Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica

Analisi matematica 4

- MAT/05 AM220 -

Raffaele Di Donna
Matricola: 523997

Indice

1 Integrale di Riemann in $\mathbb{R}^n$

1.1 Concetti di base

Definizione 1.1. Il prodotto cartesiano di n intervalli $I_1, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R}$ si dice un *rettangolo di* $\mathbb{R}^n$. Inoltre, un rettangolo $E = I_1 \times \cdots \times I_n$ di $\mathbb{R}^n$ si dice *degenere* se I_i è degenere per qualche $1 \le i \le n$. Infine, un *rettangolo standard di* $\mathbb{R}^n$ è un rettangolo chiuso, limitato e non degenere, cioè un insieme della forma

$$E := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n], \quad \text{con} \quad -\infty < a_i < b_i < +\infty$$

Esempio 1.1. I seguenti insiemi sono esempi in $\mathbb{R}^2$ di rettangolo non chiuso e non limitato, di rettangolo degenere e di rettangolo standard rispettivamente:

$$\begin{aligned} [-\pi, \pi) \times (-1, +\infty) &:= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\pi \le x < \pi,\ y > -1 \right\} \\ [0, 1] \times \{3\} &:= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le 1,\ y = 3 \right\} \\ [0, 1]^2 := [0, 1] \times [0, 1] &:= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x, y \le 1 \right\} \end{aligned}$$

Definizione 1.2. Sia $E = I_1 \times \cdots \times I_n$ un rettangolo limitato di $\mathbb{R}^n$. Il prodotto delle lunghezze degli intervalli $I_1, \dots, I_n$ si dice la *misura* (n*-dimensionale*) *di* E. In altre parole, se $a_i \le b_i$ sono gli estremi dell'intervallo I_i per ogni $1 \le i \le n$, la misura di E è il numero reale $\operatorname{mis} E := (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$.

Definizione 1.3. Sia $E = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ un rettangolo standard di $\mathbb{R}^n$. Una *partizione di* E è una n-upla $P := (P_1, \dots, P_n)$ tale che P_i sia una collezione finita di punti distinti di $[a_i, b_i]$ contenente gli estremi a_i e b_i per ogni $1 \le i \le n$, cioè

$$P_i = \left\{ \xi_0^{(i)} = a_i < \xi_1^{(i)} < \cdots < \xi_{N_i}^{(i)} = b_i \right\} \tag{1}$$

Definizione 1.4. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard e sia $P = (P_1, \dots, P_n)$ una partizione di E. Un *rettangolo di* P è un rettangolo chiuso di $\mathbb{R}^n$ ottenuto come prodotto cartesiano di intervalli $I_1, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R}$ tali che gli estremi di I_i siano due punti consecutivi di P_i per ogni $1 \le i \le n$. In altre parole, se si assume la condizione (1) i rettangoli di P sono, al variare degli indici $1 \le j_1 \le N_1, \dots, 1 \le j_n \le N_n$, gli $N_1 \cdots N_n$ rettangoli standard di $\mathbb{R}^n$ della forma

$$R_j := R_{(j_1, \dots, j_n)} := [\xi_{j_1 - 1}^{(1)}, \xi_{j_1}^{(1)}] \times \cdots \times [\xi_{j_n - 1}^{(n)}, \xi_{j_n}^{(n)}]$$

L'insieme dei rettangoli di una partizione P del rettangolo E si denota $\mathcal{R}(P)$.

Definizione 1.5. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard e sia P una partizione di E. Una famiglia $\widehat{\mathcal{R}}(P)$ di rettangoli di $\mathbb{R}^n$ a due a due disgiunti si dice un *ricoprimento disgiunto di* E se $\overline{R} \in \mathcal{R}(P)$ per ogni $R \in \widehat{\mathcal{R}}(P)$ e se $\bigcup_{R \in \widehat{\mathcal{R}}(P)} R = E$. Inoltre, se si assume la condizione (1), l'insieme $\widehat{\mathcal{R}}(P) = \{R_j\}$ con

$$R_j = [\xi_{j_1 - 1}^{(1)}, \xi_{j_1}^{(1)}) \times \cdots \times [\xi_{j_n - 1}^{(n)}, \xi_{j_n}^{(n)})$$

dove l'intervallo $[\xi_{j_i - 1}^{(i)}, \xi_{j_i}^{(i)})$ viene sostituito con $[\xi_{N_i - 1}^{(i)}, \xi_{N_i}^{(i)}]$ per ogni indice $1 \le i \le n$ tale che $j_i = N_i$, si dice il *ricoprimento standard di* E.

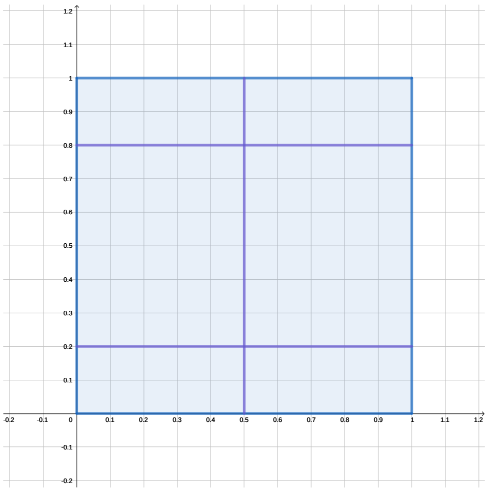
Osservazione 1.1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard e sia P una partizione di E. Si può dimostrare che

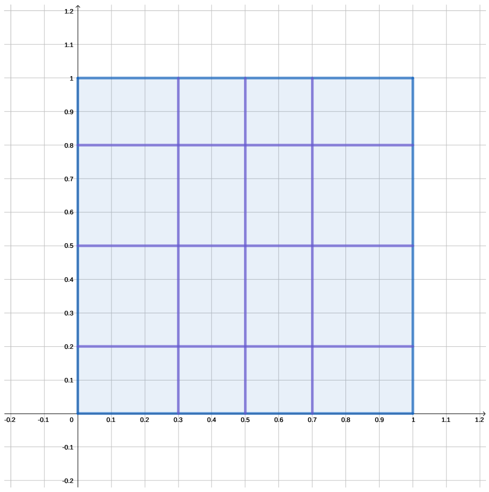
$$\sum_{R \in \mathcal{R}(P)} \operatorname{mis} R = \operatorname{mis} E$$

Definizione 1.6. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme non vuoto. Il *diametro di* A (*rispetto alla norma euclidea*) è la quantità $\operatorname{diam} A := \sup_{x, y \in A} \|x - y\|$. Siano ora $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard, P una partizione di E. Il *diametro di* P è la quantità $\operatorname{diam} P := \sup_{R \in \mathcal{R}(P)} \operatorname{diam} R$.

Definizione 1.7. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard e siano $P = (P_1, \dots, P_n)$, $P' = (P_1', \dots, P_n')$ due partizioni di E. Si dice che P' *è un raffinamento di* P e si denota $P \subseteq P'$ se $P_i \subseteq P_i'$ per ogni $1 \le i \le n$.

Osservazione 1.2. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard e siano P, P' due partizioni di E tali che $P \subseteq P'$. Dalla definizione 1.7 segue immediatamente che ogni rettangolo R' di P' è interamente contenuto in un rettangolo R di P e ogni rettangolo R di P è dato dall'unione di tutti i rettangoli di P' contenuti in R.





Definizione 1.8. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard e siano $P' = (P'_1, \dots, P'_n)$, $P'' = (P''_1, \dots, P''_n)$ due partizioni di E. La partizione $P = (P_1, \dots, P_n)$ tale che $P_i = P'_i \cup P''_i$ per ogni $1 \leq i \leq n$ viene detta la *partizione unione di* P' *e* P'' e si denota $P' \cup P''$.

Osservazione 1.3. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard e siano $P' = (P'_1, \dots, P'_n)$, $P'' = (P''_1, \dots, P''_n)$ due partizioni di E. Dalla definizione 1.7 segue banalmente che $P' \subseteq P' \cup P''$ e $P'' \subseteq P' \cup P''$.

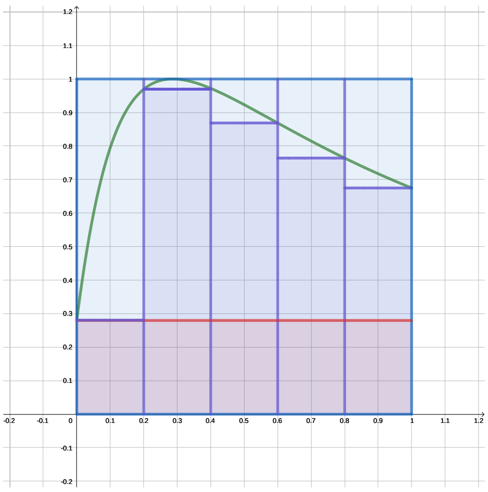
Definizione 1.9. Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard, P una partizione di E, $f\colon E \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Si dicono rispettivamente *somma inferiore* e *somma superiore di* f *su* E *rispetto a* P le quantità

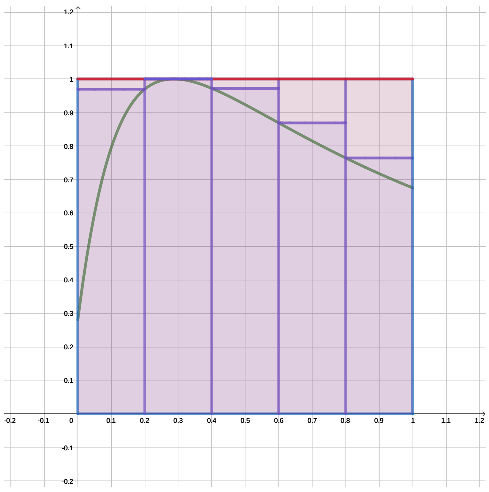
$$\underline{S}_E(f, P) := \sum_{R \in \mathcal{R}(P)} \big(\inf_{x \in R} f(x)\big) \operatorname{mis} R$$

$$\overline{S}_E(f, P) := \sum_{R \in \mathcal{R}(P)} \big(\sup_{x \in R} f(x)\big) \operatorname{mis} R$$

Osservazione 1.4. Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard, P, P' due partizioni di E tali che $P \subseteq P'$ e sia $f\colon E \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Dall'osservazione 1.1 segue immediatamente che

$$-\infty < \big(\inf_{x \in E} f(x)\big) \operatorname{mis} E \leq \underline{S}_E(f, P) \leq \underline{S}_E(f, P') \leq \overline{S}_E(f, P') \leq \overline{S}_E(f, P) \leq \big(\sup_{x \in E} f(x)\big) \operatorname{mis} E < +\infty$$





In particolare, l'insieme delle somme inferiori di f su E è limitato superiormente da una qualsiasi somma superiore di f su E, mentre l'insieme delle somme superiori di f su E è limitato inferiormente da una qualunque somma inferiore di f su E.

Definizione 1.10. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard e sia $f\colon E \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Si dicono rispettivamente *integrale inferiore* e *integrale superiore di Riemann di f su E* i numeri reali

$$\underline{\sigma}_E(f) := \sup_{P \text{ partizione di } E} \underline{S}_E(f, P)$$
$$\overline{\sigma}_E(f) := \inf_{P \text{ partizione di } E} \overline{S}_E(f, P)$$

La definizione 1.10 è ben posta in virtù dell'osservazione 1.4.

Osservazione 1.5. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard e sia $f\colon E \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Si ricava facilmente dall'osservazione 1.4 che $-\infty < \underline{\sigma}_E(f) \leq \overline{\sigma}_E(f) < +\infty$.

Definizione 1.11. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard e sia $f\colon E \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Si dice che f è *integrabile secondo Riemann su E* se $\underline{\sigma}_E(f) = \overline{\sigma}_E(f)$. In caso affermativo, tale valore comune viene chiamato l'*integrale di Riemann di f su E* e si denota $\int_E f$, $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x$ oppure $\int_E f(x)\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$.

Esempio 1.2. Sia $E = [0, 1]^2$ un rettangolo standard di $\mathbb{R}^2$. La funzione $f\colon E \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_1 \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x_1 \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

non è integrabile secondo Riemann su E. Infatti, scelta una partizione P di E arbitrariamente fine, varrà che $\inf_{x \in R} f(x) = 0$, $\sup_{x \in R} f(x) = 1$ per ogni $R \in \mathcal{R}(P)$ per densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ e di conseguenza, in virtù dell'osservazione 1.1, si ha la relazione

$$\underline{S}_E(f, P) = \sum_{R \in \mathcal{R}(P)} 0 \cdot \operatorname{mis} R = 0 \neq 1 = \operatorname{mis} E = \sum_{R \in \mathcal{R}(P)} \operatorname{mis} R = \overline{S}_E(f, P)$$

Definizione 1.12. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $B \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme tale che $A \cap B \neq \varnothing$. Si dice l'*oscillazione di f su B* la quantità

$$\operatorname{osc}(f, B) := \sup_{x \in A \cap B} f(x) - \inf_{x \in A \cap B} f(x)$$

Osservazione 1.6. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $B \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme tale che $A \cap B \neq \varnothing$. Allora $\operatorname{osc}(f, B) = \sup_{x,y \in A \cap B} |f(x) - f(y)|$.

Proposizione 1.1. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard e sia $f\colon E \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora f è integrabile su E se e solo se vale la seguente condizione:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, P \textit{ partizione di } E \;\;\Big|\;\; \overline{S}_E(f, P) - \underline{S}_E(f, P) = \sum_{R \in \mathcal{R}(P)} \operatorname{osc}(f, R) \operatorname{mis}(R) < \varepsilon$$

1.2 La misura degli insiemi

Definizione 1.13. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme non vuoto. Si dice la *funzione caratteristica di A* (o *funzione indicatrice di A*) la funzione $\chi_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita dalla relazione

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Osservazione 1.7. Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard, P una partizione di E e sia $B \subseteq E$ un insieme. La funzione caratteristica di B è limitata, dunque le somme inferiore e superiore di χ_B su E rispetto alla partizione P sono ben definite e inoltre si verifica facilmente che valgono le seguenti identità:

$$\underline{S}_E(\chi_B, P) = \sum_{R \in \mathcal{R}(P)} \big(\inf_{x \in R} \chi_B(x)\big) \operatorname{mis} R = \sum_{\substack{R \in \mathcal{R}(P) \\ R \subseteq B}} \operatorname{mis} R$$
$$\overline{S}_E(\chi_B, P) = \sum_{R \in \mathcal{R}(P)} \big(\sup_{x \in R} \chi_B(x)\big) \operatorname{mis} R = \sum_{\substack{R \in \mathcal{R}(P) \\ R \cap B \neq \varnothing}} \operatorname{mis} R$$

Definizione 1.14. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard e sia $B \subseteq E$ un insieme. Si dicono, rispettivamente, la *misura interna* e la *misura esterna secondo Peano-Jordan di* B le quantità

$$\begin{aligned} \operatorname{mis\,int} B &:= \underline{\sigma}_E(\chi_B) \\ \operatorname{mis\,est} B &:= \overline{\sigma}_E(\chi_B) \end{aligned}$$

La definizione 1.14 è ben posta perché, essendo la funzione caratteristica di B limitata, gli integrali inferiore e superiore di χ_B su E sono ben definiti.

Osservazione 1.8. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard e sia $B \subseteq E$ un insieme. Si ricava facilmente dalle osservazioni 1.1 e 1.5 che $0 \leq \operatorname{mis\,int} B \leq \operatorname{mis\,est} B \leq \operatorname{mis} E$.

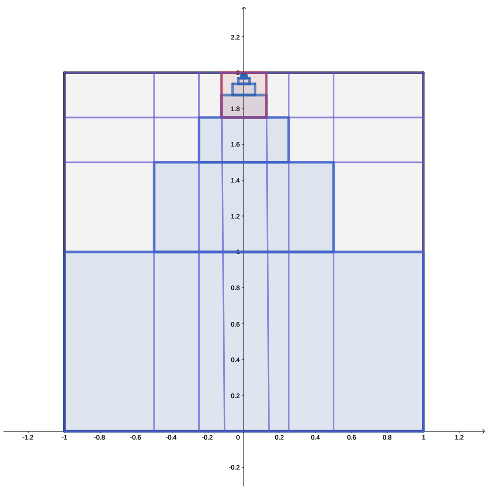
Definizione 1.15. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard. Un insieme $B \subseteq E$ si dice *misurabile secondo Peano-Jordan* se $\operatorname{mis\,int} B = \operatorname{mis\,est} B$ oppure, equivalentemente, se la funzione χ_B è integrabile su E. In caso affermativo tale valore comune, cioè $\int_E \chi_B$, si dice la *misura di Peano-Jordan di* B e si denota $\operatorname{mis} B$.

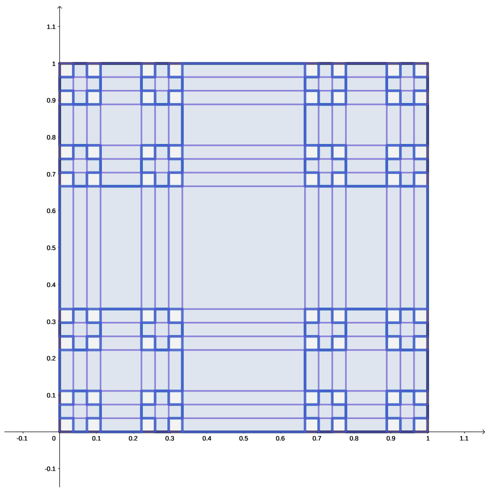
Osservazione 1.9. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard e sia $B \subseteq E$ un insieme. Dalla definizione 1.15, dalla proposizione 1.1 e dall'osservazione 1.7 segue immediatamente che B è misurabile se e solo se

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, P \text{ partizione di } E \;\; \Bigg| \;\; \sum_{\substack{R \in \mathcal{R}(P) \\ R \cap B \neq \varnothing \text{ e } R \not\subseteq B}} \operatorname{mis} R < \varepsilon \tag{2}$$

Esempio 1.3. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard. Generalizzando l'esempio 1.2 si ricava facilmente che l'insieme $\mathbb{Q}^n \cap E$ non è misurabile, in quanto la funzione caratteristica di $\mathbb{Q}^n$ non è integrabile su E.

Esempio 1.4. Si considerino le seguenti figure





Fissato $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccolo, dimostro che i due insiemi rappresentati sono misurabili. La prima figura è costituita da una serie infinita di rettangoli tale che, a partire dal rettangolo di base, le lunghezze del rettangolo successivo vengano dimezzate a ogni passo. Suppongo che il primo rettangolo abbia per base l'intervallo $[-1, 1]$ e altezza di lunghezza 1. L'altezza complessiva della figura è data da[1]

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

[1] Si ricorda che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$, detta la *serie geometrica di ragione* x, soddisfa le seguenti proprietà:

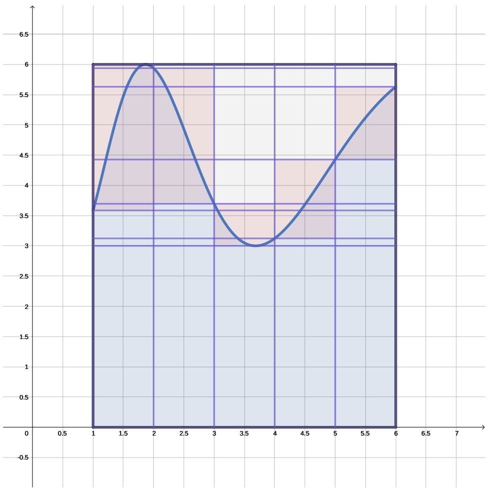
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \frac{x^{n+1}-1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ n+1 & \text{se } x = 1 \end{cases}, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{se } |x| < 1 \;\; \text{(la serie converge)} \\ +\infty & \text{se } x \geq 1 \;\; \text{(la serie diverge)} \\ \nexists & \text{se } x \leq -1 \;\; \text{(la serie è irregolare)} \end{cases}$$

Ora osservo che, nella figura, la parte sovrastante il rettangolo di base 2^{-k} e altezza 2^{-k-1} è interamente contenuta in un rettangolo di base 2^{-k} e altezza $2 - 2^0 - 2^{-1} - \cdots - 2^{-k-1}$. Per un qualche valore $h \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande, l'area di tale rettangolo è più piccola di ε. Ma allora basta definire

$$P_1 := \{ -2^0 < -2^{-1} < \cdots < -2^{-h} < 2^{-h} < \cdots < 2^{-1} < 2^0 \}$$
$$P_2 := \{ 0 < 2^0 < 2^0 + 2^{-1} < 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} < \cdots < \textstyle\sum_{k=0}^{h} 2^{-k} < 2 \}$$

Infatti, la partizione $P := (P_1, P_2)$ di E è tale che valga la relazione (2). La seconda figura è costituita, invece, da una progressione infinita di croci tale che, a partire dalla croce principale, le lunghezze della croce successiva si riducano di un terzo a ogni passo. In questo caso bisogna osservare che al passo 1 del procedimento iterativo le zone non occupate dalla figura sono i quattro quadrati negli angoli di lato $\frac{1}{3}$, al passo 2 sono sedici quadrati di lato $\frac{1}{9}$ e così via. In generale, al passo k la zona non occupata dalla figura ha area $(\frac{4}{9})^k$ e quindi, per un qualche valore $h \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande, tale valore è più piccolo di ε. A questo punto basta definire in modo opportuno P_1 e P_2 per ottenere una partizione $P := (P_1, P_2)$ di E che verifica la condizione (2).

Osservazione 1.10. Sia $I = [a, b]$ un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile su I. Allora l'insieme $B := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x) \}$ è misurabile.



Dimostrazione. Innanzitutto, osservo che f è limitata su I perché integrabile per ipotesi. Definisco quindi $M := \sup_{x \in I} f(x)$ e considero il rettangolo standard $E := I \times [0, M]$ di $\mathbb{R}^2$. Dall'ipotesi di integrabilità di f su I segue che, fissato $\varepsilon > 0$, esiste una partizione P_1 di I tale che $\overline{S}_I(f, P) - \underline{S}_I(f, P) < \varepsilon$. Posso ovviamente supporre che $P_1 = \{ \xi_0 = a < \xi_1 < \cdots < \xi_N = b \}$. Pongo $I_j := [\xi_{j-1}, \xi_j]$ per ogni $1 \le j \le N$ e definisco

$$P_2 := \left\{ \inf_{x \in I_j} f(x),\ \sup_{x \in I_j} f(x) \;\middle|\; 1 \le j \le N \right\}$$

Ma allora, ricordando la definizione di misura di un rettangolo (definizione 1.2), si può concludere che B è un insieme misurabile perché la partizione $P := (P_1, P_2)$ di E soddisfa la relazione

$$\sum_{\substack{R \in \mathcal{R}(P) \\ R \cap B \neq \varnothing \text{ e } R \not\subseteq B}} \operatorname{mis} R = \sum_{1 \le j \le N} \Big(\sup_{x \in I_j} f(x) - \inf_{x \in I_j} f(x) \Big)(\xi_j - \xi_{j-1}) = \overline{S}_I(f, P) - \underline{S}_I(f, P) < \varepsilon \qquad \square$$

Definizione 1.16. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard e sia $B \subseteq E$ un insieme. Una funzione $f\colon E \to \mathbb{R}$ si dice *integrabile secondo Riemann su* B se la funzione $f\chi_B$ è integrabile secondo Riemann su E. In tal caso, l'*integrale di Riemann di* f *su* B è l'integrale di Riemann di $f\chi_B$ su E, cioè $\int_B f := \int_E f\chi_B$.

Definizione 1.17. Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard, P una partizione di E e sia $B \subseteq E$ un insieme. Una *scelta di punti di* B *associati alla partizione* P è un insieme della forma

$$Q := \{ x_R \in R \cap B \mid R \in \mathcal{R}(P) \}$$

Inoltre, data una funzione limitata $f\colon E \to \mathbb{R}$, si dice la *somma parziale di Riemann di f su B relativa alla partizione P e alla scelta di punti Q* il numero reale

$$S_B(f,P,Q) := \sum_{R\in\mathcal{R}(P)} f(x_R)\,\mathrm{mis}\,R$$

Proposizione 1.2. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard e sia $B \subseteq E$ un insieme. Allora, se $f\colon E\to\mathbb{R}$ è una funzione integrabile secondo Riemann su B, vale che*

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,P \text{ partizione di } E \ \left|\ \left|\int_B f(x)\,\mathrm{d}x - S_B(f,P,Q)\right| < \varepsilon \ \ \forall\,Q \text{ scelta di punti di } B \text{ relativa a } P\right.$$

Proposizione 1.3. *Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard e siano $f,g\colon E\to\mathbb{R}$ due funzioni.*

(i) *Se f,g sono integrabili su E, allora $\forall\,a,b\in\mathbb{R}$ la funzione $af+bg$ è integrabile su E e vale che*

$$\int_E (af+bg) = a\int_E f + b\int_E g$$

(ii) *Se f,g sono integrabili su E, allora la funzione fg è integrabile su E.*

(iii) *Se f è una funzione non negativa e integrabile su E, allora $\int_E f \geq 0$.*

(iv) *Se f,g sono integrabili su E e $f\geq g$, allora $\int_E f \geq \int_E g$.*

(v) *La funzione f è integrabile su E se e solo se*[2] *f_+ e f_- sono integrabili su E.*

(vi) *Se f è integrabile su E, allora $|f|$ è integrabile su E e $|\int_E f| \leq \int_E |f|$.*

Osservazione 1.11. Siano $E\subseteq\mathbb{R}^n$ un rettangolo standard, $B\subseteq E$ un insieme misurabile e sia $f\colon E\to\mathbb{R}$ una funzione. Dalla proposizione 1.3-(ii) e dalla definizione 1.15 segue immediatamente che f è integrabile secondo Riemann su B se f è integrabile secondo Riemann su E.

Proposizione 1.4. *Sia $E\subseteq\mathbb{R}^n$ un rettangolo standard e siano $A,B\subseteq E$ insiemi misurabili.*

(i) *Gli insiemi $A\cap B$ e $A\cup B$ sono misurabili.*

(ii) $\mathrm{mis}(A\cup B) \leq \mathrm{mis}\,A + \mathrm{mis}\,B$ *e inoltre, se* $\mathrm{mis}(A\cap B)=0$, *allora* $\mathrm{mis}(A\cup B) = \mathrm{mis}\,A+\mathrm{mis}\,B$.

(iii) *Se $A\subseteq B$, allora* $\mathrm{mis}(B\setminus A) = \mathrm{mis}\,B - \mathrm{mis}\,A$.

(iv) *Se $f\colon E\to\mathbb{R}$ è una funzione integrabile secondo Riemann su A e su B, allora f è integrabile anche su $A\cup B$ e inoltre, se* $\mathrm{mis}(A\cap B)=0$, *allora* $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$.

Osservazione 1.12. Sia $E\subseteq\mathbb{R}^n$ un rettangolo standard e sia $\{A_i\}$ una collezione arbitraria, indicizzata su un insieme I, di sottoinsiemi misurabili di E. Allora non è detto che $\bigcup_{i\in I} A_i$ sia un insieme misurabile, come mostra il seguente controesempio. Dalla numerabilità dei numeri razionali segue che posso definire $A_i := \{q_i\}$ con $q_i\in\mathbb{Q}^n\cap E$ al variare dell'indice $i\in\mathbb{N}$. Evidentemente A_i è misurabile per ogni $i\in\mathbb{N}$, ma $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \mathbb{Q}^n\cap E$ non è un insieme misurabile come si è visto nell'esempio 1.3.

Definizione 1.18. Sia $E\subseteq\mathbb{R}^n$ un rettangolo standard. Un insieme $R\subseteq E$ si dice *elementare* se esistono rettangoli chiusi $R_1,\ldots,R_n\subseteq E$ tali che $\bigcup_{i=1}^n R_i = R$ e $\mathring{R}_i\cap\mathring{R}_j = \varnothing$ per ogni $1\leq i\neq j\leq n$.

Osservazione 1.13. Sia $E\subseteq\mathbb{R}^n$ un rettangolo standard e sia P una partizione di E. Dalla definizone 1.18 segue facilmente che l'unione di una qualsiasi sottofamiglia di rettangoli in $\mathcal{R}(P)$ è un insieme elementare.

Proposizione 1.5. *Sia $E\subseteq\mathbb{R}^n$ un rettangolo standard e sia $B\subseteq E$ un insieme.*

[2] Data una funzione $f\colon A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ si dicono, rispettivamente, *parte positiva* e *parte negativa di f* le funzioni

$$f_+(x) := \max\{f(x),0\}\,,\quad f_-(x) := -\min\{f(x),0\} = \max\{-f(x),0\}$$

Si noti che f_+ e f_- sono ambedue funzioni non negative e che $f = f_+ - f_-$ mentre $|f| = f_+ + f_-$.

(i) *L'insieme B è misurabile se e solo se*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, A, C \subseteq E \text{ insiemi misurabili } \;\Big|\; A \subseteq B \subseteq C \;\text{ e }\; \operatorname{mis} C - \operatorname{mis} A < \varepsilon$$

(ii) *L'insieme B è misurabile se e solo se*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, A, C \subseteq E \text{ insiemi elementari } \;\Big|\; A \subseteq B \subseteq C \;\text{ e }\; \operatorname{mis} C - \operatorname{mis} A < \varepsilon$$

(iii) *Se* $\operatorname{mis\,est} B = 0$*, allora B è misurabile e* $\operatorname{mis} B = 0$.

Proposizione 1.6. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard e sia $B \subseteq E$ un insieme.*

(i) *Se B è misurabile, allora lo sono anche $\overline{B}$, $\mathring{B}$, ∂B e inoltre* $\operatorname{mis} \overline{B} = \operatorname{mis} \mathring{B} = \operatorname{mis} B$.

(ii) *L'insieme B è misurabile se e solo se B è limitato, ∂B è misurabile e* $\operatorname{mis} \partial B = 0$.

Definizione 1.19. Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard, P una partizione di E, $\widehat{\mathcal{R}}(P)$ un ricoprimento disgiunto di E e sia $\{c_R\}$ una collezione di numeri reali. Una *funzione a scalini* è una funzione $s\colon E \to \mathbb{R}$ definita dalla relazione

$$s(x) = \sum_{R \in \widehat{\mathcal{R}}(P)} c_R \chi_R(x) \tag{3}$$

Proposizione 1.7. *Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard, P una partizione di E, $\widehat{\mathcal{R}}(P)$ un ricoprimento disgiunto di E, $\{c_R\}$ una collezione di numeri reali e sia $s\colon E \to \mathbb{R}$ la funzione a scalini definita dalla relazione (3). Valgono le seguenti affermazioni.*

(i) *La funzione s è integrabile e* $\int_E s = \sum_{R \in \widehat{\mathcal{R}}(P)} c_R \operatorname{mis} R$.

(ii) *Una funzione $f\colon E \to \mathbb{R}$ è integrabile su E se e solo se*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, s_1, s_2\colon E \to \mathbb{R} \text{ funzioni a scalini } \;\Bigg|\; s_1 \le f \le s_2 \;\text{ e }\; \int_E (s_2 - s_1) < \varepsilon$$

Inoltre, tali funzioni possono essere espresse in termini dello stesso ricoprimento disgiunto di E.

1.3 Integrali iterati

Il seguente risultato, di fondamentale importanza nella pratica, permette, sotto opportune ipotesi sul dominio di integrazione, di ridurre il calcolo dell'integrale di una funzione di n variabili al calcolo successivo di un integrale unidimensionale e dell'integrale di una funzione di $n-1$ variabili.

Teorema 1.1 (di Fubini)**.** *Siano $n \ge 2$, $E \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ un rettangolo standard, $A \subseteq E$ un insieme e siano $\alpha, \beta\colon E \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili su A tali che $\alpha(x) \le \beta(x)$ per ogni $x \in A$. Definisco*

$$B := \big\{\, (x, y) \in A \times \mathbb{R} \;\big|\; \alpha(x) \le y \le \beta(x) \,\big\} \tag{4}$$

Siano inoltre $a = \inf_{x \in A} \alpha(x)$, $b = \sup_{x \in A} \beta(x)$, $I = [a, b]$ un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia infine $E' = E \times I$ un rettangolo standard di $\mathbb{R}^n$. Allora valgono le seguenti affermazioni.

(i) *L'insieme B è misurabile e* $\operatorname{mis} B = \int_A \big(\beta(x) - \alpha(x)\big)\,\mathrm{d}x$.

(ii) *Se $f\colon E' \to \mathbb{R}$ è una funzione integrabile su B e la funzione $y \in I \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ è integrabile su $[\alpha(x), \beta(x)]$ per ogni $x \in A$, allora la funzione $g\colon E \to \mathbb{R}$ definita dalla relazione*

$$g(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y$$

è integrabile su A e inoltre

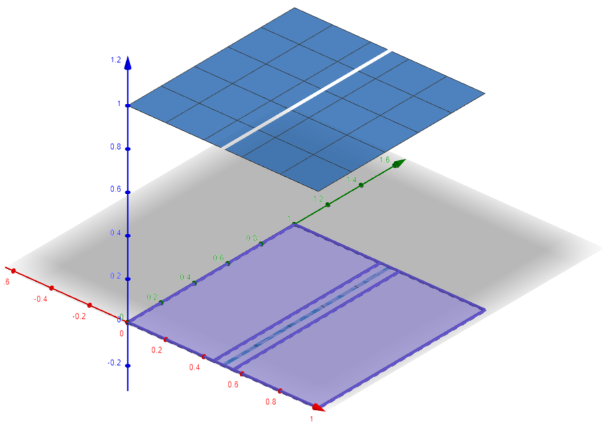
$$\int_B f = \int_A g = \int_A \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Definizione 1.20. Siano $n \geq 2$, $E \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ un rettangolo standard, $A \subseteq E$ un insieme, $\alpha, \beta\colon E \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili su A tali che $\alpha(x) \leq \beta(x)$ per ogni $x \in A$. Un insieme $B \subseteq \mathbb{R}^n$ della forma (4) si dice un *dominio normale rispetto all'asse delle y*.

Le seguenti osservazioni mostrano che le ipotesi del teorema di Fubini non possono essere indebolite.

Osservazione 1.14. Nel punto (ii) del teorema di Fubini l'ipotesi che la funzione $y \in I \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$ sia integrabile su $[\alpha(x), \beta(x)]$ per ogni $x \in A$ non può essere rimossa, come mostra il seguente controesempio. Definisco $E := I := [0,1]$, $E' := E \times I$, $B := E'$ e considero la funzione $f\colon E' \to \mathbb{R}$ definita dalla relazione

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = \frac{1}{2} \text{ e } y \notin \mathbb{Q} \text{ oppure se } x \neq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{se } x = \frac{1}{2} \text{ e } y \in \mathbb{Q} \end{cases}$$



Fissato $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccolo, definisco $P_1 := \left\{\, 0 < \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{4} < \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < 1 \,\right\}$, $P_2 := \{\, 0 < 1 \,\}$ e pongo $P := (P_1, P_2)$. Si verifica facilmente che $\overline{S}_{E'}(f,P) - \underline{S}_{E'}(f,P) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Posso dunque affermare che f è integrabile su B per la proposizione 1.1. Tuttavia, con un ragionamento del tutto analogo a quello visto nell'esempio 1.2 si dimostra che per $x = \frac{1}{2}$ la funzione $y \in I \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$ non è integrabile su nessun intervallo contenuto in I.

Osservazione 1.15. Nel punto (ii) del teorema di Fubini, anche assumendo l'integrabilità della funzione g su A, l'ipotesi che f sia integrabile su B non può essere rimossa, come mostra il seguente controesempio. Definisco $E := I := [0,1]$, $E' := E \times I$, $B := E'$ e considero la funzione $f\colon E' \to \mathbb{R}$ definita dalla relazione

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \\ 2y & \text{se } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

La funzione $y \in I \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$ coincide o con la funzione costante di valore 1 o con la funzione $2y$, che sono entrambe integrabili sull'intervallo I. Osservo inoltre che, comunque fissato $x \in E$, vale la relazione

$$\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y = 1$$

Di conseguenza, si ottiene anche che la funzione $g\colon E \to \mathbb{R}$ definita dalla relazione $g(x) := 1$ è integrabile su A. Tuttavia, f non è integrabile su E' in quanto si dimostra che $\underline{\sigma}_{E'}(f) = \frac{3}{4} \neq \frac{5}{4} = \overline{\sigma}_{E'}(f)$.

Esempio 1.5. In virtù del teorema di Fubini è possibile calcolare l'area di un cerchio in $\mathbb{R}^2$ e il volume di una sfera in $\mathbb{R}^3$. Ovviamente posso assumere, per semplicità, che tali figure geometriche abbiano centro nell'origine. Fissato $r > 0$, basta dunque calcolare i seguenti integrali:

$$\begin{aligned}\int_{x^2+y^2\le r^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-r}^{r}\Big(\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = 4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x = 4r\int_0^r \sqrt{1-\Big(\frac{x}{r}\Big)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 4r^2\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta + r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \pi r^2 + r^2\sin\pi = \pi r^2 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\int_{x^2+y^2+z^2\le r^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_{-r}^{r}\Big(\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\Big(\int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} \mathrm{d}z\Big)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{-r}^{r}\Big(\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= 4\int_{-r}^{r}\Big(\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{1-\Big(\frac{y}{\sqrt{r^2-x^2}}\Big)^2}\,\mathrm{d}y\Big)\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 4\int_{-r}^{r}\Big(\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t\Big)(r^2-x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{-r}^{r}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta\Big)(r^2-x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{-r}^{r}\Big(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi\Big)(r^2-x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi r^2\int_0^r \mathrm{d}x - 2\pi\int_0^r x^2\,\mathrm{d}x = 2\pi r^3 - 2\pi\frac{r^3}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned} \tag{6}$$

1.4 Cambiamenti di coordinate nell'integrazione

Proposizione 1.8. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard e sia $F\colon E \to \mathbb{R}^m$ una funzione uniformemente lipschitziana con costante di Lipschitz $L > 0$ rispetto alla norma ∞. Valgono le seguenti affermazioni.*

(i) *Se $B \subseteq E$ è un insieme misurabile, allora*[3] $\operatorname{mis\,est}_m F(B) \le L^m \operatorname{mis}_n B$.

(ii) *Se $Q \subseteq E$ è un insieme tale che $\operatorname{mis}_n Q = 0$, allora $\operatorname{mis}_m F(Q) = 0$.*

(iii) *Se $B \subseteq E$ è un insieme misurabile e $m > n$, allora $\operatorname{mis}_m F(B) = 0$.*

Osservazione 1.16. I punti (ii) e (iii) della proposizione 1.8 non valgono, in generale, se non si assume che F sia una funzione uniformemente lipschitziana. È possibile dimostrare, infatti, che esiste una funzione continua $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, detta *curva di Peano*, tale che $\varphi([0,1]) = [0,1]^2$. Ora se $I := [0,1] \times \{0\}$ denota il segmento unitario immerso in $\mathbb{R}^2$ e se $f\colon I \to \mathbb{R}^2$ è la funzione definita da $f(x,y) = \varphi(x)$, allora si ha che $\operatorname{mis}_2 I = 0$ ma $\operatorname{mis}_2 f(I) = \operatorname{mis}_2 [0,1]^2 = 1$.

Proposizione 1.9. *Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard, $B \subseteq E$ un insieme misurabile, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e sia $\tau\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la traslazione data dalla condizione $\tau(x) = x + x_0$. Allora $\tau(B)$ è misurabile e, se $f\colon E \to \mathbb{R}$ è una funzione integrabile su $\tau(B)$, allora $f \circ \tau$ è integrabile su B e vale che*

$$\int_{\tau(B)} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_B (f\circ\tau)(x)\,\mathrm{d}x$$

In particolare, prendendo f uguale alla funzione costante di valore 1, si ricava che $\operatorname{mis}\tau(B) = \operatorname{mis} B$.

Proposizione 1.10. *Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard, $B \subseteq E$ un insieme, $L \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ una matrice diagonale e sia $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la funzione definita dalla condizione $g(x) = Lx$. Se $f\colon E \to \mathbb{R}$ è una funzione integrabile su $g(B)$, allora $f \circ g$ è integrabile su B e vale che*

$$\int_{g(B)} f(y)\,\mathrm{d}y = \det L \int_B (f\circ g)(x)\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

[3] Utilizzo i pedici per distinguere le misure n-dimensionali da quelle m-dimensionali.

Dimostrazione. Sia P una partizione di E. Per ipotesi L è una matrice diagonale, quindi posso supporre che $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ siano gli autovalori di tale matrice e di conseguenza $g_i(x) = \lambda_i x_i$ per ogni $1 \leq i \leq n$. È dunque immediato verificare che, per ogni $R \in \mathcal{R}(P)$, si ha che $g(R)$ è un rettangolo misurabile e che $\operatorname{mis} g(R) = \det L \operatorname{mis} R$. Similmente, anche $g(E)$ è un rettangolo standard di $\mathbb{R}^n$. Ora noto che la famiglia dei rettangoli $\{g(R)\}$ definisce una partizione P' di $g(E)$ e, ponendo $E' := g(E)$, $B' := g(B)$, osservo che

$$\begin{aligned}\overline{S}_E((f \circ g)\chi_B, P) \det L &= \sum_{R \in \mathcal{R}(P)} \sup_{x \in R} f\big(g(x)\big)\chi_B(x) \det L \operatorname{mis} R \\ &= \sum_{R' \in \mathcal{R}(P')} \sup_{y \in R'} f(y)\chi_{B'}(y) \operatorname{mis} R' \\ &= \overline{S}_{E'}(f\chi_{B'}, P')\end{aligned}$$

Si applica un ragionamento del tutto analogo per le somme inferiori ma allora, prendendo in particolare l'estremo inferiore nella relazione precedente e l'estremo superiore nel caso analogo delle somme inferiori, si deduce che $f \circ g$ è integrabile su B perché f lo è su $g(B)$ per ipotesi e inoltre vale la relazione (7). □

Proposizione 1.11. *Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard, $B \subseteq E$ un insieme, $O \in \mathrm{O}(n)$ una matrice ortogonale e sia $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la funzione definita dalla relazione $g(x) = Ox$. Se $f\colon E \to \mathbb{R}$ è una funzione integrabile su $g(B)$, allora $f \circ g$ è integrabile su B e vale che*

$$\int_{g(B)} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_B (f \circ g)(x)\,\mathrm{d}x$$

Teorema 1.2. *Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un rettangolo standard, $A \subseteq E$ un aperto misurabile, $\phi \in \mathrm{C}^1(\overline{A}, \mathbb{R}^n)$ una funzione iniettiva su A tale che* $\det J_\phi(x) \neq 0$ *per ogni $x \in A$. Allora $\phi(A)$ è un aperto misurabile di $\mathbb{R}^n$. Inoltre, se $f\colon E \to \mathbb{R}$ è una funzione integrabile su $\phi(A)$, allora $f \circ \phi$ è integrabile su A e vale che*

$$\int_{\phi(A)} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_A (f \circ g)(x) |\det J_\phi(x)|\,\mathrm{d}x$$