P}(H)\big) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}\big({}^{V}\!/_{H}\,, H\big) \\ (\mathrm{P}, \mathrm{P}') & \longmapsto & \varphi_{\mathrm{PP}'} \end{array}$$

che soddisfi i due assiomi di spazio affine. Bisogna innanzitutto definire in modo opportuno l'applicazione lineare $\varphi_{\mathrm{PP}'}$. Siano quindi $\mathrm{P}, \mathrm{P}' \in \mathbb{P} \setminus \mathbb{P}(H)$, $\mathrm{P} = [u]$, $\mathrm{P}' = [u']$. Poiché $\mathrm{P}, \mathrm{P}' \notin \mathbb{P}(H)$, vale che $u, u' \in V \setminus H$. Considero V con struttura di spazio affine su se stesso e denoto V_{a} tale spazio affine. Definisco

$$\langle u \rangle_{\mathrm{a}} := S_{\mathbf{0}, \langle u \rangle}\,, \quad \langle u' \rangle_{\mathrm{a}} := S_{\mathbf{0}, \langle u' \rangle}$$

Sia inoltre $v + H \in {}^{V}\!/_{H}$. Osservo che $v + H = S_{v,H}$. Infatti, per ogni $w \in V_{\mathrm{a}}$, si ha che

$$\begin{aligned} w \in S_{v,H} &\iff \overrightarrow{vw} \in H \\ &\iff w - v \in H \\ &\iff \exists\, h \in H \mid w - v = h \\ &\iff \exists\, h \in H \mid w = v + h \\ &\iff w \in v + H \end{aligned}$$

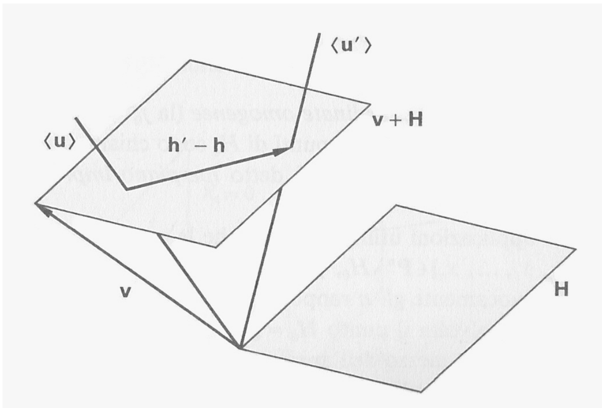
Ora osservo che $\langle u \rangle_{\mathrm{a}} \cap (v+H)$ è un punto di V_{a}. Infatti, siccome $u \notin H$ si ha che $\langle u \rangle + H = V$ e da una proposizione[12] sugli spazi affini segue che $\langle u \rangle_{\mathrm{a}} \cap (v+H) \neq \varnothing$ e inoltre

$$\dim \langle u \rangle_{\mathrm{a}} \cap (v+H) = \dim \langle u \rangle_{\mathrm{a}} + \dim (v+H) - \dim V_{\mathrm{a}} = \dim \langle u \rangle + \dim H - \dim V = 0$$

Ripetendo lo stesso ragionamento si deduce che anche $\langle u' \rangle_{\mathrm{a}} \cap (v+H)$ è un punto di V_{a}, ma allora

$$\exists!\, h, h' \in H \ \mid \ v + h \in \langle u \rangle_{\mathrm{a}}\,,\ v + h' \in \langle u' \rangle_{\mathrm{a}} \tag{12}$$

Definisco $\varphi_{\mathrm{PP}'}(v+H) := h' - h$. Ovviamente $h' - h \in H$ perché $H \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale.



Dimostro che $\varphi_{\mathrm{PP}'}$ è un'applicazione ben definita, cioè che non dipende dai rappresentanti delle classi di equivalenza. A tale scopo fisso $v + H, w + H \in {}^{V}\!/_{H}$ tali che $v + H = w + H$. Equivalentemente $v \sim_H w$, cioè $v - w \in H$ e quindi $\exists\, h_1 \in H \mid v = w + h_1$. Inoltre, assumendo la condizione (12), osservo che

$$w + h_1 + h = v + h \in \langle u \rangle_{\mathrm{a}}\,, \quad w + h_1 + h' = v + h' \in \langle u' \rangle_{\mathrm{a}}$$

Ma allora $\varphi_{\mathrm{PP}'}$ è ben definita, perché soddisfa la relazione

$$\varphi_{\mathrm{PP}'}(w+H) = (h_1 + h') - (h_1 + h) = h' - h = \varphi_{\mathrm{PP}'}(v+H)$$

[12]Sia A uno spazio affine su V di dimensione finita e siano $S, T \subseteq A$ sottospazi affini aventi giaciture W, U rispettivamente. Allora $S \cap T \neq \varnothing$ e $\dim(S \cap T) = \dim S + \dim T - \dim A$ se e solo se $V = W + U$.

Dimostro che $\varphi_{\text{PP}'}$ è un'applicazione lineare. Siano $v_1 + H, v_2 + H \in {}^{V}\!/_{H}$ e siano $c_1, c_2 \in K$. Da quanto detto prima segue che $\exists!\, h_1, h_2, h_1', h_2' \in H \mid v_1 + h_1, v_2 + h_2 \in \langle u \rangle_{\text{a}},\ v_1 + h_1', v_2 + h_2' \in \langle u' \rangle_{\text{a}}$. Si ha che

$$\begin{aligned} c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_1 h_1 + c_2 h_2 &= c_1(v_1 + h_1) + c_2(v_2 + h_2) \in \langle u \rangle_{\text{a}} \\ c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_1 h_1' + c_2 h_2' &= c_1(v_1 + h_1') + c_2(v_2 + h_2') \in \langle u' \rangle_{\text{a}} \end{aligned}$$

e quindi posso concludere che

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{PP}'}\big(c_1(v_1 + H) + c_2(v_2 + H)\big) &= \varphi_{\text{PP}'}(c_1 v_1 + c_2 v_2 + H) \\ &= (c_1 h_1' + c_2 h_2') - (c_1 h_1 + c_2 h_2) \\ &= c_1(h_1' - h_1) + c_2(h_2' - h_2) \\ &= c_1 \varphi_{\text{PP}'}(v_1 + H) + c_2 \varphi_{\text{PP}'}(v_2 + H) \end{aligned}$$

Lemma 1. *Siano A uno spazio affine su V, $T \subseteq A$ un insieme non vuoto e sia $U \subseteq V$ un sottospazio vettoriale tale che valgano le proprietà:*

(i) *per ogni $\text{P}, \text{Q} \in T$ si ha che $\overrightarrow{\text{PQ}} \in U$*

(ii) *per ogni $\text{P} \in T$, $\text{Q} \in A$ tali che $\overrightarrow{\text{PQ}} \in U$ si ha che $\text{Q} \in T$*

Allora T è un sottospazio affine di A con giacitura U.

Dimostrazione. Innanzitutto, siccome $T \neq \varnothing$ per ipotesi, si ha che $\exists\, \text{P} \in T$. Dimostro che $T = S_{\text{P},U}$ per doppio contenimento. Osservo che, se $\text{Q} \in T$, allora dalla condizione (i) segue che $\overrightarrow{\text{PQ}} \in U$ e quindi si ha che $\text{Q} \in S_{\text{P},U}$ per definizione di sottospazio affine. Ora fisso, invece, un qualsiasi $\text{Q} \in S_{\text{P},U}$. In particolare, so che $\text{Q} \in A$ e inoltre vale che $\overrightarrow{\text{PQ}} \in U$ per definizione di sottospazio affine. Ma allora, dall'ipotesi (ii) segue che $\text{Q} \in T$ e posso concludere che $T = S_{\text{P},U}$ perché ho mostrato la doppia inclusione. □

Teorema 1. *Siano V un K-spazio vettoriale di dimensione finita $n + 1 \geq 2$, $H \subseteq V$ un sottospazio vettoriale di codimensione 1 e sia $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo. Valgono le seguenti affermazioni.*

(i) *L'applicazione*

$$\begin{array}{ccc} \big(\mathbb{P} \setminus \mathbb{P}(H)\big) \times \big(\mathbb{P} \setminus \mathbb{P}(H)\big) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}\big({}^{V}\!/_{H}, H\big) \\ (\text{P}, \text{P}') & \longmapsto & \varphi_{\text{PP}'} \end{array}$$

definisce una struttura di spazio affine su $\mathbb{P} \setminus \mathbb{P}(H)$ con spazio vettoriale associato $\operatorname{Hom}\big({}^{V}\!/_{H}, H\big)$. Inoltre, fissato un qualsiasi sottospazio proiettivo $S \subseteq \mathbb{P}$, $S = \mathbb{P}(W)$ tale che $S \nsubseteq \mathbb{P}(H)$, si ha che l'insieme $S \cap \big(\mathbb{P} \setminus \mathbb{P}(H)\big)$ è un sottospazio affine di $\mathbb{P} \setminus \mathbb{P}(H)$ avente per giacitura il sottospazio vettoriale $\operatorname{Hom}\big({}^{V}\!/_{H}, W \cap H\big) \subseteq \operatorname{Hom}\big({}^{V}\!/_{H}, H\big)$.

(ii) *Assegnato su V_{a} un iperpiano affine A con giacitura H tale che $\mathbf{0} \notin A$,[13] si definisce una struttura di spazio affine su $\mathbb{P} \setminus \mathbb{P}(H)$ con spazio vettoriale associato H mediante l'applicazione*

$$\begin{array}{ccc} \big(\mathbb{P} \setminus \mathbb{P}(H)\big) \times \big(\mathbb{P} \setminus \mathbb{P}(H)\big) & \longrightarrow & H \\ (\text{P}, \text{P}') & \longmapsto & v' - v \end{array}$$

tale che, se $\text{P} = [u]$, $\text{P}' = [u']$, allora $\{v\} = A \cap \langle u \rangle_{\text{a}}$, $\{v'\} = A \cap \langle u' \rangle_{\text{a}}$.

Dimostrazione.

(i) Innanzitutto, occorre mostrare la validità del primo assioma degli spazi affini, cioè che

$$\forall\, \text{P} \in \mathbb{P} \setminus \mathbb{P}(H),\ \varphi \in \operatorname{Hom}\big({}^{V}\!/_{H}, H\big)\ \ \exists!\, \text{P}' \in \mathbb{P} \setminus \mathbb{P}(H)\ \big|\ \varphi_{\text{PP}'} = \varphi$$

Siano dunque fissati $\text{P} \in \mathbb{P} \setminus \mathbb{P}(H)$, $\text{P} = [u]$, $\varphi \in \operatorname{Hom}\big({}^{V}\!/_{H}, H\big)$. Sia inoltre fissato $v + H \in {}^{V}\!/_{H}$, $v + H \neq \mathbf{0} + H$. Come si è dimostrato prima di enunciare il teorema, $\exists!\, h \in H \mid v + h \in \langle u \rangle_{\text{a}}$.

[13] Essenzialmente, si richiede che A sia un iperpiano affine non vettoriale.

Definisco $u' := v + h + \varphi(v + H)$ e pongo $\mathrm{P}' := [u']$. Prima di tutto, verifico che $\mathrm{P}' \in \mathbb{P}\backslash\mathbb{P}(H)$. In virtù del lemma 1-(i) della sezione 2.1, basta mostrare che $u' \in V\backslash H$. Osservo quindi che $u' \in V$ perché è definito come somma di elementi di V e che $u' \notin H$ perché, in caso contrario, si avrebbe che $v + H = \mathbf{0} + H$, il che è assurdo. Ora dimostro che P' è ben definito, cioè che non dipende da una particolare scelta di $v + H$. Fissato un qualunque $w + H \in {}^{V}\!/_{H}$, $w + H \neq \mathbf{0} + H$, per un qualche $a \in K^*$ si ha che $w + H = a(v + H)$ in quanto $\dim {}^{V}\!/_{H} = 1$. Equivalentemente, si ha che

$$w + H = av + H \iff w - av \in H \iff \exists\, h_1 \in H \mid w - av = h_1$$

Si ricava dunque che $w = av + h_1$. Definisco $h_2 := ah - h_1$ e osservo che

$$w + h_2 = av + h_1 + h_2 = av + h_1 + ah - h_1 = a(v + h)$$

In virtù di quanto mostrato prima di enunciare il teorema, quindi, dato che $v + h \in \langle u \rangle_{\mathrm{a}}$, posso affermare che h_2 è l'unico elemento di H tale che $w + h_2 \in \langle u \rangle_{\mathrm{a}}$. A questo punto posso definire, come prima, $u'' := w + h_2 + \varphi(w + H)$ e $\mathrm{P}'' := [u'']$. Tuttavia, ricordando che $a \in K^*$, vale che

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}'' &= [w + h_2 + \varphi(w + H)] \\
&= [a(v + h) + \varphi(av + h_1 + H)] \\
&= [a(v + h) + \varphi(av + H)] \\
&= [a(v + h) + a\varphi(v + H)] \\
&= [v + h + \varphi(v + H)] \\
&= \mathrm{P}'
\end{aligned}$$

Di conseguenza, P' dipende soltanto da P e da φ. Bisogna ancora mostrare che $\varphi_{\mathrm{PP}'} = \varphi$. Definisco quindi $h' := h + \varphi(v + H)$ e osservo che $u' = v + h'$. In particolare, sfruttando di nuovo quanto osservato prima di enunciare il teorema, so che h' è l'unico elemento di H tale che $v + h' \in \langle u' \rangle_{\mathrm{a}}$. Ma allora, ricordando la definizione data di $\varphi_{\mathrm{PP}'}$, si ha che

$$\varphi_{\mathrm{PP}'}(v + H) = h' - h = h + \varphi(v + H) - h = \varphi(v + H)$$

Per arbitrarietà nella scelta di $v + H \in {}^{V}\!/_{H}$, $v + H \neq \mathbf{0} + H$ e dato che $\varphi_{\mathrm{PP}'}(\mathbf{0} + H) = \varphi(\mathbf{0} + H)$ in quanto le applicazioni lineari mappano il vettore nullo in se stesso, posso concludere che $\varphi_{\mathrm{PP}'} = \varphi$. A questo punto mi occupo di mostrare la validità del secondo assioma degli spazi affini, cioè che

$$\varphi_{\mathrm{PP}'} + \varphi_{\mathrm{P}'\mathrm{P}''} = \varphi_{\mathrm{PP}''} \quad \forall\, \mathrm{P}, \mathrm{P}', \mathrm{P}'' \in \mathbb{P}\backslash\mathbb{P}(H)$$

Siano dunque fissati $\mathrm{P}, \mathrm{P}', \mathrm{P}'' \in \mathbb{P}\backslash\mathbb{P}(H)$, $\mathrm{P} = [u]$, $\mathrm{P}' = [u']$, $\mathrm{P}'' = [u'']$. Sia inoltre $v + H \in {}^{V}\!/_{H}$. Come prima, $\exists!\, h, h', h'' \in H \mid v + h \in \langle u \rangle_{\mathrm{a}}$, $v + h' \in \langle u' \rangle_{\mathrm{a}}$, $v + h'' \in \langle u'' \rangle_{\mathrm{a}}$. Di conseguenza

$$\varphi_{\mathrm{PP}''}(v + H) = h'' - h = (h'' - h') + (h' - h) = \varphi_{\mathrm{P}'\mathrm{P}''}(v + H) + \varphi_{\mathrm{PP}'}(v + H)$$

Poiché tale relazione vale indipendentemente dalla scelta di $v + H \in {}^{V}\!/_{H}$, posso quindi concludere che $\varphi_{\mathrm{PP}'} + \varphi_{\mathrm{P}'\mathrm{P}''} = \varphi_{\mathrm{PP}''}$. Dunque, $\mathbb{P}\backslash\mathbb{P}(H)$ ha una struttura di spazio affine con spazio vettoriale associato $\mathrm{Hom}\big({}^{V}\!/_{H}, H\big)$. Sia ora $S \subseteq \mathbb{P}$, $S = \mathbb{P}(W)$ un sottospazio proiettivo tale che $S \nsubseteq \mathbb{P}(H)$. Si vuole dimostrare la seconda parte del punto (i) utilizzando il lemma 1. Innanzitutto, utilizzo l'ipotesi che $S \nsubseteq \mathbb{P}(H)$ per affermare che l'insieme $S \cap \big(\mathbb{P}\backslash\mathbb{P}(H)\big)$ è non vuoto. Ora dimostro che

$$\varphi_{\mathrm{PP}'} \in \mathrm{Hom}\big({}^{V}\!/_{H}, W \cap H\big) \quad \forall\, \mathrm{P}, \mathrm{P}' \in S \cap \big(\mathbb{P}\backslash\mathbb{P}(H)\big)$$

Siano quindi fissati $\mathrm{P}, \mathrm{P}' \in S \cap \big(\mathbb{P}\backslash\mathbb{P}(H)\big)$, $\mathrm{P} = [u]$, $\mathrm{P}' = [u']$. Sia inoltre $v + H \in {}^{V}\!/_{H}$ e siano h, h' gli unici elementi di H tali che $v + h \in \langle u \rangle_{\mathrm{a}}$, $v + h' \in \langle u' \rangle_{\mathrm{a}}$. Osservo che, essendo $\mathrm{P}, \mathrm{P}' \in S$, si ha che $u, u' \in W$ per il lemma 1-(i) della sezione 2.1. Da ciò segue banalmente che $\langle u, u' \rangle \subseteq W$. Ma allora, dato che $v + h \in \langle u \rangle$, $v + h' \in \langle u' \rangle$ e poiché vale la relazione

$$\varphi_{\mathrm{PP}'}(v + H) = h' - h = (v + h') - (v + h)$$

si deduce che $\varphi_{\text{PP}'}(v+H) \in \langle u, u' \rangle$, quindi che $\varphi_{\text{PP}'}(v+H) \in W$. Dato che il risultato ottenuto non dipende dalla scelta di $v+H \in {}^{V}\!/_{H}$, posso concludere che $\varphi_{\text{PP}'} \in \operatorname{Hom}\big({}^{V}\!/_{H}, W \cap H\big)$. Ora bisogna mostrare che anche l'ipotesi (ii) del lemma 1 è verificata, cioè che

$$\forall\ \text{P} \in S \cap \big(\mathbb{P}\setminus\mathbb{P}(H)\big)\,,\ \text{P}' \in \mathbb{P}\setminus\mathbb{P}(H) \text{ tali che } \varphi_{\text{PP}'} \in \operatorname{Hom}\big({}^{V}\!/_{H}, W \cap H\big)$$
$$\text{si ha che } \text{P}' \in S \cap \big(\mathbb{P}\setminus\mathbb{P}(H)\big)$$

Come nei casi precedenti, fisso $\text{P} \in S \cap \big(\mathbb{P}\setminus\mathbb{P}(H)\big)$, $\text{P} = [u]$ e fisso $\text{P}' \in \mathbb{P}\setminus\mathbb{P}(H)$, $\text{P}' = [u']$ tali che valga $\varphi_{\text{PP}'} \in \operatorname{Hom}\big({}^{V}\!/_{H}, W \cap H\big)$. Sia inoltre fissato $v+H \in {}^{V}\!/_{H}$, $v+H \neq \mathbf{0}+H$ e siano h, h' gli unici elementi di H tali che $v+h \in \langle u \rangle_{\text{a}}$, $v+h' \in \langle u' \rangle_{\text{a}}$. Da quest'ultima condizione deduco che $\exists\, a \in K \mid v+h' = au'$, ma osservo che $a \neq 0$ perché in caso contrario si avrebbe che $v+h' = \mathbf{0}$ e in particolare che $v \in H$, il che contraddice l'aver assunto $v+H \neq \mathbf{0}+H$. Ora osservo che

$$v+h' = (v+h) + (h'-h) = (v+h) + \varphi_{\text{PP}'}(v+H)$$

Dalle assunzioni fatte su P segue che $u \in W$ per il lemma 1-(i) della sezione 2.1, in quanto $\text{P} \in S$. Di conseguenza, $v+h \in W$ perché $v+h \in \langle u \rangle$. Dalle assunzioni fatte su $\varphi_{\text{PP}'}$ segue che anche $\varphi_{\text{PP}'}(v+H) \in W$. Ma allora $v+h' \in W$ e quindi $[v+h'] \in S$ per il lemma prima menzionato. A questo punto basta semplicemente osservare che

$$[v+h'] = [au'] = [u'] = \text{P}'$$

Ho dunque dimostrato che $\text{P}' \in S$. In conclusione, essendo verificate tutte le ipotesi del lemma 1, posso affermare che l'insieme $S \cap \big(\mathbb{P}\setminus\mathbb{P}(H)\big)$ è un sottospazio affine di $\mathbb{P}\setminus\mathbb{P}(H)$ con giacitura il sottospazio vettoriale $\operatorname{Hom}\big({}^{V}\!/_{H}, W \cap H\big) \subseteq \operatorname{Hom}\big({}^{V}\!/_{H}, H\big)$.

(ii) Con un ragionamento analogo a quello fatto prima di enunciare il teorema, si verifica facilmente che, se fisso un punto $\text{P} \in \mathbb{P}\setminus\mathbb{P}(H)$, $\text{P} = [u]$, allora $\exists!\, v \in V \mid \{v\} = A \cap \langle u \rangle_{\text{a}}$. Infatti, siccome $\text{P} \notin \mathbb{P}(H)$, dal lemma 1-(i) della sezione 2.1 segue che $u \notin H$ e quindi $H + \langle u \rangle = V$. Ma allora, in virtù di una proposizione sugli spazi affini, posso affermare che $A \cap \langle u \rangle_{\text{a}} \neq \varnothing$ e inoltre

$$\dim A \cap \langle u \rangle_{\text{a}} = \dim A + \dim \langle u \rangle_{\text{a}} - \dim V_{\text{a}} = \dim H + \dim \langle u \rangle - \dim V = 0$$

Ovviamente, un sottospazio affine di dimensione 0 è un punto, ma in uno spazio vettoriale con struttura di spazio affine su se stesso un punto è un vettore. Dunque, $\exists!\, v \in V \mid \{v\} = A \cap \langle u \rangle_{\text{a}}$. Ora però bisogna mostrare che l'applicazione è ben definita, cioè che $v' - v \in H$ per ogni possibile scelta di $\text{P}, \text{P}' \in \mathbb{P}\setminus\mathbb{P}(H)$. In realtà ciò che si vuole dimostrare è una banale conseguenza del fatto che $\overrightarrow{vv'} \in H$, affermazione vera perché $v, v' \in A$ e H è la giacitura di A per ipotesi. Infatti, per come è definito uno spazio vettoriale con struttura di spazio affine su se stesso, dire che $\overrightarrow{vv'} \in H$ è equivalente a dire che $v' - v \in H$. A questo punto bisogna mostrare che l'applicazione soddisfa i due assiomi degli spazi affini. Il primo assioma richiede che

$$\forall\ \text{P} \in \mathbb{P}\setminus\mathbb{P}(H)\,,\ h \in H \quad \exists!\, \text{P}' \in \mathbb{P}\setminus\mathbb{P}(H) \ \Big|\ v' - v = h$$

Sia dunque fissato $\text{P} \in \mathbb{P}\setminus\mathbb{P}(H)$, $\text{P} = [u]$ e sia $h \in H$. Da quanto osservato nella parte precedente segue che $\exists!\, v \in V \mid \{v\} = A \cap \langle u \rangle_{\text{a}}$. Ora, siccome $A \subseteq V_{\text{a}}$ è un sottospazio affine, posso ricorrere al primo assioma per definire v'. Infatti, poiché $v \in A$, $h \in H$ si ha che $\exists!\, v' \in A \mid \overrightarrow{vv'} = h$. La condizione espressa su v' è ovviamente equivalente alla relazione $v' - v = h$. A questo punto uso l'ipotesi che $\mathbf{0} \notin A$, dalla quale seguono le seguenti equivalenze:

$$\mathbf{0} \notin A \iff \mathbf{0} \notin S_{v',H} \iff \mathbf{0} - v' \notin H \iff v' \notin H$$

Di conseguenza, $v' \in V\setminus H$ e inoltre $v' \neq \mathbf{0}$ perché $H \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale. Ha dunque senso definire $\text{P}' := [v']$. Dal lemma 1-(i) della sezione 2.1 segue infatti che $\text{P}' \in \mathbb{P}\setminus\mathbb{P}(H)$ e vale ovviamente la condizione $A \cap \langle v' \rangle_{\text{a}} = \{v'\}$. Ora bisogna verificare anche la validità del secondo assioma degli spazi affini. Siano prefissati $\text{P}, \text{P}', \text{P}'' \in \mathbb{P}\setminus\mathbb{P}(H)$, $\text{P} = [u]$, $\text{P}' = [u']$, $\text{P}'' = [u'']$ e siano $v, v', v'' \in V$ tali che $\{v\} = A \cap \langle u \rangle_{\text{a}}$, $\{v'\} = A \cap \langle u' \rangle_{\text{a}}$, $\{v''\} = A \cap \langle u'' \rangle_{\text{a}}$. Basta osservare che

$$v'' - v = (v'' - v') + (v' - v)$$

In conclusione, posso affermare che su $\mathbb{P}\setminus\mathbb{P}(H)$ è definita una struttura di spazio affine con spazio vettoriale associato H, che verifica le proprietà richieste. □

Osservazione 1. Siano V un K-spazio vettoriale di dimensione finita $n+1 \geq 2$, $H \subseteq V$ un sottospazio vettoriale di codimensione 1 e sia $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo. Si verifica facilmente che $\mathbb{P} \setminus \mathbb{P}(H)$ con la struttura di spazio affine definita nel teorema 1-(i) ha dimensione n, infatti

$$\dim \mathbb{P} \setminus \mathbb{P}(H) = \dim \operatorname{Hom}\big({}^{V}\!/_{H}\,, H\big) = \dim {}^{V}\!/_{H} \dim H = 1n = n$$

Osservazione 2. Siano V un K-spazio vettoriale di dimensione finita $n+1 \geq 2$, $H \subseteq V$ un sottospazio vettoriale di codimensione 1 e sia $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo. Sia inoltre $A \subseteq V_{\mathrm{a}}$ un iperpiano affine con giacitura H tale che $\mathbf{0} \notin A$. Se si considera $\mathbb{P} \setminus \mathbb{P}(H)$ con la struttura di spazio affine definita nel teorema 1-(ii), allora l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} j\colon & A & \longrightarrow & \mathbb{P} \setminus \mathbb{P}(H) \\ & u & \longmapsto & [u] \end{array}$$

è un isomorfismo di spazi affini.

Dimostrazione. Innanzitutto, mostro che j è un'applicazione ben definita. Sia $u \in A$ un punto prefissato. Suppongo per assurdo che $[u] \in \mathbb{P}(H)$. Dal lemma 1-(i) della sezione 2.1 segue che $u \in H$. In particolare, si ha che $\mathbf{0} - u \in H$, cioè che $\overrightarrow{u\mathbf{0}} \in H$. Ma allora, essendo $A = S_{u,H}$, si ricava che $\mathbf{0} \in A$, il che è assurdo. L'unica possibilità, dunque, è che $[u] \in \mathbb{P} \setminus \mathbb{P}(H)$. Siano ora $w, w' \in A$. Si vuole mostrare che

$$\overrightarrow{j(w)j(w')} = \mathrm{id}_H(\overrightarrow{ww}') = \overrightarrow{ww}' \tag{13}$$

Ovviamente si ha che $\overrightarrow{ww}' = w' - w$ per come è stato definito uno spazio vettoriale con struttura di spazio affine su se stesso. So che $j(w) = [w]$, $j(w') = [w']$ e, ricordando la struttura di spazio affine su $\mathbb{P} \setminus \mathbb{P}(H)$ definita nel teorema 1-(ii), vale la relazione

$$\overrightarrow{j(w)j(w')} = v' - v\,, \ \text{ dove } \{v\} = A \cap \langle w \rangle_{\mathrm{a}}\,, \ \{v'\} = A \cap \langle w' \rangle_{\mathrm{a}}$$

Tuttavia, poiché si sta assumendo che $w, w' \in A$, si ha che $v = w$, $v' = w'$. La relazione (13) è dunque dimostrata e con questo posso concludere che j è un isomorfismo di spazi affini con isomorfismo di spazi vettoriali associato l'applicazione id_H. □

2.3 Dualità

Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo e sia $e_0 \dots e_n$ un riferimento proiettivo su $\mathbb{P}$. L'idea di fondo della dualità negli spazi proiettivi è che esiste una corrispondenza biunivoca tra punti e iperpiani. Infatti, all'iperpiano

$$H = \big\{\, \mathrm{P} \in \mathbb{P},\ \mathrm{P} = \mathrm{P}[x_0, \dots, x_n] \ \big|\ a_0 x_0 + \dots + a_n x_n = 0 \,\big\}$$

posso associare il punto $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}[a_0, \dots, a_n]$.

Definizione 1. Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione finita e sia $V^{\vee} := \operatorname{Hom}(V, K)$ lo spazio vettoriale duale di V. Lo spazio proiettivo $\mathbb{P}(V^{\vee})$ si dice lo *spazio proiettivo duale di* $\mathbb{P}(V)$ e si denota $\mathbb{P}^{\vee}$.

Osservazione 1. Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione finita. Dalla definizione 1 segue che

$$\dim \mathbb{P}^{\vee} = \dim V^{\vee} - 1 = \dim V - 1 = \dim \mathbb{P}(V)$$

Definizione 2. Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione finita. L'applicazione

$$\begin{array}{rccc} \delta\colon & \mathbb{P}^{\vee} & \longrightarrow & \{\text{iperpiani di } \mathbb{P}(V)\} \\ & [F] & \longmapsto & \mathbb{P}\big(N(F)\big) \end{array}$$

si dice l'*applicazione di dualità*.

La definizione 2 è ben posta. Innanzitutto, so che $\mathbb{P}(N(F)) \subseteq \mathbb{P}(V)$ è un iperpiano perché $N(F) \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale di codimensione 1. Infatti, supponendo che $\dim V = n+1$ e osservando che se $F \neq o$ allora F è suriettiva,[14] dal teorema di rango-nullità segue che

$$\dim N(F) = \dim V - \dim \operatorname{Im}(F) = (n+1) - 1 = n$$

Inoltre, l'applicazione di dualità non dipende da una particolare scelta del funzionale lineare associato al punto $[F]$. Infatti, fissato un qualunque $\lambda \in K^*$, vale che

$$N(\lambda F) = \{\, v \in V \mid (\lambda F)(v) = 0 \,\} = \{\, v \in V \mid \lambda F(v) = 0 \,\} = \{\, v \in V \mid F(v) = 0 \,\} = N(F)$$

Di conseguenza, si ha che $\mathbb{P}(N(\lambda F)) = \mathbb{P}(N(F))$ per il lemma 1-(iii) della sezione 2.1 e posso affermare che l'applicazione di dualità è ben definita.

Osservazione 2. Sia V un K-spazio vettoriale di dimensione finita. L'applicazione di dualità è biiettiva.

Dimostrazione. Dimostro che δ è un'applicazione iniettiva. Siano $[F], [G] \in \mathbb{P}^\vee \mid \delta([F]) = \delta([G])$. Da ciò segue immediatamente che $\mathbb{P}(N(F)) = \mathbb{P}(N(G))$ e quindi $N(F) = N(G)$ in virtù del lemma 1-(iii) della sezione 2.1. Dimostro che $\exists\, \lambda \in K^* \mid G = \lambda F$. Come si è osservato prima dell'enunciato, $N(F) \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale di codimensione 1. Se $\dim V = n+1$, posso dunque supporre che $\{v_1, \dots, v_n\}$ sia una base di $N(F)$ e che $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ sia un completamento a una base di V. Allora, fissato un qualsiasi vettore $v \in V$, $v = x_0 v_0 + \cdots + x_n v_n$, dalla linearità di F segue che $F(v) = x_0 F(v_0)$. Inoltre, dal momento che $\{v_1, \dots, v_n\}$ è anche una base di $N(G)$, si ha che $G(v) = x_0 G(v_0)$. Ora osservo che $v_0 \notin N(F)$ perché, essendo $v_0, v_1, \dots, v_n$ vettori linearmente indipendenti, v_0 non si può esprimere come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$. Ovviamente, vale anche che $v_0 \notin N(G)$, quindi $F(v_0), G(v_0) \neq 0$ e si ottiene che

$$G(v) = x_0 G(v_0) = x_0 \frac{G(v_0)}{F(v_0)} F(v_0) = \frac{G(v_0)}{F(v_0)} F(v) = \lambda F(v)\,, \quad \text{ponendo } \lambda := \frac{G(v_0)}{F(v_0)}$$

Per arbitrarietà nella scelta del vettore $v \in V$, deduco che $G = \lambda F$ e quindi $[F] = [G]$ perché $\lambda \in K^*$. Ora bisogna dimostrare che δ è un'applicazione suriettiva. Sia $S \subseteq \mathbb{P}(V)$, $S = \mathbb{P}(H)$ un iperpiano prefissato. Dal momento che $H \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale di codimensione 1 per il lemma 1-(iv) della sezione 2.1 posso supporre, come prima, che $\dim V = n+1$, che $\{v_1, \dots, v_n\}$ sia una base di H e che $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ sia un completamento a una base di V. Basta quindi definire

$$\begin{array}{rccc} F\colon & V & \longrightarrow & K \\ & v_0 & \longmapsto & 1 \\ & v_1 & \longmapsto & 0 \\ & & \cdots & \\ & v_n & \longmapsto & 0 \end{array}$$

Infatti, si verifica facilmente che $N(F) = H$ e dal lemma 1-(iii) della sezione 2.1 segue che $\mathbb{P}(N(F)) = S$. Inoltre, $F \neq o$ perché $F(v_0) \neq 0$. Posso dunque concludere che l'applicazione di dualità è biiettiva. □

Osservazione 3. Siano V un K-spazio vettoriale, $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo, $e_0 \dots e_n$ un riferimento proiettivo su $\mathbb{P}$ e sia $H \subseteq \mathbb{P}$ un iperpiano di equazione cartesiana $a_0 X_0 + \cdots + a_n X_n = 0$. Definisco

$$\begin{array}{rccc} F\colon & V & \longrightarrow & K \\ & e_0 & \longmapsto & a_0 \\ & & \cdots & \\ & e_n & \longmapsto & a_n \end{array}$$

[14] Se $F \neq o$, allora $\exists\, v \in V,\ k \in K^* \mid F(v) = k$ e, di conseguenza, per ogni $x \in K$ esiste $\frac{x}{k} v \in V$ tale che

$$F\left(\frac{x}{k} v\right) = \frac{x}{k} F(v) = \frac{x}{k} k = x$$

Osservo che $F \neq o$ perché $(a_0, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ per come è definita un'equazione cartesiana. Inoltre

$$N(F) = \left\{ v \in V,\ v = x_0 e_0 + \cdots + x_n e_n \;\middle|\; a_0 x_0 + \cdots + a_n x_n = 0 \right\}$$

Di conseguenza, si ha che $\mathbb{P}\big(N(F)\big) = H$. Va notato che quanto appena osservato dimostra, in maniera alternativa, che l'applicazione di dualità è suriettiva.

Definizione 3. Siano V un K-spazio vettoriale, $\{e_0, \dots, e_n\}$ una base di V e sia[15] $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ la base duale della base $\{e_0, \dots, e_n\}$ di V. Il riferimento proiettivo $\varphi_0 \dots \varphi_n$ su $\mathbb{P}^\vee$ si dice il *riferimento proiettivo duale del riferimento* $e_0 \dots e_n$ *di* $\mathbb{P}(V)$.

Osservazione 4. Siano V un K-spazio vettoriale, $\{e_0, \dots, e_n\}$ una base di V e sia $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ la base duale della base $\{e_0, \dots, e_n\}$ di V. Per ogni $F \in V^\vee$, $F = a_0\varphi_0 + \cdots + a_n\varphi_n$ le coordinate omogenee di $[F]$ rispetto al riferimento proiettivo duale $\varphi_0 \dots \varphi_n$ sono $a_0, \dots, a_n$. Inoltre, l'applicazione di dualità induce una corrispondenza biunivoca tra i punti fondamentali di $\mathbb{P}^\vee$ nel riferimento duale $\varphi_0 \dots \varphi_n$ e gli iperpiani coordinati di $\mathbb{P}(V)$ nel riferimento $e_0 \dots e_n$, infatti

$$\delta\big([\varphi_0]\big) = H_0\,, \quad \delta\big([\varphi_1]\big) = H_1\,, \quad \dots\,, \quad \delta\big([\varphi_n]\big) = H_n$$

Definizione 4. Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo e siano $H_1, \dots, H_s \subseteq \mathbb{P}$ iperpiani. Gli iperpiani $H_1, \dots, H_s$ si dicono *linearmente indipendenti* [risp. *dipendenti*] se lo sono i punti $\delta^{-1}(H_1), \dots, \delta^{-1}(H_s) \in \mathbb{P}^\vee$.

Osservazione 5. Siano V un K-spazio vettoriale, $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo, $e_0 \dots e_n$ un sistema di coordinate omogenee su $\mathbb{P}$ e sia $[F] \in \mathbb{P}^\vee$. Ovviamente, $F \in V^\vee$, cioè $F\colon V \to K$ è un funzionale lineare e inoltre $F \neq o$. Sia quindi $e = \{e_0, \dots, e_n\}$ la base di V che definisce il riferimento proiettivo fissato su $\mathbb{P}$ e sia $f = \{1\}$ una base di K. Allora $\mathrm{M}_{f,e}(F) = (a_0 \ \cdots \ a_n)$ per certi $a_0, \dots, a_n \in K$. Di conseguenza, per ogni $v \in V$, $v = x_0 e_0 + \cdots + x_n e_n$, si ha che $F(v) = a_0 x_0 + \cdots + a_n x_n$ e quindi

$$N(F) = \left\{ v \in V,\ v = x_0 e_0 + \cdots + x_n e_n \;\middle|\; a_0 x_0 + \cdots + a_n x_n = 0 \right\}$$

Dunque, $\mathbb{P}\big(N(F)\big)$ è l'iperpiano di $\mathbb{P}$ di equazione cartesiana $a_0 X_0 + \cdots + a_n X_n = 0$. Sia ora $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ la base duale della base e di V. Si verifica facilmente che $F = a_0\varphi_0 + \cdots + a_n\varphi_n$ nella base duale e quindi si deduce che $[F]$ ha coordinate omogenee $a_0, \dots, a_n$ nel riferimento proiettivo duale $\varphi_0 \dots \varphi_n$.

Definizione 5. Siano $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo, $e_0 \dots e_n$ un sistema di coordinate omogenee su $\mathbb{P}$ e sia $H \subseteq \mathbb{P}$ un iperpiano di equazione cartesiana $a_0 X_0 + \cdots + a_n X_n = 0$. Gli scalari $a_0, \dots, a_n$ si dicono le *coordinate omogenee di* H *rispetto al riferimento* $e_0 \dots e_n$ e si introduce la notazione $H = H[a_0, \dots, a_n]$.

Dall'osservazione 5 e dalla definizione 5 segue quindi che è possibile esprimere l'applicazione di dualità in coordinate nel modo seguente:

$$\begin{array}{rccc} \delta\colon & \mathbb{P}^\vee & \longrightarrow & \{\text{iperpiani di } \mathbb{P}(V)\} \\ \mathrm{P} = \mathrm{P}[a_0, \dots, a_n] & & \longmapsto & H = H[a_0, \dots, a_n] \end{array}$$

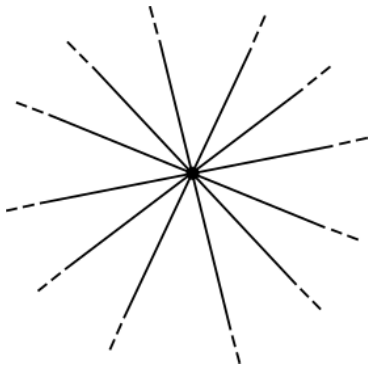
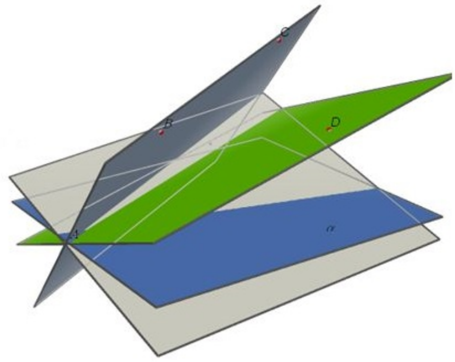
Definizione 6. Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo di dimensione $n \geq 2$ e sia $S \subseteq \mathbb{P}$ un sottospazio proiettivo di dimensione $s \leq n-1$. Si dice il *sistema lineare degli iperpiani di* $\mathbb{P}$ *di centro* S l'insieme

$$\Lambda_1(S) := \left\{ H \subseteq \mathbb{P} \text{ iperpiano} \;\middle|\; S \subseteq H \right\}$$

Se $s = n-2$, $\Lambda_1(S)$ si dice un *fascio di iperpiani.* Inoltre, se $S = \{\mathrm{P}\}$, si pone $\Lambda_1(\mathrm{P}) := \Lambda_1(S)$.

Esempio 1. Sia $\mathbb{P}$ un piano proiettivo e sia $\mathrm{P} \in \mathbb{P}$. Siccome un punto di $\mathbb{P}$ è un sottospazio proiettivo di dimensione 0 e un iperpiano di $\mathbb{P}$ ha dimensione 1, $\Lambda_1(\mathrm{P})$ è un fascio di rette passanti per P. Se invece $\mathbb{P}$ è uno spazio proiettivo di dimensione 3 e $\mathrm{P} \in \mathbb{P}$, allora $\Lambda_1(\mathrm{P})$ si dice una *stella di piani passanti per* P.

[15] Gli elementi della base duale sono tali che $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$ per ogni $0 \leq i, j \leq n$. Qui δ_{ij} denota il simbolo di Kronecker.

Proposizione 1. *Siano $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo, $e_0 \dots e_n$ un sistema di coordinate omogenee su $\mathbb{P}$, $S \subseteq \mathbb{P}$ un sottospazio proiettivo di dimensione $s \leq n-1$ e sia $AX = \mathbf{0}$ il sistema delle equazioni cartesiane di S, con $A \in \mathrm{M}_{n-s,n+1}(K)$, $A = (a_{ij})$, $X = {}^t(X_0 \cdots X_n)$. Per ogni $1 \leq i \leq n-s$ sia inoltre*

$$\begin{array}{rccc} F_i\colon & V & \longrightarrow & K \\ & e_0 & \longmapsto & a_{i0} \\ & & \dots & \\ & e_n & \longmapsto & a_{in} \end{array}$$

Allora il sistema lineare $\Lambda_1(S)$ è l'insieme degli iperpiani di $\mathbb{P}$ di equazione cartesiana

$$\lambda_1 F_1(X_0, \dots, X_n) + \lambda_2 F_2(X_0, \dots, X_n) + \dots + \lambda_{n-s} F_{n-s}(X_0, \dots, X_n) = 0 \tag{14}$$

al variare di $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-s}) \in K^{n-s}$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-s}) \neq (0, \dots, 0)$.

Dimostrazione. Sia fissato $H \in \Lambda_1(S)$. Per la definizione 6, so che $H \subseteq \mathbb{P}$ è un iperpiano tale che $S \subseteq H$. Sia $b_0X_0 + \dots + b_nX_n = 0$ l'equazione cartesiana di H. Osservo che ogni punto di S è anche un punto di H perché sto assumendo che $S \subseteq H$, ma allora i sistemi di equazioni

$$AX = \mathbf{0}\,, \qquad \begin{cases} AX = \mathbf{0} \\ b_0X_0 + \dots + b_nX_n = 0 \end{cases}$$

sono equivalenti. In particolare, dato che $AX = \mathbf{0}$ è il sistema delle equazioni cartesiane di un sottospazio proiettivo di dimensione s, vale che $\mathrm{r}(A) = n - s$ e quindi

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix} a_{10} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-s\,0} & \dots & a_{n-s\,n} \\ b_0 & \dots & b_n \end{pmatrix} = n - s$$

Di conseguenza, $\exists\,(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-s}) \in K^{n-s} \mid (b_0, \dots, b_n) = \lambda_1(a_{10}, \dots, a_{1n}) + \dots + \lambda_{n-s}(a_{n-s\,0}, \dots a_{n-s\,n})$ e, moltiplicando a sinistra primo e secondo membro per il vettore colonna X, si ottiene che

$$b_0X_0 + \dots + b_nX_n = \lambda_1 F_1(X_0, \dots, X_n) + \lambda_2 F_2(X_0, \dots, X_n) + \dots + \lambda_{n-s} F_{n-s}(X_0, \dots, X_n)$$

Inoltre, $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-s}) \neq (0, \dots, 0)$ perché $(b_0, \dots, b_n) \neq (0, \dots, 0)$ essendo $H \subseteq \mathbb{P}$ un iperpiano. Ho dunque mostrato che ciascun elemento di $\Lambda_1(S)$ è un iperpiano di equazione cartesiana (14). Sia ora $H \subseteq \mathbb{P}$ un iperpiano di equazione cartesiana (14) e sia $\mathrm{P} \in S$, $\mathrm{P} = \mathrm{P}[x_0, \dots, x_n]$. Ovviamente, si ha che le coordinate omogenee di P soddisfano il sistema delle equazioni cartesiane di S, cioè $AX = \mathbf{0}$. In particolare, esse verificano l'equazione definita da ciascuna riga di A. In altre parole, per ogni $1 \leq i \leq n-s$, vale che

$$F_i(x_0, \dots, x_n) = a_{i0}x_0 + \dots + a_{in}x_n = 0$$

Di conseguenza, $\lambda_1 F_1(x_0, \dots, x_n) + \lambda_2 F_2(x_0, \dots, x_n) + \dots + \lambda_{n-s} F_{n-s}(x_0, \dots, x_n) = 0$. Ma allora $\mathrm{P} \in H$ e quindi, per arbitrarietà nella scelta del punto $\mathrm{P} \in S$, posso affermare che $S \subseteq H$. In conclusione, $H \subseteq \mathbb{P}$ è un iperpiano tale che $S \subseteq H$, cioè $H \in \Lambda_1(S)$. Ho dunque mostrato, per doppio contenimento, che il sistema lineare $\Lambda_1(S)$ è l'insieme degli iperpiani di $\mathbb{P}$ di equazione cartesiana (14). $\square$

Teorema 1. *Sia $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n e sia $s \leq n-1$. Allora l'applicazione di dualità induce una corrispondenza biunivoca tra sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}^{\vee}$ di dimensione $n-s-1$ e sistemi lineari di iperpiani di $\mathbb{P}$ di centro un sottospazio proiettivo di dimensione s. Inoltre, tale corrispondenza biunivoca rovescia le inclusioni.*

Dimostrazione. Sia $S \subseteq \mathbb{P}$ un sottospazio proiettivo di dimensione s e, fissato un sistema di coordinate omogenee $e_0 \dots e_n$ su $\mathbb{P}$, sia $AX = \mathbf{0}$ il sistema delle equazioni cartesiane di S, con $A \in \mathrm{M}_{n-s,n+1}(K)$, $A = (a_{ij})$, $X = {}^t(X_0 \cdots X_n)$. Per ogni $1 \leq i \leq n-s$ definisco inoltre

$$\begin{array}{rccc} F_i\colon & V & \longrightarrow & K \\ & e_0 & \longmapsto & a_{i0} \\ & & \dots & \\ & e_n & \longmapsto & a_{in} \end{array}$$

Per ogni $1 \leq i \leq n-s$ sia infine $H_i \subseteq \mathbb{P}$ l'iperpiano di equazione cartesiana $F_i(X_0, \dots, X_n) = 0$. Fissato un iperpiano $H \in \Lambda_1(S)$, l'equazione cartesiana di H è del tipo (14) per qualche $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-s}) \in K^{n-s}$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-s}) \neq (0, \dots, 0)$. Equivalentemente, essa è una combinazione lineare delle equazioni cartesiane di $H_1, \dots, H_{n-s}$ ma, ricordando la notazione introdotta con la definizione 5, quanto appena detto equivale ad affermare che le coordinate omogenee di H sono una combinazione lineare di quelle di $H_1, \dots, H_{n-s}$. Osservo tuttavia che le coordinate omogenee di un iperpiano di $\mathbb{P}$ sono le coordinate omogenee, rispetto al riferimento proiettivo duale $\varphi_0 \dots \varphi_n$ di $e_0 \dots e_n$, del punto associato tramite δ^{-1} in $\mathbb{P}^{\vee}$. Quanto affermato prima, dunque, significa che $\delta^{-1}(H) \in L\big(\delta^{-1}(H_1), \dots, \delta^{-1}(H_{n-s})\big)$ e, dal momento che tale relazione non dipende da una particolare scelta di $H \in \Lambda_1(S)$, si deduce che

$$\delta^{-1}\big(\Lambda_1(S)\big) \subseteq L\big(\delta^{-1}(H_1), \dots, \delta^{-1}(H_{n-s})\big)$$

Ora un qualsiasi punto appartenente al sottospazio generato da $\delta^{-1}(H_1), \dots, \delta^{-1}(H_{n-s})$ ha coordinate omogenee del tipo $\lambda_1(a_{10}, \dots, a_{1n}) + \dots + \lambda_{n-s}(a_{n-s\,0}, \dots, a_{n-s\,n})$ per qualche $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-s}) \in K^{n-s}$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-s}) \neq (0, \dots, 0)$. L'iperpiano di $\mathbb{P}$ associato tramite δ ha quindi un'equazione cartesiana del tipo (14) e di conseguenza appartiene a $\Lambda_1(S)$ in virtù della proposizione 1. Ho dunque mostrato che

$$\delta^{-1}\big(\Lambda_1(S)\big) = L\big(\delta^{-1}(H_1), \dots, \delta^{-1}(H_{n-s})\big)$$

Inoltre, poiché $AX = \mathbf{0}$ è il sistema delle equazioni cartesiane di un sottospazio proiettivo di dimensione s, vale che $\mathrm{r}(A) = n-s$. In particolare, le righe di A sono linearmente indipendenti, dunque lo sono anche le equazioni cartesiane (e quindi le coordinate omogenee) degli iperpiani $H_1, \dots, H_{n-s}$. Di conseguenza, i punti $\delta^{-1}(H_1), \dots, \delta^{-1}(H_{n-s})$ sono linearmente indipendenti e questo significa, per definizione, che

$$\dim L\big(\delta^{-1}(H_1), \dots, \delta^{-1}(H_{n-s})\big) = n-s-1$$

Posso dunque concludere che l'applicazione di dualità induce una corrispondenza biunivoca tra sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}^{\vee}$ di dimensione $n-s-1$ e sistemi lineari di iperpiani di $\mathbb{P}$ di centro un sottospazio proiettivo di dimensione s. Va infine osservato che la corrispondenza biunivoca ottenuta rovescia le inclusioni, il che segue banalmente dalla definizione 6. Siano infatti $S, S' \subseteq \mathbb{P}$ sottospazi proiettivi tali che $S \subseteq S'$ e sia $H \in \Lambda_1(S')$. Ovviamente, basta osservare che $S \subseteq S' \subseteq H$ per transitività, ma allora $H \in \Lambda_1(S)$. Posso quindi affermare, data l'arbitrarietà nella scelta di $H \in \Lambda_1(S')$, che $\Lambda_1(S') \subseteq \Lambda_1(S)$. $\square$

Osservazione 6. Siano $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo, $e_0 \dots e_n$ un sistema di coordinate omogenee su $\mathbb{P}$, $\mathrm{P} \in \mathbb{P}$, $\mathrm{P} = \mathrm{P}[x_0, \dots, x_n]$ e sia $H \subseteq \mathbb{P}$ un iperpiano, $H = H[a_0, \dots, a_n]$. Allora

$$\mathrm{P} \in H \iff a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0 \iff H \in \Lambda_1(\mathrm{P})$$

Quindi, ogni affermazione che riguarda l'appartenenza di punti a iperpiani ha un'affermazione duale che riguarda l'appartenenza di iperpiani a sistemi lineari.

Esempio 2. Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo e sia $e_0 \dots e_n$ un sistema di coordinate omogenee su $\mathbb{P}$. Si può definire una seconda applicazione di dualità nel modo seguente:

$$\begin{array}{rccc} \delta^{\vee}\colon & \mathbb{P} & \longrightarrow & \{\text{iperpiani di } \mathbb{P}^{\vee}\} \\ & \mathrm{P} = \mathrm{P}[a_0, \dots, a_n] & \longmapsto & H = H[a_0, \dots, a_n] \end{array}$$

Siano ora $\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_n \in \mathbb{P}$ e siano $H_1 = \delta^\vee(\mathrm{P}_1), \dots, H_n = \delta^\vee(\mathrm{P}_n)$. Ovviamente si ha che $L(\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_n)$ è un iperpiano se e solo se i punti $\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_n$ sono linearmente indipendenti. Definendo l'indipendenza lineare per iperpiani in $\mathbb{P}^\vee$ in modo analogo a quanto fatto nella definizione 4, l'affermazione precedente equivale a dire che $H_1, \dots, H_n$ sono linearmente indipendenti. Equivalentemente, sono linearmente indipendenti le equazioni cartesiane di $H_1, \dots, H_n$. Supponendo che $F_i(X_0, \dots, X_n) = 0$ sia l'equazione cartesiana di H_i al variare dell'indice $1 \le i \le n$, deve dunque valere che il sistema di equazioni

$$\begin{cases} F_1(X_0, \dots, X_n) = 0 \\ \vdots \\ F_n(X_0, \dots, X_n) = 0 \end{cases}$$

ha per soluzione un punto in $\mathbb{P}^\vee$. Le seguenti affermazioni sono quindi l'una la duale dell'altra:

n punti linearmente indipendenti generano un iperpiano	n iperpiani linearmente indipendenti hanno in comune un punto

2.4 Cambiamenti di coordinate omogenee e proiettività

Proposizione 1 (Formula del cambiamento di coordinate omogenee)**.** *Sia $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo e siano $e_0 \dots e_n$, $f_0 \dots f_n$ sistemi di coordinate omogenee su $\mathbb{P}$. Allora $\exists\, A \in \mathrm{GL}_{n+1}(K)$, individuata a meno di un fattore di proporzionalità $\alpha \in K^*$, tale che, se $\mathrm{P} \in \mathbb{P}$ è un punto che ha coordinate omogenee $x_0, \dots, x_n$ nel riferimento $e_0 \dots e_n$ e coordinate omogenee $y_0, \dots, y_n$ nel riferimento $f_0 \dots f_n$, valga che*

$$y = Ax\,, \quad dove \quad y = {}^t(y_0 \cdots y_n)\,,\; x = {}^t(x_0 \cdots x_n)$$

Dimostrazione. Innanzitutto, considero le basi $e = \{e_0, \dots, e_n\}$, $f = \{f_0, \dots, f_n\}$ di V che definiscono i sistemi di coordinate omogenee fissati su $\mathbb{P}$ e definisco $A := \mathrm{M}_{f,e}(\mathrm{id}_V)$. Fissato un qualsiasi punto $\mathrm{P} \in \mathbb{P}$, $\mathrm{P} = [v]$ vale ovviamente che, se $v = x_0e_0 + \dots + x_ne_n = y_0f_0 + \dots + y_nf_n$, allora $y = Ax$. Bisogna quindi mostrare che A è individuata a meno di un fattore di proporzionalità $\alpha \in K^*$. Per l'osservazione 2-(i) della sezione 2.1 si ha che, fissati arbitrariamente $\lambda, \mu \in K^*$, il punto P è associato anche ai vettori

$$\lambda v = x_0(\lambda e_0) + \dots + x_n(\lambda e_n)$$
$$\mu v = y_0(\mu f_0) + \dots + y_n(\mu f_n)$$

Dall'osservazione 5 della sezione 2.1 segue che le basi $\{\lambda e_0, \dots, \lambda e_n\}$ e $\{\mu f_0, \dots, \mu f_n\}$ di V individuano gli stessi riferimenti proiettivi su $\mathbb{P}$ definiti dalle basi e e f. A questo punto, ricordando che $A = \mathrm{M}_{f,e}(\mathrm{id}_V)$ e supponendo che $A = (a_{ij})$, osservo che vale per ogni $1 \le j \le n$ la relazione

$$\lambda e_j = \lambda\left(\sum_{i=1}^n a_{ij} f_i\right) = \sum_{i=1}^n (\lambda a_{ij}) f_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda}{\mu} a_{ij}\right)(\mu f_i)$$

La nuova matrice del cambiamento di coordinate è data dunque da αA ponendo $\alpha := \frac{\lambda}{\mu}$. □

Definizione 1. Siano $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}' = \mathbb{P}(V')$ spazi proiettivi. Un'applicazione $f\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ si dice un *isomorfismo di $\mathbb{P}$ su $\mathbb{P}'$* se $\exists\, \varphi\colon V \to V'$ isomorfismo di spazi vettoriali tale che

$$f\big([v]\big) = [\varphi(v)]$$

per ogni $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$. L'applicazione φ si dice l'*isomorfismo associato a f*. Inoltre, gli spazi proiettivi $\mathbb{P}$ e $\mathbb{P}'$ si dicono *isomorfi* e si denota $\mathbb{P} \simeq \mathbb{P}'$ se esiste un isomorfismo di $\mathbb{P}$ su $\mathbb{P}'$.

Osservazione 1. Siano $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}' = \mathbb{P}(V')$ spazi proiettivi. Ogni isomorfismo di $\mathbb{P}$ su $\mathbb{P}'$ è biiettivo.

Dimostrazione. Sia $f\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ un isomorfismo di spazi proiettivi e sia $\varphi\colon V \to V'$ l'isomorfismo di spazi vettoriali associato a f. Innanzitutto, dimostro che f è un'applicazione iniettiva. Siano dunque fissati due punti qualsiasi $[v], [w] \in \mathbb{P}$ tali che $f\big([v]\big) = f\big([w]\big)$. Allora valgono le seguenti implicazioni:

$$
\begin{aligned}
& f\big([v]\big) = f\big([w]\big) \\
& \qquad \Longrightarrow\ [\varphi(v)] = [\varphi(w)] && \text{in virtù della definizione 1} \\
& \qquad \Longrightarrow\ \exists\, \lambda \in K^* \mid \varphi(v) = \lambda\varphi(w) && \text{per l'osservazione 2-(i) della sezione 2.1} \\
& \qquad \Longrightarrow\ \exists\, \lambda \in K^* \mid \varphi(v) = \varphi(\lambda w) && \text{perché } \varphi \text{ è un'applicazione lineare} \\
& \qquad \Longrightarrow\ \exists\, \lambda \in K^* \mid v = \lambda w && \text{perché } \varphi \text{ è un'applicazione iniettiva} \\
& \qquad \Longrightarrow\ [v] = [w]
\end{aligned}
$$

Di conseguenza, f è iniettiva. Ora mi occupo di mostrare che f è un'applicazione suriettiva. Fisso quindi un punto $[v'] \in \mathbb{P}'$. Dato che φ è suriettiva e $v' \in V'$, esiste un vettore $v \in V$ tale che $\varphi(v) = v'$, ma allora

$$[v'] = [\varphi(v)] = f\big([v]\big)$$

Va notato che tale espressione ha senso perché $v \neq \mathbf{0}$ essendo $\varphi(v) \neq \mathbf{0}$. Avendo così dimostrato che f è anche suriettiva, posso concludere che è un'applicazione biiettiva. □

Definizione 2. Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo. Un isomorfismo f di $\mathbb{P}$ su se stesso si dice una *proiettività di* $\mathbb{P}$ e l'isomorfismo associato a f si dice[16] l'*automorfismo associato a* f.

Osservazione 2. Siano $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}' = \mathbb{P}(V')$ spazi proiettivi e sia $\varphi\colon V \to V'$ un isomorfismo di spazi vettoriali. Dalla definizione 1 segue immediatamente che l'applicazione $f\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ definita dalla relazione $f\big([v]\big) = [\varphi(v)]$ per ogni $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$ è un isomorfismo di $\mathbb{P}$ su $\mathbb{P}'$.

Osservazione 3. Siano $\mathbb{P}$ e $\mathbb{P}'$ spazi proiettivi. Dalle proprietà degli isomorfismi di spazi vettoriali segue facilmente che $\mathbb{P} \simeq \mathbb{P}'$ se e solo se $\dim \mathbb{P} = \dim \mathbb{P}'$. In particolare, se $\dim \mathbb{P} = n$, allora $\mathbb{P} \simeq \mathbb{P}^n(K)$.

Osservazione 4. Siano $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}' = \mathbb{P}(V')$ spazi proiettivi e sia $f\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ un isomorfismo di spazi proiettivi. Allora l'isomorfismo associato a f è definito a meno di costanti moltiplicative non nulle.

Dimostrazione. Detto $\varphi\colon V \to V'$ l'isomorfismo associato a f e prefissati $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$, $\lambda \in K^*$, vale che

$$f([v]) = [\varphi(v)] = [\lambda\varphi(v)] = [(\lambda\varphi)(v)]$$

L'applicazione $\lambda\varphi\colon V \to V'$ definita da $(\lambda\varphi)(v) = \lambda\varphi(v)$ per ogni $v \in V$ è banalmente un isomorfismo di spazi vettoriali. Dalla relazione precedente segue che anche $\lambda\varphi$ è l'isomorfismo associato a f e quindi posso concludere che quest'ultimo è individuato a meno di un fattore di proporzionalità $\lambda \in K^*$. □

Osservazione 5. Siano $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}' = \mathbb{P}(V')$ spazi proiettivi, $f\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ un isomorfismo di spazi proiettivi e siano $\varphi, \psi\colon V \to V'$ due isomorfismi associati a f. Allora $\exists\, \lambda \in K^* \mid \psi = \lambda\varphi$.

Dimostrazione. Poiché per ipotesi φ e ψ sono isomorfismi associati a f, per ogni $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$ si ha che

$$f\big([v]\big) = [\varphi(v)] = [\psi(v)]$$

Di conseguenza, $\exists\, \lambda_v \in K^*$ tale che $\psi(v) = \lambda_v\varphi(v)$. Bisogna mostrare che lo scalare λ_v non dipende dalla scelta di $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$, cioè che $\lambda_v = \lambda_{v'}$ per ogni $v, v' \in V$, $v, v' \neq \mathbf{0}$. Dalla relazione precedente segue che

$$(\varphi^{-1} \circ \psi)(v) = \lambda_v \operatorname{id}_V(v) = \lambda_v v$$

Ma allora, definendo $\chi := \varphi^{-1} \circ \psi$, si ottiene che $\chi(v) = \lambda_v v$, cioè che un qualsiasi vettore $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$ è un autovettore di χ. Dimostro che $\exists\, \lambda \in K^* \mid \chi = \lambda \operatorname{id}_V$. Sia quindi $\{e_0, \dots, e_n\}$ una base di V. I vettori di una base sono non nulli, perciò $\exists\, \lambda_0, \dots, \lambda_n \in K^* \mid \chi(e_i) = \lambda_i e_i$ per ogni $0 \leq i \leq n$. Vengano ora fissati due indici $0 \leq i \neq j \leq n$. Osservo che anche $e_i + e_j \neq \mathbf{0}$, ma allora $\exists\, \lambda_{ij} \in K^* \mid \chi(e_i + e_j) = \lambda_{ij}(e_i + e_j)$. Ovviamente, χ è un isomorfismo di spazi vettoriali in quanto definito come composizione di isomorfismi, perciò posso sfruttare la linearità di χ per affermare che

$$\lambda_i e_i + \lambda_j e_j = \chi(e_i) + \chi(e_j) = \chi(e_i + e_j) = \lambda_{ij}(e_i + e_j) = \lambda_{ij} e_i + \lambda_{ij} e_j$$

Dall'indipendenza lineare dei vettori di una base segue quindi che $\lambda_i = \lambda_{ij} = \lambda_j$. Per arbitrarietà nella scelta degli indici $0 \leq i \neq j \leq n$, deduco che $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n$. Dunque, definito $\lambda := \lambda_0$, siccome ciascun vettore $v \in V$ è combinazione lineare dei vettori della base $\{e_0, \dots, e_n\}$, posso affermare che $\chi = \lambda \operatorname{id}_V$. Di conseguenza, posso concludere che $\varphi^{-1} \circ \psi = \lambda \operatorname{id}_V$ oppure, equivalentemente, che $\psi = \lambda\varphi$. □

[16] Come nel caso analogo per spazi affini, anche qui l'isomorfismo associato a f è effettivamente un automorfismo.

Osservazione 6. Sia $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo. Si verifica immediatamente che l'applicazione $\mathrm{id}_{\mathbb{P}}$ è una proiettività con automorfismo associato l'applicazione id_V.

Osservazione 7. Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo e siano $f, g\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ proiettività. Si dimostra facilmente che l'applicazione composta $f \circ g\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ e l'applicazione inversa $f^{-1}\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ sono proiettività.

Definizione 3. Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo. Si dice *gruppo proiettivo associato a* $\mathbb{P}$ l'insieme

$$\mathrm{PGL}(\mathbb{P}) := \left\{ f\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P} \;\middle|\; f \text{ è una proiettività} \right\}$$

Il gruppo proiettivo associato a $\mathbb{P}^n$ si dice *gruppo lineare proiettivo di ordine* $n{+}1$ e si denota $\mathrm{PGL}_{n+1}(K)$.

Osservazione 8. Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo. Allora $\mathrm{PGL}(\mathbb{P})$ è un gruppo in virtù delle osservazioni 6 e 7.

Proposizione 2. *Sia $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo. Allora*

$$\mathrm{PGL}(\mathbb{P}) \simeq {}^{\mathrm{GL}(V)}\!\big/_{\{\lambda\,\mathrm{id}_V \mid \lambda \in K^*\}}$$

Dimostrazione. Definisco l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} \pi\colon & \mathrm{GL}(V) & \longrightarrow & \mathrm{PGL}(\mathbb{P}) \\ & \varphi & \longrightarrow & f \end{array}$$

dove $f\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ è la proiettività con automorfismo associato $\varphi\colon V \to V$. Dimostro che π è un omomorfismo di gruppi. Siano $\varphi, \psi \in \mathrm{GL}(V)$ e siano $f := \pi(\varphi)$, $g := \pi(\psi)$. Fissato $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$, valgono le relazioni

$$f\big([v]\big) = [\varphi(v)]\,, \quad g\big([v]\big) = [\psi(v)]$$

Mostrare che $\pi(\varphi \circ \psi) = \pi(\varphi) \circ \pi(\psi)$ equivale a dimostrare che la proiettività di $\mathbb{P}$ con automorfismo associato $\varphi \circ \psi$ è l'applicazione $f \circ g$. Poiché la scelta di $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$ è arbitraria, basta osservare che

$$(f \circ g)\big([v]\big) = f\big(g\big([v]\big)\big) = f\big([\psi(v)]\big) = \big[\varphi\big(\psi(v)\big)\big] = [(\varphi \circ \psi)(v)]$$

Ora osservo che π è banalmente un'applicazione suriettiva. Infatti, ogni applicazione $f \in \mathrm{PGL}(\mathbb{P})$ è per definizione una proiettività di $\mathbb{P}$, quindi $\exists\, \varphi \in \mathrm{GL}(V)$ tale che φ sia l'automorfismo associato a f, cioè tale che $f = \pi(\varphi)$. Infine, ricordando le osservazioni 5 e 6 calcolo il nucleo dell'applicazione π:

$$\begin{aligned} N(\pi) &= \{\, \varphi \in \mathrm{GL}(V) \mid \pi(\varphi) = \mathrm{id}_{\mathbb{P}} \,\} \\ &= \{\, \varphi \in \mathrm{GL}(V) \mid \pi(\varphi) = \pi(\mathrm{id}_V) \,\} \\ &= \{\, \varphi \in \mathrm{GL}(V) \mid \varphi = \lambda\,\mathrm{id}_V,\ \exists\, \lambda \in K^* \,\} \\ &= \{\, \lambda\,\mathrm{id}_V \mid \lambda \in K^* \,\} \end{aligned}$$

L'asserto segue dunque dal teorema di fattorizzazione degli omomorfismi. □

Proposizione 3. *Siano $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}' = \mathbb{P}(V')$ spazi proiettivi di dimensione n e siano $\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_{n+1} \in \mathbb{P}$ punti in posizione generale, $\mathrm{P}'_0, \dots, \mathrm{P}'_{n+1} \in \mathbb{P}'$ punti in posizione generale. Allora $\exists!\, f\colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ isomorfismo tale che $f(\mathrm{P}_i) = \mathrm{P}'_i$ per ogni $0 \leq i \leq n+1$. In particolare, ogni proiettività che fissa $n+2$ punti in posizione generale coincide con l'applicazione $\mathrm{id}_{\mathbb{P}}$.*

Dimostrazione. Innanzitutto, siccome per ipotesi $\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_{n+1} \in \mathbb{P}$, $\mathrm{P}'_0, \dots, \mathrm{P}'_{n+1} \in \mathbb{P}'$, sicuramente esistono $v_0, \dots, v_{n+1} \in V$, $v'_0, \dots, v'_{n+1} \in V'$ tali che $\mathrm{P}_i = [v_i]$, $\mathrm{P}'_i = [v'_i]$ per ogni $0 \leq i \leq n+1$. Naturalmente, l'insieme $\{v_0, \dots, v_n\}$ è una base di V, perché $\dim V = n+1$ e i vettori $v_0, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti, essendo $\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_{n+1}$ in posizione generale. Analogamente, $\{v'_0, \dots, v'_n\}$ è una base di V'. Di conseguenza, esistono scalari $\lambda_0, \dots, \lambda_n, \lambda'_0, \dots, \lambda'_n \in K$ tali che

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_n v_n \\ v'_{n+1} &= \lambda'_0 v'_0 + \dots + \lambda'_n v'_n \end{aligned} \tag{15}$$

Se, per assurdo, esistesse $0 \leq i \leq n$ tale che $\lambda_i = 0$, allora

$$v_{n+1} = \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \dots + \lambda_n v_n$$

cioè $v_0, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_{n+1}$ sarebbero linearmente dipendenti e quindi sarebbero dipendenti anche gli $n+1$ punti $\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_{i-1}, \mathrm{P}_{i+1}, \ldots, \mathrm{P}_{n+1}$, contraddicendo l'ipotesi che $\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_{n+1}$ siano in posizione generale. Dunque, $\lambda_i \in K^*$ per ogni $0 \leq i \leq n$ e, per ragioni del tutto analoghe, anche $\lambda'_i \in K^*$ per ogni $0 \leq i \leq n$. Ora pongo $\lambda_{n+1} := \lambda'_{n+1} := 1$ e definisco $u_i := \lambda_i v_i$, $u'_i := \lambda'_i v'_i$ per ogni $0 \leq i \leq n+1$. Siccome $\lambda_i, \lambda'_i \in K^*$, si ha che $\mathrm{P}_i = [u_i]$, $\mathrm{P}'_i = [u'_i]$ per ogni $0 \leq i \leq n+1$ e inoltre $\{u_0, \ldots, u_n\}$, $\{u'_0, \ldots, u'_n\}$ sono basi di V e di V' rispettivamente. Le relazioni (15) diventano dunque

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_0 + \cdots + u_n \\ u'_{n+1} &= u'_0 + \cdots + u'_n \end{aligned} \tag{16}$$

Sia quindi $\varphi \colon V \to V'$ l'isomorfismo definito da[17] $\varphi(u_i) = u'_i$ per ogni $0 \leq i \leq n$. Osservo che

$$\varphi(u_{n+1}) \underset{\substack{\uparrow \\ (16)}}{=} \varphi(u_0 + \cdots + u_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi \text{ è lineare}}}{=} \varphi(u_0) + \cdots + \varphi(u_n) = u'_0 + \cdots + u'_n \underset{\substack{\uparrow \\ (16)}}{=} u'_{n+1}$$

Concludo che l'isomorfismo di spazi proiettivi $f \colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ che ha φ come isomorfismo di spazi vettoriali associato soddisfa la proprietà voluta, cioè

$$f(\mathrm{P}_i) = f\big([u_i]\big) = [\varphi(u_i)] = [u'_i] = \mathrm{P}'_i$$

per ogni $0 \leq i \leq n+1$. Sia ora $g \colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ un isomorfismo che goda della medesima proprietà, cioè tale che $g(\mathrm{P}_i) = \mathrm{P}'_i$ per ogni $0 \leq i \leq n+1$ e sia $h := g^{-1} \circ f$. Si verifica facilmente che l'applicazione inversa di un isomorfismo e la composizione di isomorfismi sono ancora isomorfismi, dunque h è un isomorfismo di spazi proiettivi. In questo caso, h è anche una proiettività di $\mathbb{P}$ e quindi posso supporre che $\psi \colon V \to V$ sia l'automorfismo associato a h. A questo punto, l'obiettivo è dimostrare che $h = \mathrm{id}_{\mathbb{P}}$. Osservo che

$$h(\mathrm{P}_i) = g^{-1}\big(f(\mathrm{P}_i)\big) = g^{-1}(\mathrm{P}'_i) = \mathrm{P}_i$$

per ogni $0 \leq i \leq n+1$, ma allora

$$[u_i] = \mathrm{P}_i = h(\mathrm{P}_i) = h\big([u_i]\big) = [\psi(u_i)]$$

Da tale relazione deduco che, per ogni $0 \leq i \leq n+1$, esiste $\alpha_i \in K^*$ tale che $\psi(u_i) = \alpha_i u_i$. Adesso

$$\alpha_{n+1} u_{n+1} = \psi(u_{n+1}) = \psi(u_0 + \cdots + u_n) = \psi(u_0) + \cdots + \psi(u_n) = \alpha_0 u_0 + \cdots + \alpha_n u_n$$

D'altra parte, tuttavia, ancora dalla condizione (16) si ricava che

$$\alpha_{n+1} u_{n+1} = \alpha_{n+1}(u_0 + \cdots + u_n) = \alpha_{n+1} u_0 + \cdots + \alpha_{n+1} u_n$$

Dall'indipendenza lineare di $u_0, \ldots, u_n$ segue che $\alpha_0 = \cdots = \alpha_{n+1}$, quindi $\psi(u_i) = \alpha_0 u_i = \alpha_0 \,\mathrm{id}_V(u_i)$ per ogni $0 \leq i \leq n+1$ e dal fatto che $\{u_0, \ldots, u_n\}$ è una base di V segue in particolare che $\psi = \alpha_0 \,\mathrm{id}_V$. Posso concludere, grazie alle osservazioni 4 e 6, che $h = \mathrm{id}_{\mathbb{P}}$ e, di conseguenza, che $g = f$. $\square$

Proposizione 4. *Siano $\mathbb{P} = \mathbb{P}(V)$ uno spazio proiettivo, $S \subseteq \mathbb{P}$ un sottospazio proiettivo e sia $f \colon \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ una proiettività. Allora $f(S) \subseteq \mathbb{P}$ è un sottospazio proiettivo e $f\big|_S \colon S \to f(S)$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Innanzitutto, dato che $S \subseteq \mathbb{P}$ è un sottospazio proiettivo, $\exists\, W \subseteq V$ sottospazio vettoriale tale che $S = \mathbb{P}(W)$. Sia $\varphi \colon V \to V$ l'automorfismo associato a f e venga fissato un punto $\mathrm{P} \in S$, $\mathrm{P} = [w]$. Dal lemma 1-(i) della sezione 2.1 segue ovviamente che $w \in W$ e quindi $\varphi(w) \in \varphi(W)$. Si ha che

$$f(\mathrm{P}) = f\big([w]\big) = [\varphi(w)] \tag{17}$$

Posso dunque affermare che $f(\mathrm{P}) \in \mathbb{P}\big(\varphi(W)\big)$ e dall'arbitrarietà con cui si è fissato il punto $\mathrm{P} \in S$ segue che $f(S) \subseteq \mathbb{P}\big(\varphi(W)\big)$. A questo punto osservo che $W \simeq \varphi(W)$ perché, ovviamente, φ è un isomorfismo di

[17] L'esistenza di tale isomorfismo è garantita da un teorema già affrontato nel corso GE110.

spazi vettoriali, quindi $\dim W = \dim \varphi(W)$.[18] Similmente, vale che $S \simeq f(S)$ perché f è un isomorfismo di spazi proiettivi e, di conseguenza, $\dim S = \dim f(S)$ per l'osservazione 3. Ma allora

$$\dim f(S) = \dim S = \dim W - 1 = \dim \varphi(W) - 1 = \dim \mathbb{P}\big(\varphi(W)\big)$$

Posso dunque concludere, in virtù del lemma 1-(ii) della sezione 2.1, che $f(S) = \mathbb{P}\big(\varphi(W)\big)$. In particolare, $f(S) \subseteq \mathbb{P}$ è un sottospazio proiettivo. Inoltre, dalla relazione (17) segue banalmente che $f\big|_S \colon S \to f(S)$ è un isomorfismo di spazi proiettivi con isomorfismo di spazi vettoriali associato $\varphi\big|_W \colon W \to \varphi(W)$. Infatti

$$f(\mathrm{P}) = f\big|_S(\mathrm{P}), \quad \varphi(w) = \varphi\big|_W(w) \qquad \square$$

Definizione 4. Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo. Un insieme $F \subseteq \mathbb{P}$ si dice una *figura proiettiva di* $\mathbb{P}$.

Definizione 5. Sia $\mathbb{P}$ uno spazio proiettivo. Due figure proiettive $F, F' \subseteq \mathbb{P}$ si dicono *proiettivamente equivalenti* se esiste $f \in \mathrm{PGL}(\mathbb{P})$ tale che $f(F) = F'$. Una proprietà di F si dice una *proprietà proiettiva* se è posseduta da ogni figura proiettiva proiettivamente equivalente a F.

Esempio 1. La dimensione di un sottospazio proiettivo è un'invariante proiettiva. In un piano proiettivo, contenere il punto fondamentale F_0 non è una proprietà proiettiva.

3 Curve algebriche piane

3.1 Generalità

L'idea è associare a un polinomio in due variabili, possibilmente non omogeneo, i punti del piano affine le cui coordinate sono una radice del polinomio stesso, cioè

$$f(X,Y) \quad \longmapsto \quad \big\{\, \mathrm{P} \in \mathbb{A}^2(K),\ \mathrm{P} = \mathrm{P}(x,y) \;\big|\; f(x,y) = 0 \,\big\}$$

Esempio 1. Al polinomio a coefficienti reali $X^2 + Y^2 + 1$ si può quindi associare l'insieme vuoto, in quanto l'equazione $X^2 + Y^2 + 1 = 0$ non ammette soluzioni reali.

Similmente, a un polinomio omogeneo in tre variabili si possono associare i punti del piano proiettivo le cui coordinate omogenee sono una radice del polinomio, cioè

$$F(X_0, X_1, X_2) \quad \longmapsto \quad \big\{\, \mathrm{P} \in \mathbb{P}^2(K),\ \mathrm{P} = \mathrm{P}[x_0, x_1, x_2] \;\big|\; F(x_0, x_1, x_2) = 0 \,\big\}$$

Osservo anche che due polinomi distinti possono avere le stesse radici. Un esempio è dato dai polinomi a coefficienti interi $2X^2 + 2Y^2 - 2$ e $X^2 + Y^2 - 1$. La seguente definizione è quindi giustificata.

Definizione 1. Due polinomi non costanti $f, g \in K[X,Y]$ si dicono *proporzionali* se $\exists\, \alpha \in K^* \mid f = \alpha g$. Due polinomi omogenei non costanti $F, G \in K[X_0, X_1, X_2]$ si dicono *proporzionali* se $\exists\, \alpha \in K^* \mid F = \alpha G$.

Osservazione 1. La proporzionalità è una relazione di equivalenza in $K[X,Y]$ e in $K[X_0, X_1, X_2]$.

Definizione 2. Una classe di proporzionalità di polinomi non costanti di $K[X,Y]$ si dice una *curva algebrica in* $\mathbb{A}^2(K)$ (oppure una *curva algebrica piana affine*). In particolare, una classe di proporzionalità di polinomi non costanti di $\mathbb{R}[X,Y]$ si dice una *curva algebrica in* $\mathbb{E}^2$ (oppure una *curva algebrica piana euclidea*). Sia f un rappresentante di una curva algebrica fissata in $\mathbb{A}^2(K)$. L'equazione $f(X,Y) = 0$ si dice l'*equazione della curva algebrica in* $\mathbb{A}^2(K)$. L'insieme

$$\mathcal{C} := \big\{\, \mathrm{P} \in \mathbb{A}^2(K),\ \mathrm{P} = \mathrm{P}(x,y) \;\big|\; f(x,y) = 0 \,\big\}$$

si dice *supporto della curva algebrica in* $\mathbb{A}^2(K)$. Per semplicità, anche la curva algebrica stessa si denota $\mathcal{C}$. Il grado di f come polinomio si dice il *grado della curva algebrica* $\mathcal{C}$ e si denota $\mathrm{d}(\mathcal{C})$. Le curve algebriche in $\mathbb{A}^2(K)$ di grado 1, 2, 3, 4, ... si dicono *rette, coniche, cubiche, quartiche* e così via.

[18]Ciò è giustificato da un teorema affrontato nel corso GE110. Si tratta di un corollario del teorema di rango-nullità.

Osservazione 2. La definizione di curva algebrica in $\mathbb{P}^2(K)$ si dà in modo simile, ma richiede un commento preliminare. Se $f \in K[X_0, X_1, X_2]$ è un polinomio qualsiasi, non ha senso affermare che le coordinate omogenee di un punto nel piano proiettivo soddisfano l'equazione $f(X_0, X_1, X_2) = 0$ perché in generale, assegnati un punto $\mathrm{P} \in \mathbb{P}^2(K)$, $\mathrm{P} = \mathrm{P}[x_0, x_1, x_2]$ e $\lambda \in K^*$, può accadere che si abbia $f(x_0, x_1, x_2) = 0$ ma $f(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) \neq 0$. Per esempio, se $f(X_0, X_1, X_2) = X_0 + 1$, allora $f(-1, 0, 0) = 0$ ma $f(1, 0, 0) = 2$. Il problema non si pone se il polinomio che si considera è omogeneo. Infatti, se $F \in K[X_0, X_1, X_2]$ è un polinomio omogeneo di grado n allora, per ogni $\mathrm{P} \in \mathbb{P}^2(K)$, $\mathrm{P} = \mathrm{P}[x_0, x_1, x_2]$ e per ogni $\lambda \in K^*$, si ha che

$$F(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^n F(x_0, x_1, x_2)$$

da cui segue che il primo membro si annulla se e solo se si annulla il secondo. Ha dunque senso dire che le coordinate omogenee di un punto nel piano proiettivo annullano il polinomio omogeneo $F(X_0, X_1, X_2)$.

Definizione 3. Una classe di proporzionalità di polinomi omogenei non costanti di $K[X_0, X_1, X_2]$ si dice una *curva algebrica in* $\mathbb{P}^2(K)$ (o una *curva algebrica piana proiettiva*). Sia F un rappresentante di una curva algebrica fissata in $\mathbb{P}^2(K)$. L'equazione $F(X_0, X_1, X_2) = 0$ si dice l'*equazione della curva algebrica in* $\mathbb{P}^2(K)$. L'insieme

$$\mathcal{C} := \left\{ \mathrm{P} \in \mathbb{P}^2(K),\ \mathrm{P} = \mathrm{P}[x_0, x_1, x_2] \;\middle|\; F(x_0, x_1, x_2) = 0 \right\}$$

si dice *supporto della curva algebrica in* $\mathbb{P}^2(K)$. Per semplicità, anche la curva algebrica stessa si denota $\mathcal{C}$. Il grado di F come polinomio si dice il *grado della curva algebrica* $\mathcal{C}$ e si denota $\mathrm{d}(\mathcal{C})$. Le curve algebriche in $\mathbb{P}^2(K)$ di grado 1, 2, 3, 4, ... si dicono *rette, coniche, cubiche, quartiche* e così via.

Talvolta, il supporto di una curva algebrica piana $\mathcal{C}$ verrà denotato $\mathrm{Supp}(\mathcal{C})$ per distinguerlo dalla curva algebrica in sé, che per definizione non è un insieme di punti bensì una classe di equivalenza.

Esempio 2. La curva algebrica in $\mathbb{A}^2(K)$ di equazione $X + Y - 3 = 0$ è la classe di proporzionalità del polinomio $X + Y - 3$. Il grado di tale curva algebrica è 1, mentre il supporto è dato dall'insieme

$$\left\{ \mathrm{P} \in \mathbb{A}^2(K),\ \mathrm{P} = \mathrm{P}(x, y) \;\middle|\; x + y - 3 = 0 \right\}$$

La curva algebrica in $\mathbb{P}^2(K)$ di equazione $X_0 + X_1 + X_2 = 0$ è la classe di proporzionalità del polinomio omogeneo $X_0 + X_1 + X_2$. Il grado di tale curva algebrica è 1, mentre il supporto è dato dall'insieme

$$\left\{ \mathrm{P} \in \mathbb{P}^2(K),\ \mathrm{P} = \mathrm{P}[x_0, x_1, x_2] \;\middle|\; x_0 + x_1 + x_2 = 0 \right\}$$

Esempio 3. Curve algebriche distinte possono avere lo stesso supporto. Le curve algebriche in $\mathbb{A}^2(K)$ di equazioni $X + Y - 1 = 0$ e $(X + Y - 1)^2 = 0$, per esempio, hanno lo stesso supporto, dato dall'insieme

$$\left\{ \mathrm{P} \in \mathbb{A}^2(K),\ \mathrm{P} = \mathrm{P}(x, y) \;\middle|\; x + y - 1 = 0 \right\}$$

3.2 Equivalenze affini, euclidee e proiettive

Definizione 1. Sia $T\colon \mathbb{A}^2(K) \to \mathbb{A}^2(K)$ un'affinità, definita dalla relazione[19]

$$T(X, Y) = (a_{11}X + a_{12}Y + c_1, a_{21}X + a_{22}Y + c_2) \tag{18}$$

e sia $\mathcal{C}$ una curva algebrica in $\mathbb{A}^2(K)$ di equazione $f(X, Y) = 0$. La curva algebrica in $\mathbb{A}^2(K)$ di equazione

$$f(a_{11}X + a_{12}Y + c_1, a_{21}X + a_{22}Y + c_2) = 0$$

si dice la *trasformata di* $\mathcal{C}$ *tramite* T^{-1} e si denota $T^{-1}(\mathcal{C})$.

La definizione 1 è giustificata dalla seguente osservazione.

[19] Per il teorema 1 della sezione 1.16 nella sua variante affine, esistono una matrice invertibile e un vettore colonna tali che

$$T\left(\mathrm{P}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Q}\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right)$$

Osservazione 1. Siano $T\colon \mathbb{A}^2(K) \to \mathbb{A}^2(K)$ un'affinità definita da (18), $\mathcal{C}$ una curva algebrica in $\mathbb{A}^2(K)$ di equazione $f(X,Y)=0$, $\mathcal{D}$ la trasformata di $\mathcal{C}$ tramite T^{-1} e sia $\mathrm{P} \in \mathbb{A}^2(K)$, $\mathrm{P}=\mathrm{P}(x,y)$. Allora

$$\mathrm{P} \in \mathcal{D} \iff f\big(T(x,y)\big)=0 \iff T(x,y) \in \mathcal{C} \iff T(\mathrm{P}) \in \mathcal{C}$$

quindi, per doppia inclusione, vale che $T(\mathcal{D})=\mathcal{C}$ oppure, equivalentemente, che $\mathcal{D}=T^{-1}(\mathcal{C})$.

Definizione 2. Sia $T\colon \mathbb{P}^2(K) \to \mathbb{P}^2(K)$ una proiettività, definita da[20]

$$T\big([X_0,X_1,X_2]\big)=[a_{00}X_0+a_{01}X_1+a_{02}X_2, a_{10}X_0+a_{11}X_1+a_{12}X_2, a_{20}X_0+a_{21}X_1+a_{22}X_2]$$

e sia $\mathcal{C}$ una curva algebrica in $\mathbb{P}^2(K)$ di equazione $F(X_0,X_1,X_2)=0$. La curva in $\mathbb{P}^2(K)$ di equazione

$$F(a_{00}X_0+a_{01}X_1+a_{02}X_2, a_{10}X_0+a_{11}X_1+a_{12}X_2, a_{20}X_0+a_{21}X_1+a_{22}X_2)=0$$

si dice la *trasformata di* $\mathcal{C}$ *tramite* T^{-1} e si denota $T^{-1}(\mathcal{C})$.

La definizione 2 si giustifica con un'osservazione analoga a quella fatta nel caso affine.

Definizione 3. Due curve algebriche $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ in $\mathbb{A}^2(K)$ [risp. in $\mathbb{E}^2$, in $\mathbb{P}^2(K)$] si dicono *affinemente equivalenti* [risp. *congruenti*, *proiettivamente equivalenti*] se esiste un'affinità $T\colon \mathbb{A}^2(K) \to \mathbb{A}^2(K)$ [risp. un'isometria $T\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$, una proiettività $T\colon \mathbb{P}^2(K) \to \mathbb{P}^2(K)$] tale che $\mathcal{D}=T^{-1}(\mathcal{C})$.

Osservazione 2. Due curve algebriche $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ in $\mathbb{A}^2(K)$ [risp. in $\mathbb{E}^2$, in $\mathbb{P}^2(K)$] sono affinemente equivalenti [risp. congruenti, proiettivamente equivalenti] se e solo se i loro supporti sono figure geometriche affinemente equivalenti [risp. figure geometriche congruenti, figure proiettive proiettivamente equivalenti]. Infatti, basta cambiare notazione per accorgersi che la condizione $\mathcal{D}=T^{-1}(\mathcal{C})$ equivale a richiedere che

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{D})=T^{-1}\big(\mathrm{Supp}(\mathcal{C})\big)$$

Definizione 4. Sia $\mathcal{C}$ una curva algebrica in $\mathbb{A}^2(K)$ [risp. in $\mathbb{E}^2$, in $\mathbb{P}^2(K)$]. Una proprietà di $\mathcal{C}$ si dice una *proprietà affine* [risp. *euclidea, proiettiva*] se è posseduta da ogni curva affinemente equivalente [risp. congruente, proiettivamente equivalente] a $\mathcal{C}$.

Esempio 1. Sia $\mathcal{C}$ una curva algebrica in $\mathbb{A}^2(K)$ [risp. in $\mathbb{E}^2$, in $\mathbb{P}^2(K)$]. Allora $\mathrm{d}(\mathcal{C})$ è un'invariante affine [risp. euclidea, proiettiva]. Sia infatti $T\colon \mathbb{A}^2(K) \to \mathbb{A}^2(K)$ un'affinità [risp. $T\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ un'isometria, $T\colon \mathbb{P}^2(K) \to \mathbb{P}^2(K)$ una proiettività] e sia $\mathcal{D}=T^{-1}(\mathcal{C})$. Se $\mathrm{d}(\mathcal{C})=d$ e $f(X,Y)=0$ [risp. $f(X,Y)=0$, $F(X_0,X_1,X_2)=0$] è l'equazione di $\mathcal{C}$, allora il grado di f [risp. f, F] come polinomio è d e anche il grado di $f \circ T$ [risp. $f \circ T$, $F \circ T$] come polinomio è d perché la matrice associata a T è invertibile, quindi $\mathrm{d}(\mathcal{D})=d$ perché l'equazione di $\mathcal{D}$ è per definizione $f\big(T(X,Y)\big)=0$.

Esempio 2. Sia $\mathcal{C}$ una curva algebrica in $\mathbb{A}^2(K)$ [risp. in $\mathbb{E}^2$, in $\mathbb{P}^2(K)$]. Allora $\mathrm{Supp}(\mathcal{C})$ è un'invariante affine [risp. euclidea, proiettiva]. Il supporto di $\mathcal{C}$ potrebbe essere costituito da un punto, per esempio se $\mathcal{C}$ è la conica in $\mathbb{E}^2$ di equazione $X^2+Y^2=0$, oppure potrebbe essere vuoto o infinito.

3.3 Chiusura proiettiva

Definizione 1. Sia $f \in K[Y_1,\dots,Y_n]$ un polinomio e sia d il grado di f. Il polinomio $F \in K[X_0,\dots,X_n]$ tale che $F(X_0,\dots,X_n)=X_0^d f\big(\frac{X_1}{X_0},\dots,\frac{X_n}{X_0}\big)$ si dice il *polinomio omogeneizzato di* f.

Osservazione 1. Sia $f \in K[Y_1,\dots,Y_n]$ un polinomio e sia d il grado di f. Dalla definizione 1 segue che il polinomio omogeneizzato di f è un polinomio omogeneo di grado d.

Definizione 2. Sia $F \in K[X_0,\dots,X_n]$ un polinomio omogeneo. Il polinomio $f \in K[Y_1,\dots,Y_n]$ tale che $f(Y_1,\dots,Y_n)=F(1,Y_1,\dots,Y_n)$ si dice il *polinomio deomogeneizzato di* F.

[20]Dalla proposizione 2 della sezione 2.4 segue che a una proiettività $T\colon \mathbb{P}^2(K) \to \mathbb{P}^2(K)$ è possibile associare una matrice invertibile, individuata a meno di un fattore di proporzionalità non nullo, tale che

$$T\left(\mathrm{P}\begin{bmatrix}X_0\\X_1\\X_2\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Q}\left[\begin{pmatrix}a_{00}&a_{01}&a_{02}\\a_{10}&a_{11}&a_{12}\\a_{20}&a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_0\\X_1\\X_2\end{pmatrix}\right]$$

Esempio 1. Sia $\mathcal{C}$ la curva algebrica in $\mathbb{A}^2(K)$ di equazione $X + Y - 1 = 0$ e sia $\mathcal{D}$ la curva algebrica in $\mathbb{P}^2(K)$ di equazione $X_1 + X_2 - X_0 = 0$. Applicando alla curva $\mathcal{C}$ la mappa j_0 definita nella sezione 2.2, che in questo caso assume la forma

$$\begin{array}{cccc} j_0\colon & \mathbb{A}^2(K) & \longrightarrow & \mathbb{P}^2(K)\backslash H_0 \\ & (x,y) & \longmapsto & [1,x,y] \end{array}$$

si ottiene una curva che differisce da $\mathcal{D}$ soltanto nei punti all'infinito, cioè nei punti appartenenti alla retta all'infinito H_0 di $\mathbb{P}^2(K)$.[21] Più precisamente, tali punti appartengono a $\mathcal{D}$, ma non a $j_0(\mathcal{C})$.

Definizione 3. Sia $\mathcal{C}$ una curva algebrica in $\mathbb{A}^2(K)$ di equazione $f(X,Y) = 0$ e sia $F \in K[X_0, X_1, X_2]$ il polinomio omogeneizzato di f. La curva algebrica in $\mathbb{P}^2(K)$ di equazione $F(X_0, X_1, X_2) = 0$ si dice la *chiusura proiettiva di* $\mathcal{C}$ e si denota $\mathcal{C}^*$ (oppure $\bar{\mathcal{C}}$). Inoltre, i punti di $\mathcal{C}^* \cap H_0$ si dicono *punti impropri* (o *punti all'infinito*) *di* $\mathcal{C}$, mentre i punti di $\mathcal{C}^* \cap (\mathbb{P}^2(K)\backslash H_0)$ si dicono *punti propri* (o *punti al finito*) *di* $\mathcal{C}$.

Esempio 2. Nell'esempio 1 si ha che $\mathcal{D} = \mathcal{C}^*$ e i punti impropri di $\mathcal{C}$ sono i punti di $\mathcal{D}$ appartenenti alla retta H_0, cioè i punti di $\mathbb{P}^2(K)$ le cui coordinate omogenee soddisfano il sistema di equazioni

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_0 = 0 \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è data dal punto $\mathrm{P} = \mathrm{P}[0, 1, -1]$. Di conseguenza, P è l'unico punto all'infinito di $\mathcal{C}$. I punti propri di $\mathcal{C}$, invece, sono tutti i punti di $\mathcal{D}$ diversi da P.

3.4 Classificazione delle curve algebriche piane

A questo punto ci si pone il problema di classificare, a meno di equivalenza, tutte le curve algebriche piane di grado $d \geq 1$. Idealmente si vuole determinare una lista di equazioni, a due a due non equivalenti, che rappresentino tutte le curve di grado d.

Esempio 1 ($d = 1$)**.** Sia $r \subseteq \mathbb{A}^2(K)$ una retta di equazione cartesiana $AX + BY + C = 0$ con $\mathrm{r}(A \ \ B) \neq 0$. Dimostro che r è affinemente equivalente alla retta di equazione $X = 0$. Siccome $\mathrm{r}(A \ \ B) \neq 0$, deve valere che $A \neq 0$ oppure $B \neq 0$. Se $A \neq 0$, pongo

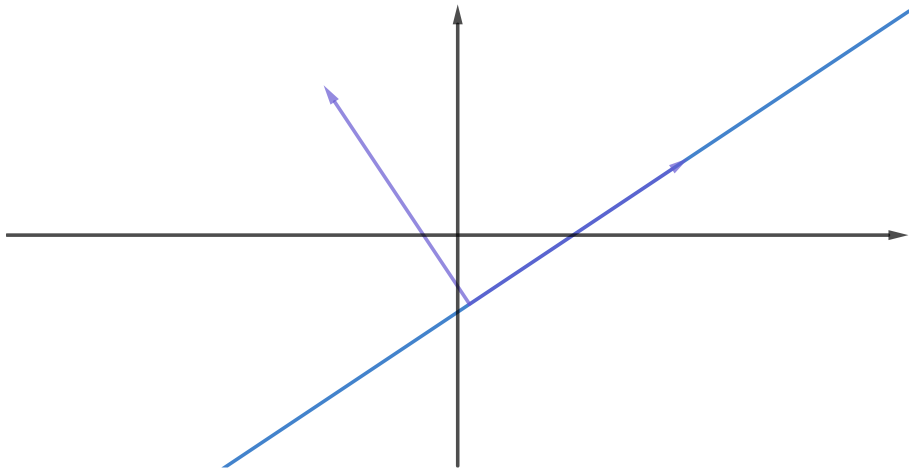
$$\begin{cases} X' = AX + BY + C \\ Y' = Y \end{cases}$$

La mappa associata al cambio di coordinate è un'affinità, perché la matrice $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ è invertibile. Dunque r è affinemente equivalente alla retta di equazione $X' = 0$. Se invece $A = 0$, allora $B \neq 0$ e pongo

$$\begin{cases} X' = X \\ Y' = AX + BY + C \end{cases}, \qquad \begin{cases} X'' = Y' \\ Y'' = X' \end{cases}$$

Anche qui le mappe associate ai due cambi di coordinate sono affinità, perché le matrici $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ A & B \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ sono invertibili. Dunque, r è affinemente equivalente alla retta di equazione $Y' = 0$, la quale è a sua volta affinemente equivalente alla retta di equazione $X'' = 0$. In conclusione, ogni retta in $\mathbb{A}^2(K)$ è riconducibile alla retta affine di equazione $X = 0$. Con un procedimento del tutto analogo si mostra che tutte le rette in $\mathbb{P}^2(K)$ sono proiettivamente equivalenti alla retta proiettiva di equazione $X_0 = 0$.

[21] Si ricorda che H_0 è l'iperpiano di equazione $X_0 = 0$ (sezione 2.1, definizione 6).



A questo punto si darà una classificazione delle curve algebriche in $\mathbb{P}^2(K)$ di grado $d = 2$.

Definizione 1. Sia $\mathcal{C}$ una conica in $\mathbb{P}^2(K)$ di equazione

$$a_{00}X_0^2 + 2a_{01}X_0X_1 + 2a_{02}X_0X_2 + a_{11}X_1^2 + 2a_{12}X_1X_2 + a_{22}X_2^2 = 0$$

con $a_{ij} \in K$ non tutti nulli e siano $a_{10} := a_{01}$, $a_{20} := a_{02}$, $a_{21} := a_{12}$. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

si dice la *matrice associata a* $\mathcal{C}$.

Osservazione 1. Siano $\mathcal{C}$ una conica in $\mathbb{P}^2(K)$, A la matrice associata a $\mathcal{C}$ e sia $X = {}^t(X_0\ X_1\ X_2)$. Dalla definizione 1 segue immediatamente che A gode delle seguenti proprietà:

(i) A è una matrice simmetrica.

(ii) A è una matrice non nulla. In particolare, $\mathrm{r}(A) \geq 1$.

(iii) A è definita a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.

(iv) L'equazione di $\mathcal{C}$ si può esprimere nella forma ${}^tXAX = 0$.

Osservazione 2. Sia $\mathcal{C}$ una conica in $\mathbb{P}^2(K)$ e sia A la matrice associata a $\mathcal{C}$. Allora $\mathrm{r}(A)$ è invariante per proiettività. In particolare, $\mathrm{r}(A) = 1, 2, 3$ è una proprietà proiettiva.

Dimostrazione. Sia $T\colon \mathbb{P}^2(K) \to \mathbb{P}^2(K)$ una proiettività e sia $M \in \mathrm{GL}_3(K)$ la matrice associata a T. Se pongo $X' := T(X)$, vale la relazione $X' = MX$ e, dal momento che $M \in \mathrm{GL}_3(K)$, si ha che $X = M^{-1}X'$. Ora se A è la matrice associata alla conica $\mathcal{C}$, allora l'equazione di $\mathcal{C}$ è ${}^tXAX = 0$ per l'osservazione 1-(iv) e, applicando T, si ottiene una conica proiettivamente equivalente, di equazione

$${}^t(M^{-1}X')A(M^{-1}X') = 0 \quad\iff\quad {}^tX'({}^tM^{-1}AM^{-1})X' = 0$$

Quindi a coniche proiettivamente equivalenti sono associate matrici congruenti perché $M^{-1} \in \mathrm{GL}_3(K)$, ovviamente e matrici congruenti hanno lo stesso rango. Per arbitrarietà di T, posso dunque concludere che $\mathrm{r}(A)$ è invariante per proiettività e da ciò segue che $\mathrm{r}(A) = 1, 2, 3$ è una proprietà proiettiva. $\square$

Definizione 2. Sia $\mathcal{C}$ una conica in $\mathbb{P}^2(K)$ e sia A la matrice associata a $\mathcal{C}$. Il rango di A si dice il *rango di* $\mathcal{C}$ e si denota $\mathrm{r}(\mathcal{C})$. Inoltre, la conica $\mathcal{C}$ si dice

(i) *non degenere* se $\mathrm{r}(\mathcal{C}) = 3$, *degenere* se $\mathrm{r}(\mathcal{C}) < 3$.

(ii) *semplicemente degenere* se $\mathrm{r}(\mathcal{C}) = 2$.

(iii) *doppiamente degenere* se $\mathrm{r}(\mathcal{C}) = 1$.

La definizione 2 è ben posta perché, sebbene la matrice associata a una conica proiettiva sia individuata a meno di un fattore di proporzionalità non nullo, il suo rango non cambia. Inoltre, dall'osservazione 2 segue che l'essere una conica non degenere, semplicemente degenere o doppiamente degenere è una proprietà proiettiva.

Teorema 1 (Classificazione delle coniche proiettive su un campo algebricamente chiuso)**.** *Sia K un campo algebricamente chiuso con $\mathrm{ch}(K) \neq 2$ e sia $\mathcal{C}$ una conica in $\mathbb{P}^2(K)$. Allora $\mathcal{C}$ è proiettivamente equivalente a una delle seguenti coniche proiettive:*

(i) $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$ (*conica generale, o non degenere*)

(ii) $X_0^2 + X_1^2 = 0$ (*conica semplicemente degenere*)

(iii) $X_0^2 = 0$ (*conica doppiamente degenere*)

Inoltre, le coniche proiettive (i)*,* (ii) *e* (iii) *sono a due a due non proiettivamente equivalenti.*

Dimostrazione. Sia A la matrice associata alla conica $\mathcal{C}$. Per l'osservazione 1-(i) si ha che A è una matrice simmetrica e inoltre è a coefficienti in un campo algebricamente chiuso con $\mathrm{ch}(K) \neq 2$ per ipotesi. Dal teorema 2 della sezione 1.6 segue quindi che A è congruente a una matrice B del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\text{se } \mathrm{r}(A) = 3, \qquad \text{se } \mathrm{r}(A) = 2, \qquad \text{se } \mathrm{r}(A) = 1$$

Se A è congruente a B, allora $\exists\, M \in \mathrm{GL}_3(K) \mid B = {}^tMAM$. Sia dunque $T\colon \mathbb{P}^2(K) \to \mathbb{P}^2(K)$ la proiettività con matrice associata M^{-1}. Come si è visto nella dimostrazione dell'osservazione 2, applicando T a $\mathcal{C}$ si ottiene una conica proiettivamente equivalente, di equazione[22] ${}^tXBX = 0$. Esplicitamente, $\mathcal{C}$ è proiettivamente equivalente alla conica di equazione

(i) $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$ se $\mathrm{r}(A) = 3$,

(ii) $X_0^2 + X_1^2 = 0$ se $\mathrm{r}(A) = 2$,

(iii) $X_0^2 = 0$ se $\mathrm{r}(A) = 1$.

Inoltre, le coniche proiettive (i), (ii) e (iii) sono a due a due non proiettivamente equivalenti perché le matrici associate hanno ranghi diversi e il rango di una conica è invariante per proiettività. □

Esempio 2. Sia $\mathcal{C}$ una conica in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

(i) Se $\mathcal{C}$ è non degenere allora, per il teorema 1-(i), è proiettivamente equivalente alla conica proiettiva di equazione $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$. Facendo il cambio di coordinate

$$\begin{cases} X_0' = iX_0 \\ X_1' = X_1 \\ X_2' = X_2 \end{cases}$$

si ottiene una conica proiettivamente equivalente,[23] di equazione ${X_1'}^2 + {X_2'}^2 - {X_0'}^2 = 0$. Applicando a tale curva la mappa j_0^{-1} definita nella sezione 2.2, che in questo contesto assume la forma

$$\begin{aligned} j_0^{-1}\colon \quad \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus H_0 &\longrightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{C}) \\ [x_0, x_1, x_2] &\longmapsto \left(\tfrac{x_1}{x_0}, \tfrac{x_2}{x_0}\right) \end{aligned}$$

[22] Al fine di semplificare la notazione, le nuove coordinate sono indicate senza apice.

[23] La mappa associata al cambio di coordinate è una proiettività perché

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$$

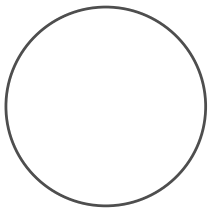
si ottiene la circonferenza unitaria di centro l'origine. Infatti, ponendo

$$X := \frac{X_1'}{X_0'}, \quad Y := \frac{X_2'}{X_0'}$$

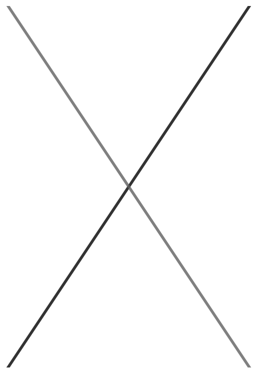
si riconosce la ben nota equazione $X^2 + Y^2 - 1 = 0$.

(ii) Se $\mathcal{C}$ è semplicemente degenere, allora è proiettivamente equivalente alla conica proiettiva di equazione $X_0^2 + X_1^2 = 0$ per il teorema 1-(ii). Tale equazione si può scrivere nella forma equivalente $(X_0 + iX_1)(X_0 - iX_1) = 0$. Dunque, se r_1 e r_2 sono le rette proiettive di equazioni $X_0 + iX_1 = 0$ e $X_0 - iX_1 = 0$ rispettivamente, si ha che $\mathrm{Supp}(\mathcal{C}) = r_1 \cup r_2$.

(iii) Se $\mathcal{C}$ è doppiamente degenere, allora è proiettivamente equivalente alla conica proiettiva di equazione $X_0^2 = 0$ per il teorema 1-(iii). Come fatto nel punto (ii), si può riscrivere l'equazione della conica nella forma $X_0 X_0 = 0$. Anche in questo caso particolare, se r_1 e r_2 sono le rette proiettive di equazioni $X_0 = 0$ e $X_0 = 0$, si ha che $\mathrm{Supp}(\mathcal{C}) = r_1 \cup r_2$, con la differenza che qui r_1 e r_2 sono rette coincidenti.



Conica non degenere



Conica semplicemente degenere

Conica doppiamente degenere

Teorema 2 (Classificazione delle coniche proiettive reali)**.** *Sia $\mathcal{C}$ una conica in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Allora $\mathcal{C}$ è proiettivamente equivalente a una delle seguenti coniche proiettive:*

(i) $X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 = 0$ (*conica generale, o non degenere, con supporto non vuoto*)

(ii) $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$ (*conica generale, o non degenere, con supporto vuoto*)

(iii) $X_0^2 - X_1^2 = 0$ (*conica semplicemente degenere con supporto due rette*[24])

(iv) $X_0^2 + X_1^2 = 0$ (*conica semplicemente degenere con supporto un punto*[25])

(v) $X_0^2 = 0$ (*conica doppiamente degenere*)

Inoltre, le coniche proiettive da (i) *a* (v) *sono a due a due non proiettivamente equivalenti.*

Dimostrazione. Sia A la matrice associata a $\mathcal{C}$. Con un ragionamento simile a quello fatto nella dimostrazione del teorema 1, dato che A è una matrice simmetrica a coefficienti reali, posso sfruttare l'asserto

[24]Notare che l'equazione $X_0^2 - X_1^2 = 0$ equivale a $(X_0 - X_1)(X_0 + X_1) = 0$, dunque il supporto di una conica proiettiva di questo tipo è dato dall'unione delle due rette di equazione $X_0 - X_1 = 0$ e $X_0 + X_1 = 0$.

[25]Notare che le soluzioni reali dell'equazione $X_0^2 + X_1^2 = 0$ sono tutte e sole della forma $(0, 0, t)$ al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$. Tali soluzioni corrispondono, nel piano proiettivo, al punto $[0, 0, 1]$.

del teorema di Sylvester per affermare che A è congruente a una matrice B della forma

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \qquad \text{se } \mathrm{r}(A)=3$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad \text{se } \mathrm{r}(A)=2$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad \text{se } \mathrm{r}(A)=1$$

Ragionando esattamente come nella dimostrazione del teorema 1 deduco che, se A e B sono congruenti, allora $\exists\, M \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \mid B = {}^tMAM$ e posso considerare la proiettività $T\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con matrice associata M^{-1}. Applicando T si ottiene una conica proiettivamente equivalente, di equazione ${}^tXBX = 0$. Calcolo esplicitamente l'equazione della conica ottenuta, distinguendo i vari casi.

(i) Se $\mathrm{r}(A) = 3$, mi accorgo immediatamente che la prima e la quarta matrice nell'elenco precedente danno luogo alla stessa equazione, cioè $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$. La conica la cui matrice associata è la seconda nell'elenco ha equazione $X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 = 0$, mentre quella che ha per matrice la terza nell'elenco ha equazione $X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 = 0$. Quest'ultima, tuttavia, è proiettivamente equivalente alla precedente. Infatti, applicando la proiettività

$$\begin{cases} X_0' = X_2 \\ X_1' = X_1 \\ X_2' = X_0 \end{cases}$$

l'equazione della conica diventa $-{X_0'}^2 - {X_1'}^2 + {X_2'}^2 = 0$ e cioè ${X_0'}^2 + {X_1'}^2 - {X_2'}^2 = 0$.

(ii) Se $\mathrm{r}(A) = 2$, ci si accorge subito che la prima e la terza matrice nell'elenco danno luogo alla stessa equazione, cioè $X_0^2 + X_1^2 = 0$. La conica la cui matrice associata è la seconda nell'elenco, invece, è la conica di equazione $X_0^2 - X_1^2 = 0$.

(iii) Se $\mathrm{r}(A) = 1$, le due matrici nell'elenco danno luogo alla stessa conica, di equazione $X_0^2 = 0$.

Mi sono dunque ridotto a una di queste cinque possibili equazioni:

(i) $X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 = 0$

(ii) $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$

(iii) $X_0^2 - X_1^2 = 0$

(iv) $X_0^2 + X_1^2 = 0$

(v) $X_0^2 = 0$

Le coniche proiettive da (i) a (v) sono a due a due non proiettivamente equivalenti perché hanno ranghi diversi oppure, se dello stesso rango, perché hanno supporti non proiettivamente equivalenti. Infatti, va ricordato che non solo il rango, ma anche il supporto di una conica in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è un'invariante proiettiva (esempio 2, sezione 3.2). □

Definizione 3. Sia $\mathcal{C}$ una conica in $\mathbb{A}^2(K)$ di equazione

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2a_{01}X + 2a_{02}Y + a_{00} = 0 \tag{19}$$

con $a_{ij} \in K$ e a_{11}, a_{12}, a_{22} non tutti nulli. Siano inoltre $a_{10} := a_{01}$, $a_{20} := a_{02}$, $a_{21} := a_{12}$. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

si dice la *matrice associata a* $\mathcal{C}$.

Valgono proprietà analoghe a quelle descritte nel caso proiettivo a eccezione del punto (iv) dell'osservazione 1 e dell'osservazione 2, risultati che verranno qui riformulati per il caso affine.

Osservazione 3. Siano $\mathcal{C}$ una conica in $\mathbb{A}^2(K)$, A la matrice associata a $\mathcal{C}$ e sia $\tilde{X} = {}^t(1\ X\ Y)$. Si verifica facilmente che l'equazione di $\mathcal{C}$ si può esprimere nella forma ${}^t\tilde{X}A\tilde{X} = 0$.

Osservazione 4. Sia $\mathcal{C}$ una conica in $\mathbb{A}^2(K)$ e sia A la matrice associata a $\mathcal{C}$. Allora $\mathrm{r}(A)$ è invariante per affinità. In particolare, $\mathrm{r}(A) = 1,\ 2,\ 3$ è una proprietà affine.

Dimostrazione. Sia $T\colon \mathbb{A}^2(K) \to \mathbb{A}^2(K)$ un'affinità. Per il teorema 1 della sezione 1.16, si ha che

$$T\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{20}$$

per una qualche matrice $M \in \mathrm{GL}_2(K)$, $M = \left(\begin{smallmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{smallmatrix}\right)$ e per certi $c_1, c_2 \in K$. Se definisco

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} := T\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad \tilde{X} := \begin{pmatrix} 1 \\ X \\ Y \end{pmatrix}, \quad \tilde{X}' := \begin{pmatrix} 1 \\ X' \\ Y' \end{pmatrix}, \quad \tilde{M} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & m_{11} & m_{12} \\ c_2 & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

allora si verifica immediatamente che $\tilde{X}' = \tilde{M}\tilde{X}$. Ora osservo che $\tilde{M} \in \mathrm{GL}_3(K)$ perché, sviluppando il determinante della matrice secondo la prima riga con il metodo di Laplace, si evince che $\det \tilde{M} = \det M$ e $\det M \neq 0$ essendo $M \in \mathrm{GL}_2(K)$. Di conseguenza, vale la relazione $\tilde{X} = \tilde{M}^{-1}\tilde{X}'$. Dall'osservazione 3 segue poi che ${}^t\tilde{X}A\tilde{X} = 0$ è l'equazione di $\mathcal{C}$, perché A è la matrice associata alla conica. Applicando T si ottiene quindi una conica affinemente equivalente a $\mathcal{C}$, di equazione

$${}^t(\tilde{M}^{-1}\tilde{X}')A(\tilde{M}^{-1}\tilde{X}') = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad {}^t\tilde{X}'({}^t\tilde{M}^{-1}A\tilde{M}^{-1})\tilde{X}' = 0$$

Come nel caso proiettivo, dunque, A si trasforma in una matrice congruente perché $\tilde{M}^{-1} \in \mathrm{GL}_3(K)$ banalmente e matrici congruenti hanno lo stesso rango. Posso quindi concludere, per arbitrarietà di T, che $\mathrm{r}(A)$ è invariante per affinità e da ciò segue che $\mathrm{r}(A) = 1,\ 2,\ 3$ è una proprietà affine. □

Vale quindi l'analogo della definizione 2 nel caso affine.

Definizione 4. Sia $\mathcal{C}$ una conica in $\mathbb{A}^2(K)$ e sia A la matrice associata a $\mathcal{C}$. Il rango di A si dice il *rango di* $\mathcal{C}$ e si denota $\mathrm{r}(\mathcal{C})$. Inoltre, la conica $\mathcal{C}$ si dice

(i) *non degenere* se $\mathrm{r}(\mathcal{C}) = 3$, *degenere* se $\mathrm{r}(\mathcal{C}) < 3$.

(ii) *semplicemente degenere* se $\mathrm{r}(\mathcal{C}) = 2$.

(iii) *doppiamente degenere* se $\mathrm{r}(\mathcal{C}) = 1$.

Per le stesse motivazioni date nel caso proiettivo, la definizione 4 è ben posta e l'essere una conica non degenere, semplicemente degenere o doppiamente degenere è una proprietà affine.

Definizione 5. Sia $\mathcal{C}$ una conica in $\mathbb{A}^2(K)$ e sia A la matrice associata a $\mathcal{C}$. La matrice

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

si dice la *matrice dei coefficienti dei termini di grado* 2 *di* $\mathcal{C}$.

Osservazione 5. Siano $\mathcal{C}$ una conica in $\mathbb{A}^2(K)$, A la matrice associata a $\mathcal{C}$ e sia A_0 la matrice dei coefficienti dei termini di grado 2 di $\mathcal{C}$. Dalle definizioni 3 e 5 segue che A_0 gode delle seguenti proprietà:

(i) A_0 è una sottomatrice simmetrica di A.

(ii) A_0 è una matrice non nulla. In particolare, $\mathrm{r}(A_0) \geq 1$.

(iii) A_0 è definita a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.

Osservazione 6. Sia $\mathcal{C}$ una conica in $\mathbb{A}^2(K)$ e sia A_0 la matrice dei coefficienti dei termini di grado 2 di $\mathcal{C}$. Allora $\mathrm{r}(A_0)$ è invariante per affinità. In particolare, $\mathrm{r}(A_0) = 1, 2$ è una proprietà affine.

Dimostrazione. Sia $T\colon \mathbb{A}^2(K) \to \mathbb{A}^2(K)$ un'affinità. Per il teorema 1 della sezione 1.16, vale la relazione (20) per una qualche matrice $M \in \mathrm{GL}_2(K)$ e per certi $c_1, c_2 \in K$. Osservo che T si può esprimere come composizione delle affinità $T', T''\colon \mathbb{A}^2(K) \to \mathbb{A}^2(K)$ definite dalle relazioni

$$T' \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \qquad T'' \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Siccome A_0 è anche la matrice associata alla forma quadratica $a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2$, si deduce che la prima affinità trasforma A_0 nella matrice congruente ${}^t M^{-1} A_0 M^{-1}$. Infatti, se pongo

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} := T' \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad \text{allora} \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$$

perché $M \in \mathrm{GL}_2(K)$. Di conseguenza, l'espressione della forma quadratica diventa

$$(X' \; Y') \; {}^t M^{-1} A_0 M^{-1} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$$

Matrici congruenti hanno lo stesso rango, perciò la prima affinità lascia invariato il rango di A_0. D'altra parte la seconda affinità, che è una traslazione, non modifica i termini di secondo grado dell'equazione della conica, pertanto la matrice ${}^t M^{-1} A_0 M^{-1}$ resta immutata. Posso dunque concludere, per arbitrarietà di T, che $\mathrm{r}(A_0)$ è invariante per affinità e da ciò segue che $\mathrm{r}(A_0) = 1, 2$ è una proprietà affine. □

Osservazione 7. Sia $\mathcal{C}$ una conica in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ e sia A_0 la matrice dei coefficienti dei termini di grado 2 di $\mathcal{C}$. Il segno di $\det A_0$ è invariante per affinità. In particolare, $\det A_0 > 0$ e $\det A_0 < 0$ sono proprietà affini.

Dimostrazione. Sia $T\colon \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ un'affinità. Come si è visto nella dimostrazione dell'osservazione 6, se si assume la relazione (20) per una qualche matrice $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ e per certi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, allora la matrice A_0 viene trasformata da T nella matrice congruente ${}^t M^{-1} A_0 M^{-1}$. Basta quindi osservare che

$$\det \left({}^t M^{-1} A_0 M^{-1}\right) = \det {}^t M^{-1} \det A_0 \det M^{-1} = (\det M^{-1})^2 \det A_0$$

Poiché $(\det M^{-1})^2 > 0$, il determinante della matrice ${}^t M^{-1} A_0 M^{-1}$ ha lo stesso segno del determinante di A_0. Posso dunque concludere, per arbitrarietà di T, che il segno del determinante di A_0 è invariante per affinità e da ciò segue che $\det A_0 > 0$ e $\det A_0 < 0$ sono proprietà affini. □

Definizione 6. Sia $\mathcal{C}$ una conica in $\mathbb{A}^2(K)$ e sia A_0 la matrice dei coefficienti dei termini di grado 2 di $\mathcal{C}$. La conica $\mathcal{C}$ si dice *a centro* se $\mathrm{r}(A_0) = 2$, *non a centro* (o una *parabola*) se $\mathrm{r}(A_0) = 1$. Inoltre, se $K = \mathbb{R}$, allora la conica $\mathcal{C}$ si dice un'*ellisse a centro* se $\det A_0 > 0$, un'*iperbole a centro* se $\det A_0 < 0$.

Teorema 3 (Classificazione delle coniche affini)**.** *Sia $\mathcal{C}$ una conica in $\mathbb{A}^2(K)$. Allora $\mathcal{C}$ è affinemente equivalente a una delle seguenti coniche affini:*

(a) *K algebricamente chiuso con $\mathrm{ch}(K) \neq 2$:*

- (i) $X^2 + Y^2 - 1 = 0$ (*conica a centro generale, o non degenere*)
- (ii) $X^2 + Y^2 = 0$ (*conica a centro degenere*[26])
- (iii) $Y^2 - X = 0$ (*parabola generale, o non degenere*)
- (iv) $Y^2 - 1 = 0$ (*parabola degenere*)
- (v) $Y^2 = 0$ (*conica doppiamente degenere*)

(b) *$K = \mathbb{R}$:*

[26] Più precisamente, la conica è semplicemente degenere. Infatti, se A è la matrice associata a $\mathcal{C}$ e A_0 è la matrice dei coefficienti dei termini di grado 2 di $\mathcal{C}$, allora $\mathrm{r}(A) < 3$ perché la conica è degenere e $\mathrm{r}(A_0) = 2$ perché la conica è a centro, dunque $\mathrm{r}(A) = 2$ essendo A_0 una sottomatrice di A.

(i)	$X^2 + Y^2 - 1 = 0$	(*ellisse generale, o non degenere*)
(ii)	$X^2 + Y^2 + 1 = 0$	(*ellisse generale, o non degenere, a punti non reali*)
(iii)	$X^2 + Y^2 = 0$	(*ellisse degenere*)
(iv)	$X^2 - Y^2 - 1 = 0$	(*iperbole generale, o non degenere*)
(v)	$X^2 - Y^2 = 0$	(*iperbole degenere*)
(vi)	$Y^2 - X = 0$	(*parabola generale, o non degenere*)
(vii)	$Y^2 - 1 = 0$	(*parabola degenere*)
(viii)	$Y^2 + 1 = 0$	(*parabola degenere a punti non reali*)
(ix)	$Y^2 = 0$	(*conica doppiamente degenere*)

Inoltre, le coniche affini di ciascuno dei gruppi precedenti sono a due a due non affinemente equivalenti.

Dimostrazione. Parte della dimostrazione sarà data nei due casi simultaneamente. Suppongo che la conica $\mathcal{C}$ abbia equazione (19) e procedo per passi.

Passo I: *eliminazione del termine* $2a_{12}XY$. Sia A_0 la matrice dei coefficienti dei termini di grado 2 di $\mathcal{C}$. Poiché A_0 è una matrice simmetrica a coefficienti in un campo K con $\mathrm{ch}(K) \neq 2$ è possibile trovare, in virtù del teorema 1 della sezione 1.6, una matrice $M \in \mathrm{GL}_2(K)$ tale che ${}^tMA_0M$ sia diagonale. Quindi, se $T\colon \mathbb{A}^2(K) \to \mathbb{A}^2(K)$ è l'affinità definita dalla relazione

$$T\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

allora, applicando T a $\mathcal{C}$, si ottiene una conica affinemente equivalente la cui matrice dei coefficienti dei termini di grado 2 è diagonale. Posso dunque assumere $a_{12} = 0$ e l'equazione di $\mathcal{C}$ diventa

$$a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + 2a_{01}X + 2a_{02}Y + a_{00} = 0 \tag{21}$$

Inoltre, osservo che $\mathcal{C}$ è una conica a centro se e solo se $a_{11}a_{22} \neq 0$.

Passo II: *gestione della parte lineare.* Se $\mathcal{C}$ è una conica a centro allora, mediante la traslazione[27]

$$\begin{cases} X = X' - \frac{a_{01}}{a_{11}} \\ Y = Y' - \frac{a_{02}}{a_{22}} \end{cases}$$

l'equazione (21) si trasforma nella seguente:

$$a_{11}{X'}^2 + a_{22}{Y'}^2 + c_{00} = 0\,, \qquad \text{dove} \qquad c_{00} := a_{00} - \frac{a_{01}^2}{a_{11}} - \frac{a_{02}^2}{a_{22}} \tag{22}$$

Se $\mathcal{C}$ è una conica non a centro, invece, posso assumere, eventualmente scambiando le variabili X e Y,[28] che $a_{11} = 0$ e che $a_{22} \neq 0$. In tal caso, la traslazione

$$\begin{cases} X = X' \\ Y = Y' - \frac{a_{02}}{a_{22}} \end{cases}$$

trasforma l'equazione (21) nella seguente:

$$a_{22}{Y'}^2 + 2a_{01}X' + d_{00} = 0\,, \qquad \text{dove} \qquad d_{00} := a_{00} - \frac{a_{02}^2}{a_{22}}$$

Inoltre, se $a_{01} = 0$ ottengo l'equazione

$$a_{22}{Y'}^2 + d_{00} = 0 \tag{23}$$

[27] Ogni traslazione è un'affinità (esempio 2, sezione 1.16).

[28] Scambiare le variabili significa applicare la seguente affinità:

$$\begin{cases} X = Y' \\ Y = X' \end{cases}$$

mentre se $a_{01} \neq 0$ posso eseguire l'ulteriore traslazione

$$\begin{cases} X' = X'' - \frac{d_{00}}{2a_{01}} \\ Y' = Y'' \end{cases}$$

ottenendo la nuova equazione

$$a_{22}Y''^2 + 2a_{01}X'' = 0 \tag{24}$$

Le coniche affini di equazioni (22), (23) e (24) sono a due a due non affinemente equivalenti perché hanno ranghi diversi oppure, se dello stesso rango, perché le rispettive matrici dei coefficienti dei termini di grado massimo hanno ranghi diversi.

Passo III: *normalizzazione dei coefficienti.* Qui distinguo il caso K algebricamente chiuso da quello in cui $K = \mathbb{R}$. Nel primo caso, se $\mathcal{C}$ è una conica a centro e quindi è stata trasformata nella conica di equazione (22), posso assumere $c_{00} = 0$ oppure $c_{00} = -1$. Infatti, se $c_{00} \neq 0$, posso moltiplicare primo e secondo membro dell'equazione (22) per $-\frac{1}{c_{00}}$. Ora, ricordando che $a_{11}a_{22} \neq 0$ perché $\mathcal{C}$ è una conica a centro, posso applicare l'affinità

$$\begin{cases} X' = \frac{X}{\sqrt{a_{11}}} \\ Y' = \frac{Y}{\sqrt{a_{22}}} \end{cases}$$

per ottenere le equazioni

(i) $X^2 + Y^2 - 1 = 0$ se $c_{00} = -1$

(ii) $X^2 + Y^2 = 0$ se $c_{00} = 0$

Le coniche affini (i) e (ii) non sono affinemente equivalenti perché hanno ranghi diversi: la prima è una conica a centro non degenere, la seconda è semplicemente degenere. Se $\mathcal{C}$ è una conica non a centro ed è stata trasformata nella conica di equazione (23), come prima posso assumere $d_{00} = 0$ oppure $d_{00} = -1$. Mediante l'affinità

$$\begin{cases} X' = X \\ Y' = \frac{Y}{\sqrt{a_{22}}} \end{cases}$$

ci si riconduce alle equazioni

(iv) $Y^2 - 1 = 0$ se $d_{00} = -1$

(v) $Y^2 = 0$ se $d_{00} = 0$

Anche le coniche (iv) e (v) non sono affinemente equivalenti per motivi di rango. La prima, infatti, è semplicemente degenere, mentre la seconda è doppiamente degenere. Se infine $\mathcal{C}$ è stata trasformata nella conica di equazione (24), allora l'affinità

$$\begin{cases} X'' = -\frac{X}{2a_{01}} \\ Y'' = \frac{Y}{\sqrt{a_{22}}} \end{cases}$$

trasforma $\mathcal{C}$ nella conica di equazione

(iii) $Y^2 - X = 0$

In virtù delle osservazioni fatte in precedenza, le coniche affini da (i) a (v) sono a due a due non affinemente equivalenti. Nel caso $K = \mathbb{R}$, se $\mathcal{C}$ è una conica a centro e quindi è stata trasformata nella conica di equazione (22), posso supporre che $c_{00} = 0$ oppure che $c_{00} = -1$ e applicare l'affinità

$$\begin{cases} X' = \frac{X}{\sqrt{|a_{11}|}} \\ Y' = \frac{Y}{\sqrt{|a_{22}|}} \end{cases}$$

con la quale ci si riconduce alle equazioni[29]

[29]Notare che, nel caso $a_{11} < 0$, $a_{22} > 0$ e $c_{00} = -1$, l'equazione $-X^2+Y^2-1 = 0$ è solo apparentemente non riconducibile a una delle cinque equazioni della lista. Infatti, basta scambiare le variabili per ottenere l'equazione (iv).

(i) $X^2 + Y^2 - 1 = 0$ se $a_{11}, a_{22} > 0$ e $c_{00} = -1$

(ii) $X^2 + Y^2 + 1 = 0$ se $a_{11}, a_{22} < 0$ e $c_{00} = -1$

(iii) $X^2 + Y^2 = 0$ se $a_{11}a_{22} > 0$ e $c_{00} = 0$

(iv) $X^2 - Y^2 - 1 = 0$ se $a_{11}a_{22} < 0$ e $c_{00} = -1$

(v) $X^2 - Y^2 = 0$ se $a_{11}a_{22} < 0$ e $c_{00} = 0$

Le coniche (iii) e (v) non sono affinemente equivalenti a nessuna delle altre, perché queste sono coniche degeneri, mentre le altre sono non degeneri. Le coniche (iii) e (v) non sono nemmeno tra loro affinemente equivalenti, in quanto la prima è a supporto un punto, mentre la seconda è a supporto due rette. Inoltre, la conica (iv) non è affinemente equivalente alle coniche (i) e (ii) perché è un'iperbole e non un'ellisse. Infine, le coniche (i) e (ii) non sono affinemente equivalenti perché la prima è a supporto non vuoto, mentre la seconda è a supporto vuoto. Posso quindi affermare che le coniche da (i) a (v) sono a due a due non affinemente equivalenti. Ora se $\mathcal{C}$ è una conica non a centro ed è stata trasformata nella conica di equazione (23) posso supporre, come prima, che $d_{00} = 0$ oppure che $d_{00} = -1$ e applicare l'affinità

$$\begin{cases} X' = X \\ Y' = \frac{Y}{\sqrt{|a_{22}|}} \end{cases}$$

per ottenere le equazioni

(vii) $Y^2 - 1 = 0$ se $a_{22} > 0$ e $d_{00} = -1$

(viii) $Y^2 + 1 = 0$ se $a_{22} < 0$ e $d_{00} = -1$

(ix) $Y^2 = 0$ se $d_{00} = 0$

Mi accorgo subito che la conica (ix) non è affinemente equivalente alle altre due, perché si tratta di una conica doppiamente degenere, mentre le coniche (vii) e (viii) sono semplicemente degeneri. D'altra parte, nemmeno queste ultime sono tra loro affinemente equivalenti per ovvi motivi di incompatibilità tra i supporti. Infine, se $\mathcal{C}$ è stata trasformata nella conica di equazione (24), posso supporre senza perdita di generalità che $a_{22} > 0$. In questo caso, l'affinità

$$\begin{cases} X'' = -\frac{X}{2a_{01}} \\ Y'' = \frac{Y}{\sqrt{a_{22}}} \end{cases}$$

trasforma $\mathcal{C}$ nella conica di equazione

(vi) $Y^2 - X = 0$

In virtù delle osservazioni fatte in precedenza, posso concludere che le coniche affini da (i) a (ix) sono a due a due non affinemente equivalenti. □

Teorema 4 (Classificazione delle coniche euclidee)**.** *Sia $\mathcal{C}$ una conica in $\mathbb{E}^2$. Allora $\mathcal{C}$ è congruente a una delle seguenti coniche euclidee:*

(i) $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0$ (*ellisse generale, o non degenere*)

(ii) $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = -1, \quad a \geq b > 0$ (*ellisse generale, o non degenere, a punti non reali*)

(iii) $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 0, \quad a \geq b > 0$ (*ellisse degenere*)

(iv) $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0$ (*iperbole generale, o non degenere*)

(v) $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 0, \quad a \geq b > 0$ (*iperbole degenere*)

(vi) $Y^2 - 2pX = 0, \quad p > 0 \quad$ (*parabola generale, o non degenere*)

(vii) $Y^2 - a^2 = 0, \quad a > 0 \quad$ (*parabola degenere*)

(viii) $Y^2 + a^2 = 0, \quad a > 0 \quad$ (*parabola degenere a punti non reali*)

(ix) $Y^2 = 0 \quad$ (*conica doppiamente degenere*)

Inoltre, le coniche euclidee da (i) *a* (ix)*, anche per valori distinti delle coppie ordinate* (a, b)*, dei parametri* p *o* a*, sono a due a due non congruenti.*

Dimostrazione. Suppongo che la conica $\mathcal{C}$ abbia equazione (19). Come nella dimostrazione del teorema 3, si procede per passi. Tuttavia, si avranno a disposizione solo cambiamenti di coordinate dati da isometrie, cioè da affinità con matrici associate ortogonali.

Passo I: *eliminazione del termine* $2a_{12}XY$. Sia A_0 la matrice dei coefficienti dei termini di grado 2 di $\mathcal{C}$. Dato che A_0 è una matrice simmetrica a coefficienti reali è possibile trovare, in virtù di un corollario del teorema spettrale (sezione 1.19, corollario 1), una matrice $M \in \mathrm{O}(2)$ tale che ${}^tMA_0M$ sia diagonale. Quindi, se $T\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ è l'isometria definita dalla relazione

$$T\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

allora, applicando T a $\mathcal{C}$, si ottiene una conica congruente la cui matrice dei coefficienti dei termini di grado 2 è diagonale. Posso dunque assumere $a_{12} = 0$ e l'equazione di $\mathcal{C}$ diventa

$$a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + 2a_{01}X + 2a_{02}Y + a_{00} = 0$$

Passo II: *gestione della parte lineare.* Ripetendo parola per parola quanto detto nella dimostrazione del teorema 3, posso ridurmi a un'equazione della forma

$$a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + c_{00} = 0 \qquad \text{se } a_{11}a_{22} \neq 0 \tag{25}$$
$$a_{22}Y^2 + d_{00} = 0 \qquad \text{se } a_{22} \neq 0 \tag{26}$$
$$a_{22}Y^2 + 2a_{01}X = 0 \qquad \text{se } a_{01}a_{22} \neq 0 \tag{27}$$

Infatti, ogni cambio di coordinate effettuato è una traslazione e ogni traslazione è un'isometria, perché la matrice associata a una qualsiasi traslazione è la matrice identità. Inoltre, per le stesse motivazioni date nella dimostrazione del teorema 3, le coniche di equazioni (25), (26) e (27) non possono che essere a due a due non congruenti. Il terzo passo della dimostrazione del teorema 3, che consiste nella normalizzazione dei coefficienti, non ha significato nel caso euclideo, perché le trasformazioni utilizzate non sono isometrie. Dunque, se $\mathcal{C}$ è una conica a centro e quindi è stata trasformata nella conica di equazione (25), posso supporre senza perdita di generalità che $c_{00} = 0$ oppure che $c_{00} = -1$. In entrambi i casi, posso definire

$$a := \frac{1}{\sqrt{|a_{11}|}}, \qquad b := \frac{1}{\sqrt{|a_{22}|}}$$

e, così facendo, mi riduco a cinque possibili equazioni:

(i) $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1 \qquad$ se $a_{11}, a_{22} > 0$ e $c_{00} = -1$

(ii) $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = -1 \qquad$ se $a_{11}, a_{22} < 0$ e $c_{00} = -1$

(iii) $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 0 \qquad$ se $a_{11}a_{22} > 0$ e $c_{00} = 0$

(iv) $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1 \qquad$ se $a_{11}a_{22} < 0$ e $c_{00} = -1$

(v) $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 0 \qquad$ se $a_{11}a_{22} < 0$ e $c_{00} = 0$

Nei casi (i), (ii), (iii) e (v) posso sempre assumere, salvo scambiare fra loro le variabili, che $a \geq b$. Inoltre, per ragioni analoghe a quelle descritte nella dimostrazione del teorema 3, le coniche euclidee da (i) a (v) sono a due a due non congruenti. Ora se $\mathcal{C}$ è una conica non a centro ed è stata trasformata nella conica di equazione (26), posso assumere $d_{00} = 0$ oppure $d_{00} = -1$. Definisco

$$a := \frac{1}{\sqrt{|a_{22}|}}$$

e riconduco l'equazione di $\mathcal{C}$ a una delle seguenti:

(vii) $Y^2 - a^2 = 0$ se $a_{22} > 0$ e $d_{00} = -1$

(viii) $Y^2 + a^2 = 0$ se $a_{22} < 0$ e $d_{00} = -1$

(ix) $Y^2 = 0$ se $d_{00} = 0$

Anche in questo caso, le coniche (vii), (viii) e (ix) sono a due a due non congruenti per quanto già spiegato nella dimostrazione del teorema 3. Infine, se $\mathcal{C}$ è stata trasformata nella conica di equazione (27), allora posso supporre senza perdita di generalità che $a_{22} > 0$. Se definisco

$$p := -\frac{a_{01}}{a_{22}}$$

ottengo quindi l'equazione

(vi) $Y^2 - 2pX = 0$

Inoltre si può sempre assumere, applicando eventualmente l'isometria

$$\begin{cases} X = -X' \\ Y = Y' \end{cases}$$

che $a_{01} < 0$ e quindi che $p > 0$. In virtù delle osservazioni fatte in precedenza, le coniche euclidee da (i) a (ix) sono a due a due non congruenti. Resta da dimostrare che coniche euclidee della stessa tipologia, per valori distinti delle coppie ordinate (a, b), dei parametri p o a, sono a due a due non congruenti. Qui si procede per contrapposizione logica. Siano dunque

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1\,, \qquad \frac{X^2}{c^2} + \frac{Y^2}{d^2} = 1$$

due ellissi non degeneri $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, per certi $a \geq b > 0$, $c \geq d > 0$. Siano inoltre

$$A_0 := \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix}, \qquad B_0 := \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d^2} \end{pmatrix}$$

le matrici dei coefficienti dei termini di grado 2 di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ rispettivamente. Perché $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ siano congruenti, deve esistere un'isometria $T\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ tale che $T(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$. Per il teorema 1 della sezione 1.16, l'isometria T soddisfa la relazione (20) per una qualche matrice $M \in \mathrm{O}(2)$ e per certi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Di conseguenza, vale che $B_0 = {}^tM^{-1} A_0 M^{-1}$ per quanto visto nella dimostrazione dell'osservazione 6 ma, essendo $M \in \mathrm{O}(2)$, si ha anche che $B_0 = M A_0 M^{-1}$, il che significa che le matrici A_0 e B_0 sono simili e quindi devono avere, in particolare, gli stessi autovalori. Dal momento che A_0 e B_0 sono diagonali e ricordando che le coppie (a, b) e (c, d) sono ordinate, l'unica possibilità affinché A_0 e B_0 possiedano gli stessi autovalori è che valga $A_0 = B_0$, cioè $a = c$ e $b = d$. Lo stesso ragionamento si applica ai casi da (ii) a (v). Siano invece

$$Y^2 - 2pX = 0\,, \qquad Y^2 - 2qX = 0$$

due parabole non degeneri $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, per certi $p, q > 0$. Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono congruenti, allora esiste un'isometria $T\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ tale che $T(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$. Come prima, dal teorema 1 della sezione 1.16 segue che T soddisfa la relazione (20) per una qualche matrice $M \in \mathrm{O}(2)$, $M = \left(\begin{smallmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{smallmatrix}\right)$ e per certi $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Attribuendo le variabili con apici alla conica $\mathcal{C}$ e applicando T a $\mathcal{C}$, cioè facendo il cambio di coordinate

$$\begin{cases} X = m_{11}X' + m_{12}Y' + c_1 \\ Y = m_{21}X' + m_{22}Y' + c_2 \end{cases} \tag{28}$$

si dovrà ottenere l'equazione di $\mathcal{D}$. Imponendo queste condizioni, si deduce che

$$M = \begin{pmatrix} \frac{q}{p} & \pm\frac{c_2}{p} \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Osservo che il determinante di M deve necessariamente valere 1 oppure -1 perché $M \in \mathrm{O}(2)$ e, ricordando che $p, q > 0$ per ipotesi, si ricava quindi che $p = q$. Siano infine

$$Y^2 - a^2 , \qquad Y^2 - b^2$$

due parabole degeneri $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, per certi $a, b > 0$. Ripercorrendo un ragionamento analogo a quello seguito nel caso precedente, se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono congruenti allora, applicando un'opportuna isometria $T\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ alla conica $\mathcal{C}$, isometria riconducibile, come si è visto, al cambio di coordinate (28), si deve ottenere l'equazione di $\mathcal{D}$. Imponendo queste condizioni, si ottiene che $a^2 = b^2$ e, ricordando che $a, b > 0$, si può affermare che $a = b$. Naturalmente, lo stesso ragionamento si applica al caso (viii), mentre il caso (ix) non va discusso perché l'equazione della conica doppiamente degenere non dipende da nessun parametro. Concludo che le coniche euclidee da (i) a (ix), anche per valori distinti delle coppie ordinate (a, b), dei parametri p o a, sono a due a due non congruenti. □

3.5 Coordinate plückeriane e centri di simmetria

Definizione 1. Siano $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{P}^3$, $\mathrm{P} \neq \mathrm{Q}$, $\mathrm{P} = \mathrm{P}[x_0, x_1, x_2, x_3]$, $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}[y_0, y_1, y_2, y_3]$ e sia

$$p_{ij} := \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix}$$

per ogni $0 \leq i < j \leq 3$. Le coordinate omogenee del punto $[p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23}] \in \mathbb{P}^5$ si dicono le *coordinate plückeriane della retta* $L(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$.

La definizione 1 è ben posta, perché non dipende né dalla scelta dei punti P e Q né dalla scelta delle loro coordinate omogenee. Infatti, se le coordinate omogenee di P o di Q vengono moltiplicate per un fattore di proporzionalità $\alpha \in K^*$, allora le coordinate plückeriane della retta $L(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ vengono anch'esse moltiplicate per lo stesso fattore e quindi il punto di $\mathbb{P}^5$ che esse definiscono non cambia. Se poi il punto P viene sostituito da un altro punto $\mathrm{P}' \in L(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$, $\mathrm{P}' \neq \mathrm{Q}$, $\mathrm{P}' = \mathrm{P}'[x_0', x_1', x_2', x_3']$, allora esistono $\lambda, \mu \in K^*$ tali che $x_i' = \lambda x_i + \mu y_i$ per ogni $0 \leq i \leq 3$. Di conseguenza, le nuove coordinate plückeriane sono date da

$$p_{ij}' = \begin{vmatrix} x_i' & x_j' \\ y_i & y_j \end{vmatrix} = x_i' y_j - x_j' y_i = (\lambda x_i + \mu y_i) y_j - (\lambda x_j + \mu y_j) y_i = \lambda (x_i y_j - x_j y_i) = \lambda p_{ij}$$

Similmente si procede se Q è sostituito da un altro punto $\mathrm{Q}' \in L(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$, $\mathrm{Q}' \neq \mathrm{P}$.

Osservazione 1. Siano $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{P}^3$, $\mathrm{P} \neq \mathrm{Q}$, $\mathrm{P} = \mathrm{P}[x_0, x_1, x_2, x_3]$, $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}[y_0, y_1, y_2, y_3]$ e siano $p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23}$ le coordinate plückeriane della retta $L(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$. Allora vale l'identità $p_{01}p_{23} + p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0$.

Dimostrazione. Basta osservare che il primo membro è il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

sviluppato secondo la prima riga con il metodo di Laplace. Ovviamente, il determinante è nullo perché tale matrice ha due righe uguali. □

Definizione 2. La *quadrica di Klein* è la quadrica di $\mathbb{P}^5$ di equazione

$$X_{01}X_{23} - X_{02}X_{13} + X_{03}X_{12} = 0 , \quad \text{dove} \quad X_{ij} = \begin{vmatrix} X_i & X_j \\ Y_i & Y_j \end{vmatrix} \quad \text{per ogni} \quad 0 \leq i < j \leq 3$$

Osservazione 2. Dall'osservazione 1 segue che ogni punto di $\mathbb{P}^5$ le cui coordinate omogenee sono le coordinate plückeriane di una retta in $\mathbb{P}^3$ appartiene alla quadrica di Klein. Si dimostra che vale anche il viceversa, cioè che ogni punto appartenente alla quadrica di Klein proviene da una e una sola retta di $\mathbb{P}^3$. Più precisamente, se $x_0 \neq 0$, il punto $[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \in \mathbb{P}^5$ corrisponde alla retta passante per i punti $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{P}^3$, $\mathrm{P} = \mathrm{P}[0, x_0, x_1, x_2]$, $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}[-x_0, 0, x_3, x_4]$.

Osservazione 3. Siano $r, r' \in \mathbb{P}^3$ due rette non parallele aventi coordinate plückeriane l, m, n, L, M, N e l', m', n', L', M', N' rispettivamente. Si dimostra che

$$\mathrm{d}(r, r') = \frac{|lL' + Ll' - (mM' + Mm') + nN' + Nn'|}{\sqrt{\begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l & n \\ l' & n' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix}^2}}$$

Definizione 3. Sia A uno spazio affine e sia $\mathrm{C} \in A$. La *simmetria di A di centro* C è l'applicazione

$$\begin{array}{rccl} \sigma_{\mathrm{C}}\colon & A & \longrightarrow & A \\ & \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{Q} \mid \overrightarrow{\mathrm{CP}} = \overrightarrow{\mathrm{QC}} \end{array}$$

La definizione 3 è ben posta perché l'applicazione σ_{C} è ben definita. Infatti, se A è uno spazio affine su V, dal primo assioma degli spazi affini segue che, una volta fissati il vettore $\overrightarrow{\mathrm{CP}} \in V$ e il punto $\mathrm{C} \in A$, esiste un unico punto $\mathrm{Q} \in A$ tale che $\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \overrightarrow{\mathrm{QC}}$.

Osservazione 4. Sia A uno spazio affine su V e sia $\mathrm{C} \in A$. Si dimostra facilmente che la simmetria di A di centro C è un'affinità di A con isomorfismo associato $-\mathrm{id}_V$.

Osservazione 5. Siano A uno spazio affine, $\{\mathrm{O}, e_1, \dots, e_n\}$ un sistema di riferimento affine su A e sia $\mathrm{C} \in A$, $\mathrm{C} = \mathrm{C}(c_1, \dots, c_n)$. Si verifica facilmente che, per ogni $\mathrm{P} \in A$, $\mathrm{P} = \mathrm{P}(x_1, \dots, x_n)$, vale la relazione

$$\sigma_{\mathrm{C}}(\mathrm{P}) = \sigma_{\mathrm{C}}(\mathrm{P})(2c_1 - x_1, \dots, 2c_n - x_n)$$

Definizione 4. Sia $\mathrm{C} \in \mathbb{A}^2(K)$. Una curva algebrica $\mathcal{C}$ in $\mathbb{A}^2(K)$ si dice *simmetrica rispetto a* C e, in tal caso, C si dice il *centro di simmetria di* $\mathcal{C}$, se $\sigma_{\mathrm{C}}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

Osservazione 6. Sia $\mathrm{C} \in \mathbb{A}^2(K)$, $\mathrm{C} = \mathrm{C}(x_0, y_0)$. Si dimostra che una curva algebrica $\mathcal{C}$ in $\mathbb{A}^2(K)$ di equazione $f(X, Y) = 0$ è simmetrica rispetto a C se e solo se $f(2x_0 - X, 2y_0 - Y) = 0$ è un'equazione di $\mathcal{C}$.

Definizione 5. Sia $r \subseteq \mathbb{E}^2$ una retta. Una curva algebrica $\mathcal{C}$ in $\mathbb{E}^2$ si dice *simmetrica rispetto a* r e, in tal caso, r si dice l'*asse di simmetria di* $\mathcal{C}$, se $\rho_r(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.[30]

Osservazione 7. Sia $r \subseteq \mathbb{E}^2$ una retta e sia $aX + bY + c = 0$ un'equazione di r tale che $a^2 + b^2 = 1$. Sia inoltre $\mathcal{C}$ una curva algebrica in $\mathbb{E}^2$ di equazione $f(X, Y) = 0$. Allora $\mathcal{C}$ è simmetrica rispetto a r se e solo se $f\big((1 - 2a^2)X - 2abY - 2ac, -2abX + (1 - 2b^2)Y - 2bc\big) = 0$. In particolare, se r è la retta di equazione $X = 0$ [risp. $Y = 0$], allora $\mathcal{C}$ è simmetrica rispetto a r se e solo se $f(-X, Y) = 0$ [risp. $f(X, -Y) = 0$].

[30] L'applicazione ρ_r è la riflessione definita da r (sezione 1.17, definizione 9).