AC310
ANALISI COMPLESSA

RAFFAELE DI DONNA

NOTE INTEGRATIVE AL CORSO

Indice

Le note faranno riferimento, oltre che agli appunti del corso, al testo *Complex Analysis* di Serge Lang.

2 Serie di potenze

2.1 Serie di potenze formali

1. Ricordiamo infatti che un ideale massimale[1] di $\mathbb{C}[\![T]\!]$ è un ideale proprio, motivo per cui non potrà contenere elementi invertibili di $\mathbb{C}[\![T]\!]$. In altre parole, le serie di potenze formali che appartengono a un ideale massimale di $\mathbb{C}[\![T]\!]$ devono necessariamente essere del tipo:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n T^n$$

A meno di dimostrare[2] che $\mathbb{C}[\![T]\!]$ è un dominio a ideali principali, possiamo concludere che $\mathbb{C}[\![T]\!]$ è un dominio locale con ideale massimale (T) e questo significa che (T) è l'unico ideale massimale di $\mathbb{C}[\![T]\!]$.

2. Naturalmente $\mathbb{C}[\![T]\!]$ è un dominio integrale come conseguenza del fatto che lo è $\mathbb{C}$ e dunque è ben definito il campo delle serie di Laurent formali $\mathbb{C}(\!(T)\!)$.

3. Un elemento del campo dei quozienti $\mathbb{C}(\!(T)\!)$ è individuato da una coppia ordinata (f, g) di serie di potenze formali tali che g sia non nulla, cioè abbia ordine finito k e quindi possiamo assumere che:

$$g = \sum_{n=k}^{\infty} b_n T^n = T^k \Big(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{b_n}{b_k} T^{n-k} \Big) = T^k \Big(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_{m+k}}{b_k} T^m \Big)$$

Poiché la serie tra parentesi ha ordine 0 per costruzione, essa è invertibile rispetto al prodotto, per cui possiamo sempre assumere, senza perdita di generalità, che $g = T^k$ per un opportuno $k \in \mathbb{N}$.

4. Innanzitutto, date due serie di potenze formali $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$, $g = \sum_{n=1}^{\infty} b_n T^n$ con $\operatorname{ord}(g) \geq 1$, il termine di ordine n della serie di potenze composta $f \circ g$ è $c_0 = a_0$ se $n = 0$, mentre per $n \geq 1$ si può esprimere con la formula:

$$c_n = \sum_{\substack{j,k \in \mathbb{N} \\ jk = n}} a_j \sum_{\substack{(h_1, \dots, h_j) \in \mathbb{N}^j \\ h_1 + \dots + h_j = k}} \prod_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ l = 1, \dots, j}} b_{h_l} \tag{1}$$

Osserviamo ora che una serie di potenze $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n T^n$ ammette un inverso per la composizione se esiste una serie di potenze $g = \sum_{n=1}^{\infty} b_n T^n$ tale che $(f \circ g)(T) = (g \circ f)(T) = T$. In particolare:

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g^n$$

In tal caso, dato che $\operatorname{ord}(g^m) \geq m$ per ogni $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 1$, il termine di ordine 1 di $f \circ g$ deve essere $a_1 b_1 = 1$. Ne deduciamo in particolare che $a_1 \neq 0$ perché $\mathbb{C}$ è un dominio integrale e quindi $\operatorname{ord}(f) = 1$. Viceversa, se assumiamo $\operatorname{ord}(f) = 1$, cioè se $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$, allora definiamo $b_0 := 0$, $b_1 := a_1^{-1}$ e infine, per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, definiamo b_n invertendo la formula (1) dove $c_n := 0$. Allora $g := \sum_{n=0}^{\infty} b_n T^n$ è per costruzione l'inverso di f rispetto alla composizione.

5. Detto in altre parole, l'applicazione D che definisce la derivata di una serie di potenze formale è un endomorfismo dello spazio vettoriale complesso $\mathbb{C}[\![T]\!]$.

6. Qui $D^{(n)}(f)$ denota la serie di potenze formale ottenuta applicando n volte l'operatore di derivata alla serie di potenze f. Si vede facilmente, per induzione su k, che vale per ogni $k \in \mathbb{N}$ la formula:

$$D^{(k)}(f)(T) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n T^{n-k}$$

[1] Si vedano le dispense del corso AL210. Faremo riferimento all'osservazione 7.3, alle definizioni 7.5 e 9.7.

[2] Una dimostrazione è reperibile all'indirizzo web https://planetmath.org/formalpowerseriesoverfield.

Infatti, la base di induzione, corrispondente al caso $k = 0$, è banale. Nel passo induttivo, invece, si assume $k \geq 1$, si suppone che la formula sia valida per un generico $k-1$ e la si dimostra per k, procedendo nella maniera seguente:

$$\begin{aligned} D^{(k)}(f)(T) &= D(D^{(k-1)}(f))(T) = D\Big(\sum_{n=k-1}^{\infty} \frac{n!}{(n-k+1)!} a_n T^{n-k+1}\Big) \\ &= D\Big(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+k-1)!}{m!} a_{m+k-1} T^m\Big) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(m+k-1)!}{(m-1)!} a_{m+k-1} T^{m-1} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n T^{n-k} \end{aligned}$$

Ci siamo serviti del cambio di variabile $m := n-k+1$. Se denotiamo $D^{(k)}(f)(0)$ il termine noto, cioè il coefficiente del termine di grado nullo, della serie di potenze formale $D^{(k)}(f)$, allora risulta:

$$D^{(k)}(f)(0) = k! a_k\,, \quad \text{cioè} \quad a_k = \frac{D^{(k)}(f)(0)}{k!}$$

2.2 Serie di potenze convergenti

7. Osserviamo che la serie di termine generale a_n è assolutamente convergente, dunque convergente perché somma di numeri reali. Infatti:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} |z_n| < +\infty$$

Si vede con un procedimento sostanzialmente identico che anche la serie di termine generale b_n è convergente. Ma allora la serie di termine generale z_n è convergente per definizione poiché si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} z_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n + i \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} b_n < +\infty$$

8. La dimostrazione è identica a quella vista nel caso delle funzioni di una variabile reale a valori reali nelle dispense del corso AM210 (osservazione 1.4).

9. Si ricordi che $\mathbb{C}$ è uno spazio metrico completo rispetto alla distanza indotta dal modulo complesso in quanto isometrico a $\mathbb{R}^2$ munito della consueta distanza euclidea.

10. La dimostrazione di questo risultato è essenzialmente identica a quella per successioni di funzioni reali, reperibile nelle dispense del corso AM210 (osservazione 2.17).

11. Si può anche fare riferimento alla dimostrazione del risultato analogo per funzioni di variabili reali contenuta nelle dispense del corso AM210 (proposizione 2.4).

12. Fissiamo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \leq R$. Con riferimento alle notazioni adottate nell'enunciato del teorema sul test di convergenza consideriamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la funzione $f_n\colon \{z\} \to \mathbb{C}$ data da $f_n(z) := a_n z^n$ e il numero reale $c_n := |a_n| R^n$. Per ipotesi e per costruzione, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge e inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha:

$$\|f_n\| = |a_n z^n| = |a_n||z|^n \leq |a_n| R^n = c_n$$

Dal teorema e dall'arbitrarietà di $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \leq R$ discende dunque quanto volevamo dimostrare.

13. Basta infatti osservare che l'esponenziale complesso è il limite di una successione uniformemente convergente di funzioni continue.

14. Si dimostra esattamente come nel caso dell'esponenziale complesso.

15. La buona definizione di $R \geq 0$ è giustificata come segue. Per ipotesi, esiste $z \in \mathbb{C}$ tale che la serie di termine generale $a_n z^n$ non converga assolutamente, o in altre parole tale che la serie di potenze reale di termine generale $|a_n||z|^n$ diverga. Da questo fatto e da quanto si è già osservato nella parte precedente della dimostrazione segue che, per ogni $s \geq |z|$, anche la serie reale di termine generale $|a_n|s^n$ diverge. Questo ci consente di affermare che S è limitato superiormente, cioè che S possiede dei maggioranti e possiamo dunque concludere (per assioma[3]) che esiste l'estremo superiore di S.

16. Sia $\{t_n\} \subseteq \mathbb{R}$ una successione limitata. Ricordiamo che $t \in \mathbb{R}$ si dice un punto di accumulazione se:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} : \; |t - t_n| < \varepsilon$$

Per il teorema di Bolzano-Weierstrass,[4] dalla successione $\{t_n\}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente. In particolare, l'insieme S dei suoi punti di accumulazione è non vuoto. Inoltre S è limitato perché $\{t_n\}$ è limitata. Allora è ben definito il limite superiore o massimo limite di $\{t_n\}$ come segue:

$$\limsup t_n := \sup S$$

Per semplicità, poniamo $\lambda := \limsup t_n$. Sfruttando la caratterizzazione dell'estremo superiore si può dimostrare che $\lambda \in S$, da cui segue che $\lambda = \max S$. Fissiamo dunque $\varepsilon > 0$. Per la proprietà appena menzionata, esiste un certo $t \in S$ tale che $\lambda - \varepsilon/2 < t < \lambda$, cioè tale che $0 < \lambda - t < \varepsilon/2$. Poiché $t \in S$, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $|t - t_n| < \varepsilon/2$ per definizione di punto di accumulazione e si ha quindi:

$$|\lambda - t_n| \leq |\lambda - t| + |t - t_n| < \varepsilon$$

Ora dimostriamo la seguente caratterizzazione del limite superiore: $\lambda \in \mathbb{R}$ è il limite superiore di una successione limitata $\{t_n\} \subseteq \mathbb{R}$ se e solo se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste soltanto un numero finito di $n \in \mathbb{N}$ tali che $t_n \geq \lambda + \varepsilon$ ed esiste un numero infinito di $n \in \mathbb{N}$ tali che $t_n \geq \lambda - \varepsilon$.

Supponiamo che $\lambda = \limsup t_n$. Se vi fosse un numero infinito di $n \in \mathbb{N}$ tali che $t_n \geq \lambda + \varepsilon$, allora la successione estratta prendendo tutti gli elementi che soddisfano tale disuguaglianza, anch'essa limitata, verificherebbe le ipotesi del teorema di Bolzano-Weierstrass. Esisterebbe allora un punto di accumulazione maggiore strettamente di $\lambda + \varepsilon$ e questo contraddice il fatto che $\lambda = \limsup t_n$. D'altra parte, poiché $\lambda \in S$, per definizione di punto di accumulazione vi è un numero infinito di $n \in \mathbb{N}$ tali che $|\lambda - t_n| < \varepsilon$ e quindi, in particolare, tali che $t_n \geq \lambda - \varepsilon$.

Viceversa, supponiamo che $\lambda \in \mathbb{R}$ sia, per ogni $\varepsilon > 0$, tale che $t_n \geq \lambda + \varepsilon$ soltanto per un numero finito di $n \in \mathbb{N}$ e tale che $t_n \geq \lambda - \varepsilon$ per un numero infinito di $n \in \mathbb{N}$. La prima condizione ci dice, innanzitutto, che non esistono punti di accumulazione strettamente maggiori di λ. Tutte e due ci permettono di dire, invece, che $\lambda \in S$. Infatti, la prima condizione è equivalente a richiedere che $t_n < \lambda + \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ tranne al più per un numero finito di elementi. Vi è dunque un numero infinito di $n \in \mathbb{N}$ tali che $|\lambda - t_n| < \varepsilon$.

17. Infatti, una qualsiasi successione convergente $\{t_n\} \subseteq \mathbb{R}$ ammette un solo punto di accumulazione.

18. Precisamente, se fosse $R < 1/(t + \varepsilon)$ allora, per il teorema sul raggio di convergenza di una serie di potenze, la serie di termine generale $|a_n||z|^n$ non convergerebbe per $z \in \mathbb{C}$ con $R < |z| < 1/(t + \varepsilon)$.

19. La condizione $|a_n||z|^n \geq 1$ è valida per un numero infinito di $n \in \mathbb{N}$ e possiamo quindi estrarre una sottosuccessione da $\{|a_n||z|^n\}$ i cui termini soddisfino tutti la disuguaglianza trovata. Ma allora, tenendo a mente che il limite di una successione convergente coincide con quello di una qualunque sua sottosuccessione, si può affermare che il limite di $\{|a_n||z|^n\}$ non esiste (finito) oppure che vale:

$$\lim_{n \to +\infty} |a_n||z|^n \geq 1$$

Non essendo quindi soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza di una serie complessa, possiamo concludere che la serie di termine generale $a_n z^n$ non converge (non solo assolutamente).

[3] Si tratta del sedicesimo assioma di $\mathbb{R}$, noto come l'assioma di Dedekind o di completezza. L'argomento è stato affrontato nel corso AM110.

[4] Il risultato, del quale ricordiamo l'enunciato, è stato discusso nel corso AM110: da ogni successione in $\mathbb{R}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. In particolare, è possibile estrarre una sottosuccessione convergente in $\mathbb{R}$ da ogni successione limitata in $\mathbb{R}$.

20. Come prima, se fosse $R > 1/(t-\varepsilon)$ allora, per il teorema sul raggio di convergenza di una serie di potenze, la serie di termine generale $a_n z^n$ convergerebbe assolutamente (dunque, convergerebbe) per $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1/(t-\varepsilon)$ e questo contraddice quanto si è dimostrato nella parte precedente.

21. Supponiamo che $t = 0$ e fissiamo $z \in \mathbb{C}$. Dalla definizione data di limite superiore segue facilmente che $\sqrt[n]{|a_n|} < 1/|z|$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ eccetto che per un numero finito di casi, ovvero per ogni $n \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande. Ma allora la serie di termine generale $a_n z^n$ converge assolutamente dato che una coda della serie è geometrica di ragione minore strettamente di 1. Di conseguenza, la serie di termine generale $a_n z^n$ converge e poiché questo è vero per ogni $z \in \mathbb{C}$ possiamo concludere che $R = \infty$.

    Ora supponiamo invece che $t = \infty$, cioè che la successione $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ non sia limitata e consideriamo $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$. Dalle assunzioni fatte discende che, per ogni $M \in \mathbb{N}$, vi è sempre un termine della successione che sia maggiore o uguale della quantità $\sqrt[n]{M}/|z|$ e dunque si può estrarre da $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ una sottosuccessione i cui termini verifichino tutti la disuguaglianza $|a_{n_k}||z|^{n_k} \geq M$. Se esiste, il limite di una successione è uguale a quello di una sua qualsiasi sottosuccessione e nel nostro caso:

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n||z|^n = \lim_{k\to+\infty} |a_{n_k}||z|^{n_k} = +\infty$$

    Ne deduciamo che la serie di termine generale $a_n z^n$ diverge in quanto il limite del termine generale della serie è non nullo (anche se non esiste). Per arbitrarietà di $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$, concludiamo che $R = 0$.

22. Innanzitutto, il caso $R = \infty$ è ovvio in quanto dalla convergenza assoluta della serie per ogni $z \in \mathbb{C}$ discende immediatamente la sua convergenza puntuale. Nel caso $R = 0$, per il teorema 2.6 appena dimostrato, la successione $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ non è limitata. Si può quindi ripetere lo stesso argomento visto nella nota 21 per ottenere che la serie di termine generale $a_n z^n$ diverge (non solo assolutamente). Adesso assumiamo che $R \neq 0, \infty$ e consideriamo $z \in \mathbb{C}$ con $z \geq R$. Nuovamente per il teorema 2.6, se $t := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, allora $R = 1/t$ e inoltre, per definizione di limite superiore, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $|a_n| \geq (t-\varepsilon)^n$ per un numero infinito di interi $n \in \mathbb{N}$. Ne deduciamo che, per tali $n \in \mathbb{N}$, vale:

$$|a_n||z|^n \geq (t-\varepsilon)^n R^n = \left(\frac{t-\varepsilon}{t}\right)^n$$

    Consideriamo ora la successione di interi $\{n_k\} \subseteq \mathbb{N}$ per i quali si abbia questa disuguaglianza. Se il limite della successione $\{|a_n||z|^n\}$ esiste, allora è uguale a quello delle sue sottosuccessioni, quindi:

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n||z|^n = \lim_{k\to+\infty} |a_{n_k}||z|^{n_k} \geq \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{t-\varepsilon}{t}\right)^{n_k} = 0$$

    Possiamo allora concludere che, se $|z| > R$, allora la serie non converge (non solo assolutamente) in quanto la disuguaglianza nelle relazioni trovate diventa stretta e dunque la condizione necessaria per la convergenza non viene mai soddisfatta. Se invece $|z| = R$, allora le disuguaglianze non sono strette e quindi non possiamo dire nulla perché il limite del termine generale in modulo potrebbe essere 0.

23. Infatti, se vale $\varepsilon \geq A$, allora consideriamo $0 < \varepsilon' < A$ e facciamo vedere che $|a_n^{1/n} - A| < 2\varepsilon' < 2\varepsilon$.

24. La dimostrazione per induzione è su $n \geq n_0$. La base dell'induzione è banale poiché, per $n = n_0$, possiamo prendere $C_1(\varepsilon) := C_2(\varepsilon) := a_{n_0}$. Il passo induttivo, invece, è dato dalla disuguaglianza:

$$C_1(\varepsilon)(A-\varepsilon)^{n-n_0} \leq a_{n-1}(A-\varepsilon) \leq a_n \leq a_{n-1}(A+\varepsilon) \leq C_2(\varepsilon)(A+\varepsilon)^{n-n_0}$$

25. Qui, per $i = 1, 2$, definiamo $\delta_i(n) := C_i'(\varepsilon)^{1/n} - 1$ e applichiamo la definizione di limite in virtù del fatto che:

$$\lim_{n\to+\infty} \delta_i(n) = \lim_{n\to+\infty} C_i'(\varepsilon)^{\frac{1}{n}} - 1 = 0$$

2.3 Relazioni tra serie di potenze formali e serie di potenze convergenti

26. Poiché si assume per ipotesi che f converga assolutamente su $D(0, r)$, la condizione necessaria che $\lim_{n\to+\infty}|a_n||z|^n = 0$ deve essere verificata per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < r$. Ne ricaviamo in particolare che, per ogni $0 < s < r$, la successione $\{|a_n|s^n\}$ è limitata, cioè esiste $C_1 > 0$ tale che $|a_n|s^n < C_1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ragionando allo stesso modo con la serie di potenze g, troviamo $C_2 > 0$ tale che $|b_n|s^n < C_2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $0 < s < r$. Per avere il risultato voluto, definiamo $C := \max_{i=1,2} C_i$.

27. Per semplicità, definiamo $C_n := \sum_{k=0}^{n} |a_k||b_{n-k}|$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dobbiamo dunque mostrare che:

$$|(fg)(z) - f_N(z)g_N(z)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} C_n|z|^n$$

Ricordando ora che $(fg)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ e supponendo che $f_N(z)g_N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$, abbiamo:

- $d_n = c_n$ se $n \leq N$.
- d_n è somma di alcuni tra gli elementi $a_0b_n, a_1b_{n-1}, \ldots, a_nb_0$ (mentre la somma di tutti questi numeri è c_n) se $N < n \leq 2N$.
- $d_n = 0$ se $n > 2N$.

Ne deduciamo che:

$$(fg)(z) - f_N(z)g_N(z) = \sum_{n=N+1}^{\infty} (c_n - d_n)z^n$$

Quanto si vuole mostrare discende quindi dalla disuguaglianza triangolare assieme alla condizione:

$$|c_n - d_n| \leq \sum_{n=0}^{N} |a_k||b_{n-k}| = C_n$$

28. Poiché per ipotesi f ha raggio di convergenza $R > 0$, il teorema 2.5 mi garantisce che, comunque sia fissato $0 < r < R$, la serie di termine generale $a_n r^n$ converge assolutamente. In particolare, è convergente qualsiasi coda della serie di termine generale $|a_m^{-1} a_n| r^{n-m}$ e quindi, per il teorema 2.4, si può affermare che h è una serie uniformemente convergente per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \leq r$. Infine, per il teorema 2.3 applicato alla successione delle somme parziali di h, possiamo concludere che la somma $h(z)$ della serie di potenze h è una funzione ben definita e continua su tutto il disco $D(0, r)$.

29. Infatti, dall'ipotesi che f e g siano convergenti e dal teorema 3.1 segue che anche h è convergente, dunque h converge assolutamente su un disco di raggio positivo. Come prima, possiamo affermare che h è continua in un intorno di 0 come conseguenza dei teoremi 2.3, 2.4 e 2.5. Ricordando che, per ipotesi, si ha $0 \in S'$, dove S' denota l'insieme dei punti di accumulazione per S, per ogni $\delta > 0$ abbiamo infiniti punti di S nella palla aperta $B(0, \delta)$. Inoltre, per ogni $\varepsilon > 0$, per la continuità di h in 0 esiste $\delta > 0$ tale che $|h(z) - h(0)| < \varepsilon$ per ogni $z \in B(0, \delta)$. Ne deduciamo in particolare che, per ogni $\varepsilon > 0$, si può sempre scegliere $z \in S \cap B(0, \delta)$ e quindi, essendo $h(z) = 0$ per costruzione, troviamo che $|h(0)| < \varepsilon$. Dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ discende dunque la condizione voluta $h(0) = 0$.

30. Qui stiamo utilizzando il fatto che $\mathbb{R}$ è un insieme che ammette 0 come punto di accumulazione.

31. La dimostrazione di questo ben noto risultato è formalmente identica a quella dell'osservazione 2.8 nelle dispense del corso AM210.

32. Questo fatto discende immediatamente da una generalizzazione del teorema del binomio dovuta a Newton.[5]

[5] Una dimostrazione di questo risultato è reperibile all'indirizzo web seguente: https://en.wikibooks.org/wiki/Advanced_Calculus/Newton%27s_general_binomial_theorem.

33. Più precisamente, utilizziamo il fatto che la successione delle somme parziali $\{|a_n|s^n\}$ sia limitata per ogni $0 < s < R$, dove abbiamo indicato con R il raggio di convergenza di f, da cui segue che $|a_n| \leq CA^n$ per ogni $0 < A < 1/R$ e per un opportuno $C > 0$. A questo punto basta osservare che:

$$\begin{array}{ll} CA^n \leq A^n & \text{se } C \leq 1 \\ CA^n \leq (CA)^n & \text{se } C > 1 \end{array}$$

Troviamo quindi la disuguaglianza $|a_n| \leq A^n$ a meno di sostituire A con CA nel caso in cui $C > 1$.

34. Si ricordi che l'insieme delle serie di potenze formali ha la struttura di una $\mathbb{C}$-algebra commutativa, dunque il termine AT può essere trattato come se fosse un numero reale. In particolare, possiamo sfruttare la proprietà distributiva per mettere a denominatore comune le frazioni al denominatore.

35. Qui stiamo utilizzando il fatto che, se h è assolutamente convergente su un disco di raggio positivo, allora lo è chiaramente anche la serie $h'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n||z|^n$ e dunque h' è una funzione continua in un intorno di 0 per i teoremi 2.3, 2.4 e 2.5. Dalla continuità di h' e dal fatto che $h'(0) = 0$ discende quindi l'esistenza di una quantità $s > 0$ tale che $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|s^n < R$, che è quanto si voleva mostrare.

36. Per vedere che il raggio di convergenza della serie è 1, si applica il "Ratio Test" (pagina 57, Lang):

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right|\left|\frac{n}{(-1)^{n-1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

2.4 Funzioni analitiche

37. Queste condizioni sono note se z è una variabile reale x. In tal caso, infatti, per verificare l'identità è sufficiente applicare la formula di Eulero. Il caso generale è allora una conseguenza del punto (b) del teorema 3.2, perché $\mathbb{R}$ ammette 0 come punto di accumulazione. Detto questo, basta servirsi della proposizione precedente e ricordare che e^z e iz sono analitiche in $\mathbb{C}$ per poter concludere che tali sono anche $\sin z$ e $\cos z$.

38. Per approfondimenti e altri dettagli sulla questione dello scambio dell'ordine di somma, si rimanda al testo *AnalisiMatematica.1, Una introduzione rigorosa all'analisi matematica su* $\mathbb{R}$*; Parte 1* del prof. Luigi Chierchia.

2.5 Differenziazione di serie di potenze

39. Questo fatto discende dalla seguente proprietà generale del limite superiore: date due successioni limitate $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ a valori reali, con $x_n, y_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha la disuguaglianza seguente:

$$\limsup(x_n y_n) \leq \limsup x_n \limsup y_n \tag{2}$$

Vale inoltre l'uguaglianza se almeno una delle due successioni converge in $\mathbb{R}$ e se il prodotto non è una forma indeterminata del tipo $0 \cdot \infty$ oppure $\infty \cdot 0$. Per poter dimostrare queste due asserzioni, andiamo a introdurre una naturale caratterizzazione del limite superiore, che ne giustifica anche la notazione:

$$\limsup x_n = \lim_{n\to+\infty} \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$$

Dimostriamo che tale definizione alternativa del limite superiore è equivalente a quella data nella nota 16. Sia dunque $\{x_n\}$ una successione limitata. Consideriamo la successione $\{y_n\}$ definita da:

$$y_n := \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$$

Per semplicità, definiamo inoltre $\alpha := \lim_{n\to+\infty} y_n$ e $\beta := \sup S$, dove con S si è indicato l'insieme dei punti di accumulazione per $\{x_n\}$. Basterà allora mostrare che $\alpha = \beta$. Sfrutteremo la ben nota[6] proprietà che $x \in \mathbb{R}$ è di accumulazione per $\{x_n\}$ se e solo se $\{x_n\}$ ammette una sottosuccessione convergente a x.

[6] Tale affermazione segue da un fatto più generale dimostrato nel corso AM110: dato un insieme limitato $E \subseteq \mathbb{R}$, l'insieme dei suoi punti di accumulazione è costituito da tutti e soli i numeri reali y tali che esista una successione a valori in $E\backslash\{y\}$ convergente a y.

Innanzitutto, sappiamo dalla nota 16 che $\beta \in S$ e quindi esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$ convergente a β. Si osservi però che $n_k \geq k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e dunque abbiamo la disuguaglianza:

$$x_{n_k} \leq \sup\{x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots\} = y_k$$

Passando al limite per $k \to +\infty$ in entrambi i membri della disuguaglianza, otteniamo che $\beta \leq \alpha$.

Per dimostrare che $\alpha \leq \beta$ basterà far vedere che α è un punto di accumulazione per $\{x_n\}$ e dunque costruiremo una sottosuccessione di $\{x_n\}$ convergente ad α. Usando il fatto che $\alpha = \lim_{n\to+\infty} y_n$ e applicando la definizione di limite, possiamo affermare che, per $\varepsilon := 1$, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq N$, si abbia $\alpha - 1 < y_n < \alpha + 1$. Se N_1 è un tale $N \in \mathbb{N}$, abbiamo $\alpha - 1 < y_{N_1} < \alpha + 1$ e dunque $\alpha - 1$ non è un maggiorante per l'insieme $\{x_{N_1}, x_{N_1+1}, x_{N_1+2}, \dots\}$ in quanto $\alpha - 1 < y_{N_1}$ e y_{N_1} è il più piccolo dei maggioranti. Ne discende l'esistenza di un intero $n_1 \geq N_1$ tale che valga:

$$\alpha - 1 < x_{n_1} \leq \sup\{x_{N_1}, x_{N_1+1}, x_{N_1+2}, \dots\} < \alpha + 1$$

Ripetiamo ora questa costruzione per $\varepsilon := 1/2$. Come prima, esiste un intero $N \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq N$, valga $\alpha - 1/2 < y_n < \alpha + 1/2$. Se $N_2 := \max\{N, n_1\}$, vale $\alpha - 1/2 < y_{N_2} < \alpha + 1/2$ per cui, non essendo $\alpha - 1/2$ un maggiorante di $\{x_{N_2}, x_{N_2+1}, x_{N_2+2}, \dots\}$, esiste $n_2 \geq N_2$ tale che:

$$\alpha - \frac{1}{2} < x_{n_2} \leq \sup\{x_{N_2}, x_{N_2+1}, x_{N_2+2}, \dots\} < \alpha + \frac{1}{2}$$

Iterando la costruzione, otteniamo una successione strettamente crescente $\{n_k\}$ di interi naturali tale che $|x_{n_k} - \alpha| < 1/k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Passando infine al limite per $k \to +\infty$, abbiamo dunque la condizione $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \alpha$, dalla quale segue che α è un punto di accumulazione per $\{x_n\}$ e quindi $\alpha \leq \beta$.

Dimostriamo ora la disuguaglianza (2). Poiché $x_k, y_k \geq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, per ogni $\ell \geq n$ si ha che:

$$x_\ell y_\ell \leq \big(\sup_{k\geq n} x_k\big)\big(\sup_{k\geq n} y_k\big)$$

Ne discende che il secondo membro della disuguaglianza è un maggiorante della successione $\{x_\ell y_\ell\}$ e dunque, poiché per definizione l'estremo superiore è il più piccolo dei maggioranti, abbiamo che:

$$\sup_{\ell\geq n}(x_\ell y_\ell) \leq \big(\sup_{k\geq n} x_k\big)\big(\sup_{k\geq n} y_k\big)$$

Passando dunque al limite per $n \to +\infty$ e usando la caratterizzazione del limite superiore appena dimostrata, otteniamo la disuguaglianza (2).

Supponiamo adesso che $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$ e che il prodotto $\limsup x_n \limsup y_n$ non sia una forma indeterminata del tipo $0 \cdot \infty$ oppure $\infty \cdot 0$. Se $y = 0$ allora, ricordando che per ipotesi $\{x_n\}$ è una successione limitata, si ha che $\lim_{n\to+\infty} x_n y_n = 0$ e, di conseguenza, la disuguaglianza (2) diventa un'uguaglianza. Possiamo dunque assumere $y > 0$. Il teorema di permanenza del segno permette di dividere per la quantità y_n se n è sufficiente grande e dunque dalla disuguaglianza (2) segue che:

$$\begin{aligned}
\limsup x_n \limsup y_n &= \limsup (x_n y) \\
&= \limsup\Big((x_n y_n)\frac{y}{y_n}\Big) \\
&\leq \limsup(x_n y_n) \limsup\Big(\frac{y}{y_n}\Big) \\
&= \limsup(x_n y_n) \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{y}{y_n}\Big) \\
&= \limsup(x_n y_n)
\end{aligned}$$

Combinando questo risultato con la disuguaglianza (2) dimostrata prima, abbiamo l'uguaglianza.

40. Volendo essere puntigliosi nell'applicazione del teorema 2.6, si può cambiare l'indice della somma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} z^m$$

2.6 Proprietà geometriche delle funzioni analitiche

41. Ciò discende dal fatto che un isomorfismo analitico è una funzione analitica con inversa analitica. Per il teorema 5.1, sia la funzione che la sua inversa sono olomorfe per cui, in particolare, esse sono continue.

42. Supponiamo che f sia un isomorfismo locale in z_0, cioè che f sia analitica in un intorno di z_0 con inversa g analitica in un intorno di $w_0 := f(z_0)$. In tali intorni abbiamo i seguenti sviluppi in serie:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \,, \quad g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (w - w_0)^n$$

Distinguiamo due casi:

- Se $z_0 = 0$ e $f(0) = 0$, allora gli sviluppi di f e g in serie di potenze intorno a 0 devono essere di ordine 1 perché sono formalmente identici a serie di potenze formali (si intende dire che sono identici a meno del significato attribuito alla variabile, riferita a numeri complessi z o w nel caso degli sviluppi in serie di f e g, a un'indeterminata T nel caso delle serie formali) e quindi:

$$a_1 = f'(0) \neq 0$$

- In generale, ragionando come nella parte finale della dimostrazione, possiamo definire F e G in modo tale che lo sviluppo in serie di F in un intorno di 0 abbia gli stessi coefficienti (tranne il termine noto a_0, che viene sostituito da 0) dello sviluppo in serie di f in un intorno di z_0 e in modo tale che G sia l'inversa di F. Precisamente, la definizione di F non cambia rispetto a quella fornita nella parte successiva della dimostrazione, la definizione di G è quella seguente:

$$G(w) = g(w + w_0) - z_0$$

  Poiché $F(0) = 0$, possiamo ripetere l'argomento visto nel caso precedente per concludere che:

$$a_1 = F'(0) = f'(z_0) \neq 0$$

43. Per il teorema 5.1, dal fatto che f abbia raggio di convergenza $R > 0$ discende che f è olomorfa e quindi, in particolare, continua sul disco aperto $D = D(0, R)$. Ne deduciamo allora che $U_0 \subseteq \mathbb{C}$ è un insieme aperto in quanto preimmagine di un aperto mediante un'applicazione continua (cioè la restrizione di f su D).

44. Giustifichiamo con più cura il fatto che f_0 e g_0 siano analitiche nei rispettivi domini di definizione. Innanzitutto, poiché tali funzioni sono l'una l'inversa dell'altra, si ha l'inclusione $U_0 \subseteq D$. Infatti:

$$U_0 = f^{-1}(V_0) = g(V_0) \subseteq D$$

Dalla dimostrazione sappiamo che f ammette uno sviluppo in serie di potenze intorno a 0 nel disco aperto D. Dal teorema 4.1 discende allora che f è analitica in D e quindi lo sarà, in particolare, nel sottoinsieme $U_0 \subseteq D$. Similmente, la funzione g è analitica nella sua regione di convergenza e lo è quindi in V_0.

45. Si noti che tale funzione non può essere una determinazione del logaritmo della tipologia seguente:

$$\log(w) = \log|w| + i(\mathrm{Arg}(w) + 2k\pi) \,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Abbiamo infatti dimostrato, nell'osservazione immediatamente precedente, che la determinazione principale dell'argomento di un numero complesso non è un'applicazione continua nell'intorno del semiasse positivo delle ascisse e, in particolare, nell'intorno del numero complesso $z_0 = 1$, quale è invece la funzione esibita mediante un suo sviluppo in serie di potenze in un intorno di 1. Vedremo che il logaritmo si può esprimere come una funzione con parte immaginaria a valori nell'intervallo $[-\pi, \pi)$.

2.7 Proprietà geometriche locali (il teorema del massimo modulo locale)

46. Precisiamo che la funzione φ è analitica in un intorno di 0 perché si esprime come prodotto della funzione $1 + H(z)$, che è analitica intorno a 0 e del monomio az, che ovviamente è analitico in $\mathbb{C}$.

    In verità, non possiamo ancora concludere che φ è un isomorfismo locale in 0 perché non abbiamo ancora giustificato il fatto che φ e la sua inversa possono essere definite su insiemi aperti. Questo però si può vedere riapplicando l'argomento usato nella dimostrazione del teorema della funzione inversa, del quale diamo un cenno per ricordarlo. Chiamiamo quindi g la funzione il cui sviluppo in serie intorno a 0 è l'inversa formale dello sviluppo in serie di φ, funzione che per il teorema 6.1 già menzionato certamente esiste. Dal fatto che φ è analitica discende che g è convergente, quindi continua in 0. Questo ci consente di scegliere un aperto V_0, contenuto nella regione di convergenza di g, tale che $g(V_0)$ sia contenuto nella regione di convergenza di f. Prendendo poi $U_0 := \varphi^{-1}(V_0)$ possiamo affermare, come già commentato nella nota 43, che $U_0 \subseteq \mathbb{C}$ è un insieme aperto. Adesso si può far vedere, ripetendo il ragionamento visto nella dimostrazione del teorema della funzione inversa, che la restrizione di φ su U_0 è un isomorfismo analitico con inversa la restrizione di g su V_0.

47. Sia infatti $U \subseteq X$ un insieme aperto. Dire che $f\colon X \to Y$ è un omeomorfismo locale significa dire che, per ogni $z \in U$, esiste un intorno aperto U_z del punto z tale che la restrizione $f_z\colon U_z \to f(U_z)$ di f su U_z sia un omeomorfismo sulla sua immagine. Poiché[7] un omeomorfismo è un'applicazione aperta, per ogni $z \in U$ il sottoinsieme $f(U_z) \subseteq Y$ è aperto. Ma allora anche $f(U) \subseteq Y$ è un aperto in virtù del fatto che l'immagine dell'unione è l'unione delle immagini e l'unione di aperti è aperta:

$$f(U) = f\Big(\bigcup_{z\in U} U_z\Big) = \bigcup_{z\in U} f(U_z)$$

48. Giustifichiamo questa affermazione per contrapposizione logica. Se f è localmente costante in z_0, allora f è costante in un intorno sufficientemente piccolo di z_0 e dunque in tale intorno avremo che:

$$f(z) = f(z_0)$$

    In altre parole, lo sviluppo in serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ di f intorno al punto z_0 è tale che $a_m = 0$ per ogni $m \geq 1$.

49. Poiché l'espressione per f fornita dal teorema 6.3 è valida soltanto in un intorno del punto z_0, non possiamo concludere subito che f è un'applicazione aperta. Consideriamo allora un aperto $A \subseteq U$ e denotiamo $U(z_0)$ un intorno aperto del punto $z_0 \in U$ tale che valga $f(z) = f(z_0) + (\varphi(z - z_0))^m$ per ogni $z \in U(z_0)$. Se definiamo $A(z_0) = A \cap U(z_0)$ per ogni $z_0 \in A$, abbiamo ancora un intorno aperto di z_0 in quanto l'intersezione di due aperti è un insieme aperto e naturalmente l'espressione precedente per f continua a valere in $A(z_0)$. Ne segue che $f(A) \subseteq \mathbb{C}$ è un aperto come conseguenza del fatto che, per ogni $z_0 \in U$, la restrizione di f su $U(z_0)$ è un'applicazione aperta (il che ci viene garantito dalla parte precedente della dimostrazione). Infatti, si può scrivere $f(A)$ come unione di aperti:

$$f(A) = f\Big(\bigcup_{z_0\in A} A(z_0)\Big) = \bigcup_{z_0\in A} f(A(z_0))$$

50. Sarà sufficiente dimostrare la prima affermazione, in quanto la seconda discende immediatamente dalla prima come conseguenza del teorema della funzione inversa e del fatto che ogni isomorfismo analitico è un isomorfismo analitico locale.

51. Più precisamente, questo fatto discende immediatamente dal teorema fondamentale dell'algebra[8] il quale garantisce che, dato un qualsiasi intero $m \geq 1$ e dato $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$, le radici complesse distinte dell'equazione $X^m = z$ sono esattamente m.

[7] La dimostrazione di questo risultato è piuttosto semplice ed è stata trattata nel corso GE220. Si vedano gli appunti del corso per altri dettagli.

[8] Questa formulazione del teorema fondamentale dell'algebra, in parte legata alla questione delle radici dell'unità, si trova negli appunti del corso AL110.

52. Qui usiamo il teorema della funzione inversa per affermare che f è un isomorfismo analitico locale:

$$f'(z_0) = \varphi'(0) \neq 0$$

Il fatto che g sia analitica in $f(z_0)$ discende invece dalla definizione di isomorfismo analitico locale e dall'unicità dell'inversa.

53. Questa affermazione si giustifica semplicemente ripercorrendo, passo dopo passo, la dimostrazione del teorema della funzione aperta, con l'accorgimento di considerare, come punto z_0, quello fissato inizialmente anziché un qualunque punto di U e ignorando la nota 49 alla fine della dimostrazione.

54. Assumere che $r \leq R$ non è stato restrittivo perché nel caso $r > R$ sappiamo che esiste un tale z nel disco $D(z_0, R) \subset D(z_0, r)$.

55. Il teorema di Weierstrass si estende senza nessuna difficoltà al caso delle funzioni reali di variabile complessa in quanto $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$ sono isometrici e il teorema è noto per le funzioni di due o più variabili reali (teorema 1.2 nelle dispense del corso AM210).

56. In alternativa, si può ragionare nel modo seguente. Sappiamo che, in un intorno sufficientemente piccolo di z_0, il polinomio costante $f(z_0)$ coincide con $a_0 + a_1 z + \cdots + a_d z^d$ e dunque il polinomio definito come la loro differenza, che denoteremo $P(z)$, ammette un numero infinito di radici (tutti i punti del disco $D(z_0, r)$). Tuttavia, è ben noto[9] che ogni polinomio non costante a coefficienti in un dominio ammette un numero di radici non superiore al suo grado e, in particolare, un numero finito di radici. Ne segue che $P(z)$ è un polinomio costante e, siccome i polinomi costanti non nulli non ammettono radici, possiamo affermare che $P(z)$ è il polinomio nullo. Allora, per il principio di identità dei polinomi, possiamo concludere che $a_d = 0$ e abbiamo la contraddizione che cercavamo.

3 Il teorema di Cauchy

3.1 Funzioni olomorfe su insiemi connessi

57. Stiamo sfruttando la seguente proprietà generale: se $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo, una funzione $f \colon I \to \mathbb{C}$ olomorfa con derivata identicamente nulla è costante. Per mostrarlo, consideriamo le due funzioni $u, v \colon I \to \mathbb{R}$ tali che $f(x) = u(x) + iv(x)$. Sappiamo allora che u e v sono derivabili e abbiamo che:

$$u'(x) + iv'(x) = f'(x) = 0$$

Ne segue che anche u e v hanno derivata identicamente nulla, ma allora u e v sono funzioni costanti in quanto funzioni reali di variabile reale definite su un intervallo (si applica un ben noto risultato dimostrato nel corso AM120). Segue immediatamente che anche $f(x) = u(x) + iv(x)$ è costante.

3.2 Integrali sui cammini

58. Osserviamo che la definizione è ben posta. Infatti, poiché si presuppone che f sia continua, lo sono anche le funzioni u e v. Poiché queste sono definite su un intervallo compatto, sono limitate come conseguenza del teorema di Weierstrass e allora, per un risultato del corso AM120, sono integrabili secondo Riemann.

59. Anche in questo caso la definizione ha senso. Infatti, il prodotto delle funzioni $f \circ \gamma$ e γ' è continuo ed è un'applicazione dal compatto $[a, b]$ in $\mathbb{C}$. Ne segue che il suo integrale è ben definito grazie alla definizione precedente.

60. Il metodo di integrazione per parti e del cambio di variabile nell'integrazione rimangono validi per le funzioni complesse di una variabile reale. Infatti, le dimostrazioni che avevamo fornito nel caso delle funzioni reali (trattate nel corso AM120) si basano solo sul teorema fondamentale del calcolo, sulla regola di derivazione del prodotto e sulla regola della catena, risultati che, come sappiamo, si estendono senza difficoltà alle funzioni complesse. Ne deduciamo che la dimostrazione nel caso complesso sarebbe formalmente identica a quella già fornita per le funzioni reali di variabile reale.

[9] Si tratta di una conseguenza del teorema di Ruffini. Dimostrazioni per questi risultati sono reperibili negli appunti del corso AL110.

61. Questo risultato discende immediatamente dall'osservazione 1.62 nelle dispense del corso AM210, prendendo in esame il caso particolare in cui $n = 2$, $I \subseteq \mathbb{R}$ è l'intervallo compatto $[a, b]$ e $\|\cdot\|_a$ è la norma euclidea. Osserviamo infatti che una funzione vettoriale continua su un compatto, dunque continua e limitata (per il teorema di Weierstrass), è integrabile come conseguenza immediata del risultato analogo per le funzioni reali numeriche (quello che abbiamo già menzionato nella nota 58) e della definizione 1.48 nelle dispense del corso AM210. Ricordiamo anche che $\mathbb{C}$ è isometrico a $\mathbb{R}^2$.

Se vogliamo essere più espliciti, scriviamo $f(t) = u(t) + iv(t)$ con $u, v\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, ricordiamo che, essendo $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$ isometrici, si conservano le distanze dall'origine nel passare da uno spazio metrico all'altro e applichiamo l'osservazione 1.62 delle dispense del corso AM210, prima menzionata, alla funzione continua $(u, v)\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$. Abbiamo allora, in modo naturale, la disuguaglianza voluta:

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left\|\left(\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t, \int_a^b v(t)\mathrm{d}t\right)\right\| \\ &= \left\|\int_a^b (u,v)(t)\,\mathrm{d}t\right\| \le \int_a^b \|(u,v)(t)\|\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

62. Il massimo della funzione $|f(\gamma(t))|$ è ben definito perché l'immagine dell'intervallo compatto $[a, b]$ tramite il cammino γ, che è un'applicazione continua, è un sottoinsieme compatto $K \subseteq U$ per un ben noto risultato di topologia (si rimanda agli appunti del corso GE220) e dunque, per il teorema di Weierstrass, si può certamente concludere che la funzione continua $|f|$ assume massimo su K.

63. La nozione di curva opposta si generalizza in modo naturale ai cammini. Infatti, dato un qualsiasi cammino $\gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, il cammino opposto a γ è $\gamma^- = \{\gamma_n^-, \ldots, \gamma_1^-\}$. Si tratta effettivamente di un cammino dal momento che, per $i = 1, \ldots, n$, i punti iniziale e finale z_{i-1} e z_i di γ_i diventano i punti finale e iniziale di γ_i^- rispettivamente. Inoltre, il cammino opposto soddisfa la condizione:

$$\int_{\gamma^-} f = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i^-} f = -\sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f = -\int_{\gamma} f$$

64. Si consideri la funzione $F\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ definita da $F(t) := |f(z + th) - f(z)|$. Ovviamente vale che:

$$F(t) \le \max_{t\in[0,1]} F(t)$$

Questa disuguaglianza viene preservata nel passaggio sotto il simbolo di integrale grazie a un noto risultato per funzioni reali di una variabile reale (si rimanda, come al solito, agli appunti del corso AM120).

65. Per giustificare rigorosamente questa affermazione, poniamo $s = th$ in maniera tale da avere che:

$$\max_{t\in[0,1]} |f(z + th) - f(z)| \le \max_{s\in D(0,|h|)} |f(z + s) - f(z)|$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccolo. Dalla continuità di f in $z \in U$ deduciamo che esiste $\delta > 0$ tale che $|f(z + s) - f(z)| < \varepsilon$ per ogni $s \in D(0, \delta)$. Ma allora la suddetta condizione resta valida, fissato $h \in D(0, \delta)$, per ogni $s \in D(0, |h|) \subseteq D(0, \delta)$ e dunque, passando al massimo di tali s, si ha:

$$\max_{s\in D(0,|h|)} |f(z + s) - f(z)| < \varepsilon$$

La condizione da verificare deriva quindi dalle due disuguaglianze trovate per definizione di limite.

3.3 Primitiva locale di una funzione olomorfa

66. A posteriori, il teorema 2.1 garantisce che l'integrale non dipende dal cammino. Infatti, le funzioni olomorfe sono analitiche e quindi, in particolare, funzioni continue che ammettono una primitiva.

67. Riprendendo la nozione generale di rettangolo data nelle dispense del corso AM220, un rettangolo in $\mathbb{R}^2$ è il prodotto cartesiano di due intervalli di $\mathbb{R}$. Un rettangolo in $\mathbb{C}$ può essere definito usando il ben noto fatto che $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$ sono isometrici. Per semplicità, tuttavia, ci riferiremo a un rettangolo di $\mathbb{C}$ intendendo sempre un sottoinsieme di $\mathbb{C}$ isometrico non a un rettangolo qualunque, bensì a un rettangolo standard di $\mathbb{R}^2$, vale a dire un rettangolo chiuso, limitato e non degenere di $\mathbb{R}^2$. Si tenga conto, in particolare, del fatto che un rettangolo in $\mathbb{C}$ è un rettangolo i cui lati sono orizzontali o verticali.

68. Siano infatti z e w due punti nell'intersezione di tali rettangoli e sia $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccolo. Dalla definizione di limite segue che, per qualche $n \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande, si ha la relazione:

$$|z - w| \leq \operatorname{diam} R^{(n)} \leq L_n < \varepsilon$$

La seconda disuguaglianza deriva (geometricamente) dalla disuguaglianza triangolare. Dato che il risultato ottenuto non dipende da una particolare scelta di $\varepsilon > 0$, possiamo concludere che $z = w$.

69. Nel caso particolare in cui z e z_0 sono "allineati" nel senso che hanno la stessa parte reale oppure la stessa parte immaginaria, il rettangolo R avente z e z_0 come vertici opposti degenera nel segmento di estremi z e z_0. In tal caso non vi è dunque alcuna ambiguità perché in un tale segmento vi è un solo cammino da z_0 a z.

3.4 Integrale di una funzione olomorfa su un cammino continuo

70. Infatti U^c è non vuoto e inoltre, per ogni $t \in [a, b]$, l'elemento $0 \in \mathbb{R}$ è un minorante per l'insieme:

$$\{|\gamma(t) - w| \colon w \in U^c\}$$

Ne deduciamo, grazie all'assioma di Dedekind per $\mathbb{R}$, che tale insieme ammette l'estremo inferiore.

3.5 La forma omotopica del teorema di Cauchy

71. Infatti, per il teorema, l'integrale di f su γ coincide con l'integrale di f su $\{u\}$ e questo integrale è nullo perché $\{u\}$ si può realizzare come l'immagine di una curva su un intervallo di ampiezza nulla.

72. È sufficiente scegliere γ oppure γ' come la curva identicamente costante su un punto qualsiasi di U.

73. Per definizione, se $\pi_1(U, a)$ è un gruppo banale, allora tutti i cammini chiusi in U con base a sono tra loro omotopi in quanto $\pi_1(U, a)$ possiede un'unica classe di equivalenza rispetto alla relazione di omotopia tra cammini. In particolare, ciascun cammino chiuso in U è omotopo a un punto di U.

3.6 Esistenza di una primitiva globale e definizione del logaritmo

74. Si osservi che z_0 e w_0 non sono elementi arbitrari, bensì fissati preliminarmente per definire $\log z$.

3.7 La formula integrale di Cauchy

75. Qui applichiamo il teorema di invarianza omotopica alla funzione $1/(z - z_0)$. È del tutto evidente che è lecito farlo perché tale funzione, come g, è olomorfa in quanto quoziente di funzioni olomorfe.

76. Poiché questo è un passaggio delicato, vogliamo giustificarlo più dettagliatamente. Nell'enunciato del teorema 2.4, prendiamo $a_n := 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e, tenendo a mente che z è fissato, definiamo:

$$R := \frac{|z - z_0|}{|\xi - z_0|}$$

Sotto queste ipotesi, il teorema ci garantisce che la serie di termine generale w^n è assolutamente e uniformemente convergente per ogni $w \in \mathbb{C}$ con $|w| \leq R$. Ma allora è uniformemente convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\Big)^n$$

77. Si noti che qui stiamo utilizzando la seguente proprietà del limite superiore: date due successioni limitate $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ a valori reali, se $x_n \le y_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande, allora si ha:

$$\limsup x_n \le \limsup y_n$$

Nel dare una dimostrazione di questo fatto, useremo la definizione di limite superiore che abbiamo fornito nella nota 16. Definiamo $x := \limsup x_n$, $y := \limsup y_n$. Ricordiamo dalla nota 16 che x è un punto di accumulazione per $\{x_n\}$ e dunque possiamo costruire una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$ convergente a x selezionando, per ogni $k \in \mathbb{N}$, un elemento $n_k \in \mathbb{N}$ tale che $|x - x_{n_k}| < 1/k$. Fissato ora $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccolo, per quanto appena detto esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $k \ge k_0$, si abbia $|x - x_{n_k}| < \varepsilon$ e in particolare $x - \varepsilon < x_{n_k}$. Per ipotesi, esiste inoltre $k_1 \in \mathbb{N}$ tale che $x_{n_k} \le y_{n_k}$ per ogni $k \ge k_1$ e dunque, per $k \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande, si trova la condizione:

$$x - \varepsilon < x_{n_k} \le y_{n_k}$$

Ora, poiché $\{y_{n_k}\}$ è una sottosuccessione di una successione limitata, è essa stessa una successione limitata e posso dunque servirmi del teorema di Bolzano-Weierstrass (si rimanda alla nota 4 a piè di pagina) per estrarre una sottosuccessione di $\{y_{n_k}\}$ convergente a un qualche $L \in \mathbb{R}$. Un tale L è, in particolare, un punto di accumulazione per la successione $\{y_n\}$ e quindi per definizione di y vale:

$$x - \varepsilon \le L \le y$$

Dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ discende precisamente la disuguaglianza $x \le y$ che volevamo dimostrare.

78. Possiamo giustificare il fatto che $\cos z$ e $\sin z$ non siano limitate in $\mathbb{C}$ senza passare per il teorema di Liouville. Lo facciamo soltanto per la funzione $\cos z$, perché per $\sin z$ si usa un argomento analogo. Ricordiamo la formula:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Per $z = iy$ con $y \in \mathbb{R}$, vale:

$$|\cos iy| = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} \ge \frac{e^y}{2}$$

Possiamo affermare che $\cos z$ è illimitata grazie alla relazione, fornitaci dal teorema del confronto:

$$\lim_{y \to +\infty} |\cos iy| = +\infty$$

La definizione di limite ci garantisce infatti che, comunque assegnato un raggio $R > 0$, esista $S > 0$ sufficientemente grande tale che $|\cos z| \ge R$ quando $z \in \mathbb{C}$ viene scelto con $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$ e $|y| \ge S$.

4 Formula globale di Cauchy

4.1 L'indice di una curva chiusa

79. Nel corso GE220 si era anche dimostrato che, dato uno spazio topologico X, se due punti $a, b \in X$ sono connessi per archi in X, allora $\pi_1(X, a) \cong \pi_1(X, b)$. Dunque, se X è connesso per archi, come nel caso di $S^1 \subseteq \mathbb{C}$, non vi è ambiguità nel denotare con $\pi_1(X)$ il suo primo gruppo fondamentale.

80. Per giustificare questa affermazione, dobbiamo servirci del seguente risultato generale: se $[S^1, X]$ è l'insieme delle classi di omotopia libera di cammini chiusi in X, cioè che non impone condizioni sui punti base dei cappi e se X è connesso per archi, esiste una corrispondenza biunivoca tra $[S^1, X]$ e l'insieme delle classi di coniugio in $\pi_1(X)$. La notazione $[S^1, X]$ è giustificata in quanto un cappio in X può essere visto, anziché come una mappa continua $f\colon [0,1] \to X$ tale che $f(0) = f(1)$, come una funzione continua $f\colon S^1 \to X$. Si ricordi infatti che vi è un omeomorfismo $S^1 \approx [0,1]/\{0,1\}$.

Consideriamo allora un qualunque punto $x_0 \in X$ e la mappa $\Phi\colon \pi_1(X, x_0) \to [S^1, X]$ che manda la classe di omotopia di un cappio in X con punto base x_0 nella classe di omotopia libera dello stesso cappio. Facciamo vedere che Φ è suriettiva e che, dati due cappi f e g in X con punto base x_0, si ha $\Phi([f]) = \Phi([g])$ se e solo se le classi di omotopia $[f]$ e $[g]$ sono coniugate in $\pi_1(X, x_0)$. Notiamo che la scrittura $\Phi([f]) = \Phi([g])$ ci dice che esiste un'omotopia libera, cioè che non preserva i punti base, tra f e g. Una volta fatto questo, la corrispondenza biunivoca cercata discende in modo naturale dalla proprietà universale delle relazioni di equivalenza applicata alla relazione di coniugio che, per quanto visto nell'osservazione 2.4 nelle dispense del corso AL210, è effettivamente una relazione di equivalenza. Tale risultato è un indebolimento della proprietà universale delle congruenze (si veda la proposizione 4.4 nelle dispense del corso AL210) e ne riportiamo di seguito l'enunciato: dati due insiemi X e Y, una relazione di equivalenza $\sim$ su X e una funzione $\sim$-invariante $f\colon X \to Y$, cioè tale che $f(a) = f(b)$ per ogni $a, b \in X$ con $a \sim b$, vi è un'unica applicazione $\tilde{f}\colon X/\!\sim\, \to Y$ tale che si abbia $f = \tilde{f} \circ q$, dove $q\colon X \to X/\!\sim$ denota la mappa quoziente. Nel nostro caso particolare, tale funzione $\tilde{f}$ è biiettiva come immediata conseguenza delle due proprietà che andremo a dimostrare.

Per mostrare che Φ è suriettiva, consideriamo una classe di omotopia libera $[\phi]$ in $[S^1, X]$ e un suo rappresentante f, che è un cappio con base un qualche punto $x_1 \in X$. Poiché si assume che X sia connesso per archi, esiste un cammino γ da x_1 a x_0 e possiamo considerare il cappio $\gamma^{-1} * f * \gamma$, dove $*$ denota l'operazione di giustapposizione di cammini, con punto base x_0. Osserviamo allora che si può costruire un'omotopia libera tra $\gamma^{-1} * f * \gamma$ e f spostando in maniera continua il punto base del cappio da x_0 a x_1 lungo il cammino γ. Ne deduciamo quindi che Φ è suriettiva in quanto:

$$\Phi([\gamma^{-1} * f * \gamma]) = [\phi]$$

Adesso, se due classi di omotopia $[f]$ e $[g]$ sono coniugate in $\pi_1(X, x_0)$, ovvero se $[g] = [h^{-1} * f * h]$ per qualche cappio h in X con punto base x_0 allora, per le stesse motivazioni date prima, abbiamo:

$$\Phi([g]) = \Phi([h^{-1} * f * h]) = \Phi([f])$$

Infine, dati due cappi f e g in X con punto base x_0, l'identità $\Phi([f]) = \Phi([g])$ implica l'esistenza di un'omotopia libera $F\colon [0,1] \times [0,1] \to X$ tra f e g, cioè di una funzione continua tale che $H_0 = f$, $H_1 = g$ e tale che H_s sia un cammino chiuso per ogni $s \in [0,1]$. Sia adesso $\gamma\colon [0,1] \to X$ la mappa data da $\gamma(s) := H_s(0)$. Dal momento che $H_0(0) = f(0) = x_0$, $H_1(0) = g(0) = x_0$, la curva γ è un cappio in X con punto base x_0. Da un caso particolare di un risultato noto del corso GE220 segue quindi che $[g] = [\gamma^{-1} * f * \gamma]$ cioè, per quanto detto su γ, che $[f]$ e $[g]$ sono coniugate in $\pi_1(X, x_0)$.

Il risultato che abbiamo appena dimostrato ci dice quindi che, se esiste un'omotopia libera tra due cammini chiusi allora, per iniettività di Φ, essi sono omotopi, cioè esiste un'omotopia che preserva il punto base.

81. Un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ costituito da almeno due elementi, cioè un sottoinsieme $A \cup \{n\} \subseteq \mathbb{Z}$ con A non vuoto e $n \notin A$ è banalmente sconnesso in quanto $A, \{n\} \subseteq \mathbb{Z}$ sono aperti non vuoti disgiunti.

82. Ciò che ci consente di scambiare l'ordine degli integrali è l'analogo complesso del teorema di Fubini (teorema 1.1 nelle dispense del corso AM220). Si osservi infatti che ∂R e γ sono due sottoinsiemi compatti di $\mathbb{C}$, che come ben noto è isometrico a $\mathbb{R}^2$ e quindi, nell'enunciato del teorema, possiamo scegliere come insieme normale B un rettangolo standard contenente sia ∂R che γ e, come funzione integranda, la funzione $g(z, w)\chi_{\partial R}(z)\chi_\gamma(w)$, dove χ_A è la funzione caratteristica di un insieme non vuoto A.