Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica

Anelli di valutazione

- MAT/02 AL410 -

Raffaele Di Donna
Matricola: 523997

Indice

1 Introduzione: motivazione geometrica

La nozione algebrica di anello di valutazione ha delle conseguenze importanti in teoria dei numeri, geometria algebrica e geometria tropicale. Prima di vedere la definizione rigorosa, vorremmo fornire una motivazione geometrica. Consideriamo un anello locale regolare di dimensione 1: vedremo nel seguito che questo equivale a considerare ciò che chiameremo un *anello di valutazione discreta*. Questa è forse la struttura algebrica che si comporta meglio dopo quella di campo. Ricordiamo, con alcune definizioni, cosa significa che un anello è locale, regolare, di dimensione 1.

Definizione 1 (Anello locale)**.** Un anello A non nullo che ammette un unico ideale massimale $\mathfrak{m}$ si dice un *anello locale*. Il campo $A/\mathfrak{m}$ è detto *campo residuo di* A.

Definizione 2 (Dimensione)**.** Sia A un anello.

(a) La *codimensione* o *altezza* di un ideale primo P di A, che denoteremo $\operatorname{ht} P$, è la massima lunghezza di una catena di ideali primi di A del tipo:

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n = P$$

Se la lunghezza di catene siffatte non è limitata superiormente, poniamo $\operatorname{ht} P := \infty$.

(b) La *dimensione di Krull* o *dimensione* di A è definita da:

$$\dim A := \sup\{\operatorname{ht} P \colon P \text{ ideale primo di } A\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

(c) Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso. La *dimensione* di un insieme algebrico $X \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ è data dalla dimensione di Krull dell'anello delle coordinate di X, cioè:

$$\dim X := \dim \mathcal{A}(X)$$

Un insieme algebrico di dimensione 1 è detto una *curva*.

Per distinguere la dimensione di Krull di un anello da quella di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V, useremo sempre la notazione esplicita $\dim_{\mathbb{K}} V$ per indicare quest'ultima. Diamo adesso un'interpretazione geometrica della nozione di dimensione per giustificare l'assunzione che $\mathbb{K}$ sia un campo algebricamente chiuso nel punto (c) della definizione.

Osservazione 3 (Interpretazione geometrica della dimensione). Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ un insieme algebrico con $\mathbb{K}$ campo algebricamente chiuso. Come conseguenza del teorema degli zeri di Hilbert, si ha una corrispondenza biunivoca tra ideali primi di $\mathcal{A}(X)$ e sottovarietà di X, cioè sottoinsiemi algebrici irriducibili (e in particolare non vuoti) di X. Dato che questa corrispondenza rovescia le inclusioni, per il punto (c) della definizione di dimensione possiamo dire che $\dim X = n$ se e solo se n è la massima lunghezza di una catena di sottovarietà di X del tipo:

$$X_0 \supsetneq X_1 \supsetneq \cdots \supsetneq X_n$$

L'idea geometrica dietro questa definizione è dunque la seguente: rendere una sottovarietà di X più piccola è possibile solamente riducendone la dimensione e di conseguenza, in una catena massimale come sopra, si ha $\dim X_i = \dim X - i$ per ogni $i = 0, 1, \ldots, n$. In particolare, otteniamo che X_n è un punto, mentre X_0 è una componente irriducibile di X.

Nel seguito ci sarà utile la seguente osservazione.

Osservazione 4. Sia A un anello.

(a) Vale che $\dim A = 0$ se e solo se non vi sono inclusioni strette tra gli ideali primi di A, cioè se e solo se tutti gli ideali primi di A sono massimali. In particolare, se $\mathbb{K}$ è un campo, allora abbiamo $\dim \mathbb{K} = 0$.

(b) Sia A un dominio a ideali principali che non è un campo. Allora ogni ideale primo non banale di A è massimale, mentre l'ideale nullo è un ideale primo. Perciò le catene di ideali primi di A di lunghezza massima hanno la forma $0 \subsetneq P$ per qualche ideale massimale P di A. Ne deduciamo che $\dim A = 1$.

Ricordiamo anche il seguente risultato, la cui dimostrazione viene affrontata nel capitolo 11 del testo [3].

Lemma 5. *Sia A un anello noetheriano locale con ideale massimale $\mathfrak{m}$ e sia $\mathbb{K} = A/\mathfrak{m}$ il campo residuo di A.*

(i) *Vale che $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ è il minimo numero di generatori per l'ideale $\mathfrak{m}$.*

(ii) *Valgono le disuguaglianze $\dim A \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 < \infty$.*

Definizione 6 (Regolarità)**.**

(a) Sia A un anello locale con ideale massimale $\mathfrak{m}$ e sia $\mathbb{K} = A/\mathfrak{m}$ il campo residuo di A. Si dice che A è un *anello locale regolare* se è un anello noetheriano e se:

$$\dim A = \dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$$

(b) Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso e sia $X \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ un insieme algebrico. Un punto $x \in X$ viene detto *regolare* oppure *liscio* se, posto $\mathfrak{m} = \mathcal{I}_{x/X}$, la localizzazione $\mathcal{A}(X)_{\mathfrak{m}}$ è un anello locale regolare. In caso contrario, si dice che x è un punto *singolare* di X.

Con le notazioni del punto (b) della definizione, l'anello $\mathcal{A}(X)_{\mathfrak{m}}$ possiede la seguente descrizione esplicita:

$$\mathcal{A}(X)_{\mathfrak{m}} = \left\{ \frac{f}{g} \colon f, g \in \mathcal{A}(X),\ g(x) \neq 0 \right\}$$

Si tratta perciò dell'anello delle funzioni locali in x, cioè delle funzioni razionali definite in x e dunque in un intorno sufficientemente piccolo di x. Si noti inoltre che, se $\mathfrak{m}$ è l'ideale di un punto di X allora, per il teorema degli zeri di Hilbert, è un ideale massimale, quindi primo, di $\mathcal{A}(X)$. In particolare, vale sempre che $\mathcal{A}(X)_{\mathfrak{m}}$ è un anello locale.

Dimostreremo a breve un lemma chiave che ci permetterà di comprendere la struttura speciale degli anelli locali regolari di dimensione 1 e di darne un'interpretazione geometrica interessante. Sfrutteremo i seguenti risultati.

Esercizio 7 (Lemma di evitamento degli ideali primi)**.** Siano I, P_0, P_1 ideali di un anello A e $P_2, P_3, \ldots, P_n$ ideali primi di A. Se $I \subseteq P_0 \cup P_1 \cup \cdots \cup P_n$, allora esiste un indice $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ tale che si abbia $I \subseteq P_i$.

Svolgimento. Facciamo vedere che vale la contronominale cioè che, se $I \nsubseteq P_i$ per ogni $i = 0, 1, \ldots, n$, allora $I \nsubseteq P_0 \cup P_1 \cup \cdots \cup P_n$. Procediamo per induzione su $n \geq 0$. La base di induzione, ovvero il caso $n = 0$, è del tutto banale. Per il passo induttivo assumiamo $n \geq 1$ e che I non sia contenuto nell'unione di $n - 1$ ideali a scelta tra $P_0, P_1, \ldots, P_n$. Allora:

$$\forall\, i = 0, 1, \ldots, n \;\exists\, x_i \in I \colon x_i \notin \bigcup_{j=0,1,\ldots,n \colon j \neq i} P_j$$

Se $x_i \notin P_i$ per qualche $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, abbiamo finito. Assumiamo perciò $x_i \in P_i$ per ogni $i = 0, 1, \ldots, n$ e definiamo:

$$x := x_0 x_1 \cdots x_{n-1} + x_n$$

Allora $x \in I$ per definizione di ideale. Per assurdo, supponiamo che esista un indice $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ tale che si abbia $x \in P_i$. Se $i \leq n - 1$, allora $x_n = x - x_0 x_1 \cdots x_{n-1} \in P_i$ e questo contraddice la nostra scelta di x_n. Dunque $i = n$, cioè $x \in P_n$. Ne segue che $x_0 x_1 \cdots x_{n-1} = x - x_n \in P_n$. Se $n = 1$, si ha una contraddizione con la nostra scelta di x_0. Se $n \geq 2$, allora esiste un indice $j \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}$ tale che $x_j \in P_n$ perché per ipotesi P_n è un ideale primo di A. Con questo abbiamo ancora un assurdo, perché contraddiciamo la nostra scelta di x_j.

Esercizio 8 (Ideali primi minimali)**.** Sia P un ideale primo di un anello A e sia S un sottoinsieme dell'ideale P. Allora abbiamo un ideale primo di A minimale tra quelli che contengono S e sono contenuti nell'ideale P.

Svolgimento. L'idea è applicare il lemma di Zorn nella sua variante secondo cui, se ogni catena in un insieme parzialmente ordinato ammette un minorante, allora esiste un elemento minimale. Consideriamo l'insieme:

$$T := \{Q \subseteq A \colon Q \,\text{ideale primo},\ S \subseteq Q \subseteq P\}$$

Osserviamo, innanzitutto, che T è non vuoto perché contiene P. Inoltre, l'insieme T è parzialmente ordinato rispetto all'inclusione insiemistica. Sia adesso F una catena in T, cioè un sottoinsieme totalmente ordinato. Definiamo:

$$L := \bigcap_{Q \in F} Q$$

Allora L è contenuto in tutti gli elementi di F per costruzione, ma per concludere che è un minorante per F dobbiamo prima dimostrare che $L \in T$. In effetti, utilizzando il fatto che F è totalmente ordinato, si verifica facilmente che L è un ideale di A e che $S \subseteq L \subseteq P$. Mostriamo che L è un ideale primo di A. Fissiamo allora due elementi $a, b \in A$ tali che $a \notin L$ e $b \notin L$. Allora esistono $Q, Q' \in F$ tali che $a \notin Q$ e $b \notin Q'$. Dato che F è totalmente ordinato, si ha $Q \subseteq Q'$ oppure $Q' \subseteq Q$. Possiamo assumere, senza perdita di generalità, che valga $Q \subseteq Q'$. Allora $b \notin Q$ e dunque, essendo Q un ideale primo di A, otteniamo che $ab \notin Q$. In particolare, si ha che $ab \notin L$. Possiamo allora concludere, per il lemma di Zorn, che T ammette un elemento minimale, ovvero che esiste un ideale primo di A minimale tra quelli che contengono l'insieme S e sono contenuti nell'ideale P.

Non tratteremo la dimostrazione del seguente teorema, per la quale si rimanda al capitolo 11 del testo [3].

Teorema 9 (dell'ideale principale di Krull)**.** *Sia A un anello noetheriano e sia $a \in A$ un elemento fissato. Allora qualunque ideale primo P di A minimale tra quelli che contengono a soddisfa la condizione* $\operatorname{ht} P \leq 1$.

Esercizio 10. Sia $n \geq 1$ un intero. Si consideri una catena di ideali primi $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n$ di un anello noetheriano A e un elemento $a \in P_n$. Allora abbiamo una catena di ideali primi $P_0' \subsetneq P_1' \subsetneq \cdots \subsetneq P_{n-1}' \subsetneq P_n$ tale che $a \in P_1'$.

Svolgimento. Ragioniamo per induzione su $n \geq 1$. La base di induzione, ovvero il caso $n = 1$, è banale. Nel passo induttivo assumiamo $n \geq 2$ e che l'asserto valga per catene di ideali primi di lunghezza $n - 1$. Si noti che, se $a \in P_{n-1}$, allora per ipotesi induttiva esiste una catena di ideali primi $P_0' \subsetneq P_1' \subsetneq \cdots \subsetneq P_{n-2}' \subsetneq P_{n-1}$ tale che $a \in P_1'$ e di conseguenza, aggiungendo l'ideale primo P_n in coda a tale catena ascendente, otteniamo la tesi.

Supponiamo adesso che $a \notin P_{n-1}$. Dato che P_n/P_{n-2} è un ideale primo di A/P_{n-2}, per l'esercizio 8 esiste un ideale primo Q di A/P_{n-2} minimale tra quelli contenuti in P_n/P_{n-2} e che contengono $\bar{a}$, dove la notazione $\bar{a}$ indica la classe laterale dell'elemento a. Si vuole mostrare che l'inclusione $Q \subseteq P_n/P_{n-2}$ è stretta. Notiamo allora che abbiamo una catena strettamente ascendente di ideali primi:

$$0 \subsetneq P_{n-1}/P_{n-2} \subsetneq P_n/P_{n-2}$$

Le inclusioni sono strette per le ipotesi e per la seguente corrispondenza biunivoca, che preserva le inclusioni:

$$\begin{array}{rcl} \{\text{ideali primi di } A \text{ che contengono } P_{n-2}\} & \longleftrightarrow & \{\text{ideali primi di } A/P_{n-2}\} \\ P & \longmapsto & P/P_{n-2} \end{array}$$

Dunque $\operatorname{ht}(P_n/P_{n-2}) \geq 2$. D'altra parte, per il teorema dell'ideale principale di Krull, dobbiamo avere che $\operatorname{ht} Q \leq 1$ e di conseguenza $Q \subsetneq P_n/P_{n-2}$. Osserviamo adesso che $\bar{a} \neq \bar{0}$ in quanto $a \notin P_{n-1}$ e $P_{n-2} \subseteq P_{n-1}$. Ne deduciamo che $0 \subsetneq Q$. Inoltre, per la corrispondenza ricordata sopra, deve esistere un ideale primo P_{n-1}' di A che contiene P_{n-2} e tale che $P_{n-1}'/P_{n-2} = Q$. Otteniamo dunque una catena di ideali primi di A/P_{n-2}:

$$0 \subsetneq P_{n-1}'/P_{n-2} \subsetneq P_n/P_{n-2}$$

Ancora per la corrispondenza ricordata prima, tale successione corrisponde a una catena di ideali primi di A:

$$P_{n-2} \subsetneq P'_{n-1} \subsetneq P_n$$

Notiamo infine che $a \in P'_{n-1}$. Ciò discende immediatamente dalle seguenti implicazioni:

$$\begin{aligned}
&\bar{a} \in Q = P'_{n-1}/P_{n-2} \\
&\implies \exists\, b \in P'_{n-1} \colon a - b \in P_{n-2} \subseteq P'_{n-1} \\
&\implies a = (a-b) + b \in P'_{n-1}
\end{aligned}$$

Si può perciò applicare l'ipotesi induttiva alla catena di ideali primi $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_{n-2} \subsetneq P'_{n-1}$ e dunque otteniamo una catena di ideali primi $P'_0 \subsetneq P'_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P'_{n-2} \subsetneq P'_{n-1}$ tale che $a \in P'_1$. Ma siccome $P'_{n-1} \subsetneq P_n$ possiamo completare questa catena aggiungendovi P_n in coda e concludere in questo modo la dimostrazione.

Proposizione 11. *Ogni anello locale regolare è un dominio di integrità.*

Dimostrazione. Sia A un anello locale regolare di dimensione n con ideale massimale $\mathfrak{m}$ e sia inoltre $\mathbb{K} = A/\mathfrak{m}$ il campo residuo di A. Ragioneremo per induzione su $n \geq 0$. Nella base di induzione, ovvero nel caso $n = 0$, abbiamo che $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 0$ e quindi $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$. Sappiamo inoltre che $\mathfrak{m}$ è un ideale di A finitamente generato perché, per definizione di anello locale regolare, l'anello A è noetheriano e che $\mathrm{Jac}(A) = \mathfrak{m}$ perché $\mathfrak{m}$ è l'unico ideale massimale di A. Per il lemma di Nakayama abbiamo perciò $\mathfrak{m} = 0$. Ma, se l'ideale nullo è massimale, allora A è un campo e dunque un dominio di integrità.

Nel passo induttivo assumiamo $n \geq 1$ e che ogni anello locale regolare di dimensione $n-1$ sia un dominio di integrità. Per un corollario del primo teorema di unicità per decomposizioni primarie, la cui dimostrazione è reperibile nel capitolo 8 del testo [3], gli ideali primi minimali che contengono l'ideale nullo sono in numero finito. Siano dunque $P_1, P_2, \ldots, P_r$ tali ideali. Si osservi ora che $\mathfrak{m} \not\subseteq \mathfrak{m}^2 \cup P_1 \cup \cdots \cup P_r$ perché altrimenti, per il lemma di evitamento degli ideali primi, si avrebbe $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}^2$ oppure $\mathfrak{m} \subseteq P_i$ per qualche $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Vediamo perché queste condizioni conducono a una contraddizione.

- Se $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}^2$, allora $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ e dunque $n = \dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 0$, che è assurdo in quanto assumiamo $n \geq 1$.
- Supponiamo che $\mathfrak{m} \subseteq P_i$ per qualche $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Siccome $0 \in \mathfrak{m}$, per minimalità di P_j abbiamo che $P_j \subseteq \mathfrak{m} \subseteq P_i$ per ogni $j = 1, 2, \ldots, r$. Ma allora $P_i = \mathfrak{m}$ e, per minimalità di P_i, si ha che $r = 1$. Se dunque P è un ideale primo di A, allora $P \subseteq \mathfrak{m}$ perché $\mathfrak{m}$ è l'unico ideale massimale di A. D'altra parte $0 \in P$ e quindi, essendo $\mathfrak{m}$ minimale tra gli ideali primi contenenti l'ideale nullo, si deve avere $P = \mathfrak{m}$. Dal punto (a) dell'osservazione 4 discende dunque che $n = \dim A = 0$ e questo contraddice il fatto che $n \geq 1$.

Possiamo perciò trovare un elemento $a \in \mathfrak{m}$ tale che $a \notin \mathfrak{m}^2$ e $a \notin P_i$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, r$. Osserviamo ora che l'anello quoziente $A/(a)$ è locale con ideale massimale $\mathfrak{m}/(a)$ perché si ha una corrispondenza biunivoca:

$$\begin{aligned}
\{\text{Ideali massimali di } A \text{ che contengono } (a)\} \quad &\longleftrightarrow \quad \{\text{Ideali massimali di } A/(a)\} \\
\mathfrak{m} \quad &\longmapsto \quad \mathfrak{m}/(a)
\end{aligned}$$

Inoltre, l'anello $A/(a)$ è noetheriano perché è un quoziente di A, che è per definizione un anello noetheriano. Dimostriamo ora che:

$$\big(\mathfrak{m}/(a)\big)/\big(\mathfrak{m}/(a)\big)^2 \simeq \mathfrak{m}/(\mathfrak{m}^2 + (a))$$

Per farlo, consideriamo l'omomorfismo di A-moduli suriettivo $\varphi\colon \mathfrak{m} \to (\mathfrak{m}/(a))/(\mathfrak{m}/(a))^2$ definito ponendo:

$$\varphi(x) := \overline{x + (a)}$$

Qui utilizziamo la notazione esplicita per indicare le classi laterali in $\mathfrak{m}/(a)$, mentre usiamo la notazione della barretta in alto per indicare le classi in $(\mathfrak{m}/(a))/(\mathfrak{m}/(a))^2$. Dimostriamo che $\operatorname{Ker} \varphi = \mathfrak{m}^2 + (a)$.

($\supseteq$) Per questa inclusione basta osservare che $\mathfrak{m}^2 \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$ e che $a \in \operatorname{Ker}\varphi$. Si ha ovviamente $\varphi(a) = 0$. D'altra parte, l'ideale $\mathfrak{m}^2$ è generato da tutti i possibili prodotti tra due elementi di $\mathfrak{m}$ e quindi basterà notare che uno qualsiasi di tali prodotti appartiene al nucleo di φ. In effetti, per ogni $x, y \in \mathfrak{m}$, si ha:

$$\varphi(xy) = \overline{xy + (a)} = \overline{(x + (a))(y + (a))} = \bar{0}$$

($\subseteq$) Sia $x \in \operatorname{Ker}\varphi$. Abbiamo allora le seguenti implicazioni:

$$\begin{aligned} & x + (a) \in (\mathfrak{m}/(a))^2 \\ & \implies \exists\, k \geq 0 \text{ intero, } x_0, x_1, \dots, x_k, y_0, y_1, \dots, y_k \in \mathfrak{m} \colon x + (a) = \sum_{i=0}^{k} x_i y_i + (a) \\ & \implies x - \sum_{i=0}^{k} x_i y_i \in (a) \implies \exists\, b \in A \colon x = \sum_{i=0}^{k} x_i y_i + ba \in \mathfrak{m}^2 + (a) \end{aligned}$$

Dimostreremo ora che $A/(a)$ è un anello locale regolare di dimensione $n-1$. Per farlo, ci serviremo delle due seguenti considerazioni.

- Essendo $a \notin \mathfrak{m}^2$, la sua classe $\bar{a}$ nello spazio vettoriale $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ su $\mathbb{K}$ è non nulla e dunque $\bar{a}$ è linearmente indipendente. Tenendo conto del fatto che $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim A = n$, esistono allora degli elementi $a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathfrak{m}$ tali che $\{\bar{a}, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n\}$ sia una base per $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Se adesso passiamo al quoziente per $(\mathfrak{m}^2 + (a))/\mathfrak{m}^2$ allora, mantenendo per semplicità la medesima notazione per le classi laterali e usando il terzo teorema di isomorfismo, si ha che $\bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_n$ generano $\mathfrak{m}/(\mathfrak{m}^2 + (a))$ come spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Dunque:
$$\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}/(\mathfrak{m}^2 + (a)) \leq n - 1$$

- Poiché si assume che $n = \dim A$, per definizione di dimensione esiste una catena di ideali primi di A:
$$Q_0 \subsetneq Q_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_n = \mathfrak{m}$$
L'ultima uguaglianza è giustificata dal fatto che Q_n, essendo un ideale primo, è contenuto nell'unico ideale massimale $\mathfrak{m}$ di A e l'inclusione non può essere stretta perché abbiamo che $n = \dim A$. Dato che $a \in \mathfrak{m}$, possiamo applicare l'esercizio 10 per ottenere una catena di ideali primi di A strettamente ascendente $Q_0' \subsetneq Q_1' \subsetneq \cdots \subsetneq Q_{n-1}' \subsetneq \mathfrak{m}$ tale che $a \in Q_1'$. A questo punto basta passare al quoziente per l'ideale (a) per ottenere una catena $Q_1'/(a) \subsetneq \cdots \subsetneq Q_{n-1}'/(a) \subsetneq \mathfrak{m}/(a)$ di ideali primi di $A/(a)$ che è strettamente ascendente perché si ha una corrispondenza biunivoca che preserva le inclusioni:
$$\begin{array}{rcl} \{\text{Ideali primi di } A \text{ che contengono } (a)\} & \longleftrightarrow & \{\text{Ideali primi di } A/(a)\} \\ Q & \longmapsto & Q/(a) \end{array}$$
Questo dimostra che $\dim A/(a) \geq n - 1$.

Mettendo assieme le disuguaglianze appena trovate e quella fornita dal punto (ii) del lemma 5, otteniamo:

$$n - 1 \leq \dim A/(a) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}/(\mathfrak{m}^2 + (a)) \leq n - 1$$

Abbiamo così dimostrato che $A/(a)$ è un anello locale regolare di dimensione $n-1$.

Possiamo ora applicare l'ipotesi induttiva per ottenere che $A/(a)$ è un dominio di integrità e dunque (a) è un ideale primo di A. Per l'esercizio 8 con $S := \varnothing$ esiste un indice $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ tale che $P_i \subseteq (a)$. Questo significa che, per ogni $b \in P_i$, esiste $c \in A$ tale che si abbia $b = ac$. Da questo deduciamo che $c \in P_i$ perché P è un ideale primo di A e $a \notin P_i$ per quanto osservato in precedenza. Dunque $b \in aP_i \subseteq \mathfrak{m}P_i$. Abbiamo allora ottenuto che $P_i \subseteq \mathfrak{m}P_i$, quindi $\mathfrak{m}P_i = P_i$ e questo assieme al fatto che A è noetheriano e $\operatorname{Jac}(A) = \mathfrak{m}$ implica, per il lemma di Nakayama, che $P_i = 0$. Concludiamo allora che l'ideale nullo è un ideale primo di A, cioè che A è un dominio di integrità. □

Avremo bisogno anche del seguente fatto. Notiamo preliminarmente che la potenza 0-esima di un ideale è ben definita. In effetti, per definizione, un prodotto vuoto di ideali di un anello, cioè un prodotto $I_1 I_2 \cdots I_n$ con $n = 0$, coincide con l'anello stesso.

Esercizio 12. Sia A un anello noetheriano e sia I un ideale di A. Esiste un intero $N \geq 0$ tale che $(\sqrt{I})^N \subseteq I$.

Svolgimento. Poiché assumiamo che A sia un anello noetheriano e sappiamo che $\sqrt{I}$ è un ideale di A, esso è finitamente generato, cioè esistono $x_1, x_2, \ldots, x_k \in A$ tali che:

$$\sqrt{I} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

Ora, per ogni $i = 1, 2, \ldots, k$, poiché chiaramente $x_i \in \sqrt{I}$, esiste un intero $n_i \geq 1$ tale che $x_i^{n_i} \in I$. Poniamo:

$$N := n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

Osserviamo che l'ideale $(\sqrt{I})^N$ è generato da elementi che, per opportuni $a_i^{(j)} \in A$ al variare di $i = 1, 2, \ldots, k$, $j = 1, 2, \ldots, N$, hanno la seguente forma:

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{i_1=1}^{k} a_{i_1}^{(1)} x_{i_1}\Big)\Big(\sum_{i_2=1}^{k} a_{i_2}^{(2)} x_{i_2}\Big) \cdots \Big(\sum_{i_N=1}^{k} a_{i_N}^{(N)} x_{i_N}\Big) \\
&= \sum_{i_1=1}^{k} \sum_{i_2=1}^{k} \cdots \sum_{i_N=1}^{k} (a_{i_1}^{(1)} a_{i_2}^{(2)} \cdots a_{i_N}^{(N)}) x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_N}
\end{aligned}$$

In ciascuno dei termini sommati, per un qualche $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, occorre per almeno n_i volte l'elemento x_i. Infatti, se così non fosse, si avrebbe una contraddizione perché avremmo $N < n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. Ciascun addendo di questa somma appartiene perciò a I perché $x_i^{n_i}$ occorre come fattore per qualche $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ e I è un ideale di A. In particolare, ogni tale somma appartiene a I. Abbiamo così dimostrato che I contiene ogni generatore di $(\sqrt{I})^N$.

Lemma 13. *Sia A un anello locale regolare di dimensione 1.*

(i) *L'ideale massimale $\mathfrak{m}$ di A è un ideale principale non nullo.*

(ii) *Per ogni $a \in A$ con $a \neq 0$ esiste un unico intero $n \geq 0$, detto la* valutazione di a, *tale che $(a) = \mathfrak{m}^n$.*

Dimostrazione.

(i) Sappiamo che $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim A = 1$, ma questo è anche il minimo numero di generatori di $\mathfrak{m}$ per il punto (i) del lemma 5 e dunque $\mathfrak{m}$ è un ideale principale non nullo di A.

(ii) Per la proposizione 11 si ha che A è un dominio di integrità, perciò l'ideale nullo è un ideale primo di A. Osserviamo che gli ideali 0 e $\mathfrak{m}$ sono gli unici ideali primi di A. Se infatti P è un ideale primo non nullo di A allora, per l'assunzione che $\dim A = 1$, la seguente catena di ideali primi di A è massimale, cioè non è possibile inserirvi alcun ideale primo di A:

$$0 \subsetneq P$$

In particolare, nessun ideale di A può contenere strettamente P, altrimenti avremmo anche un ideale massimale, quindi primo, che lo contiene e che dunque contiene strettamente P, contro il fatto che la catena $0 \subsetneq P$ è massimale. Ma allora P è un ideale massimale di A cioè, essendo A un anello locale con ideale massimale $\mathfrak{m}$, si ha $P = \mathfrak{m}$.

Fissiamo ora un elemento $a \in A$ con $a \neq 0$ e ricordiamo che:

$$\sqrt{(a)} = \bigcap_{P \text{ ideale primo}:\ a \in P} P$$

Per quanto osservato prima, in tale intersezione può comparire al più l'ideale $\mathfrak{m}$ e dunque abbiamo:

$$\sqrt{(a)} = \mathfrak{m} \quad \text{oppure} \quad \sqrt{(a)} = A$$

In entrambi i casi, applicando l'esercizio 12, per un opportuno intero $n \geq 0$ otteniamo la condizione:

$$\mathfrak{m}^n \subseteq (a)$$

Per il punto (i) precedente, esiste però un elemento $t \in A$ con $t \neq 0$ tale che $\mathfrak{m} = (t)$. In particolare:

$$\mathfrak{m}^n = (t^n)$$

La condizione che abbiamo trovato prima equivale perciò a richiedere che a divida t^n cioè che, per un certo $b \in A$:

$$t^n = ba$$

Scegliamo ora il più piccolo intero $n \geq 0$ che soddisfa queste proprietà. Se dimostriamo che $b \in A$ è un elemento invertibile, allora anche t^n divide a, cioè t^n e a sono associati. Equivalentemente si ha:

$$(a) = \mathfrak{m}^n$$

Dimostriamo perciò l'asserzione che $b \in A$ è invertibile. Ragioniamo per assurdo: se $b \in A$ non fosse invertibile, allora l'ideale principale (b) sarebbe un ideale proprio di A e dunque sarebbe contenuto in un ideale massimale di A, che d'altra parte deve essere $\mathfrak{m}$ per ipotesi. Per un opportuno $b' \in A$, si ha dunque:

$$\begin{aligned} b &= b't \\ \implies t^n &= b'ta \end{aligned}$$

Abbiamo allora due possibilità:

- Se $n = 0$, allora $1 = b'ta$ e quindi $t \in A$ è un elemento invertibile, contraddicendo il fatto che $\mathfrak{m}$ è un ideale massimale di A.
- Se $n \geq 1$, allora $t^{n-1} = b'a$ perché $t \neq 0$ e A è un dominio di integrità per la proposizione 11, ma questo contraddice la minimalità di n.

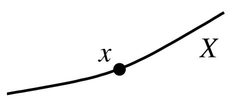
Dimostriamo infine che un tale intero $n \geq 0$ è unico. Per farlo, ragioniamo nuovamente per assurdo: supponiamo che esista un intero $k \geq 0$ con $k \neq n$ tale che t^k e a siano associati, ovvero che esista un elemento invertibile $c \in A$ tale che $t^k = ca$. Si hanno allora due possibilità:

- Se $k < n$, allora $t^{n-k} = bc^{-1} \in \mathfrak{m}$.
- Se $k > n$, allora $t^{k-n} = cb^{-1} \in \mathfrak{m}$.

In entrambi i casi l'ideale $\mathfrak{m}$ contiene un elemento invertibile di A e questo contraddice il fatto che $\mathfrak{m}$ è un ideale massimale di A. □

Ora siamo pronti per dare una motivazione geometrica degli anelli di valutazione.

Osservazione 14 (Interpretazione geometrica: ordini di svanimento). Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ una curva con $\mathbb{K}$ campo algebricamente chiuso e sia $x \in X$ un punto regolare. Allora, per il punto (b) della definizione di regolarità, sappiamo che $\mathcal{A}(X)_{\mathfrak{m}}$ con $\mathfrak{m} := \mathcal{I}_{x/X}$ è un anello locale regolare. Inoltre, ha dimensione 1 perché ogni localizzazione di $\mathcal{A}(X)$ in un ideale massimale ha dimensione uguale a quella di X.



Ricordiamo adesso che l'unico ideale massimale della localizzazione $\mathcal{A}(X)_{\mathfrak{m}}$ è l'estensione di $\mathfrak{m}$ mediante l'omomorfismo canonico $\varphi\colon \mathcal{A}(X) \to \mathcal{A}(X)_{\mathfrak{m}}$ dato da $\varphi(f) := f/1$ ed è quindi descritto dal seguente insieme:

$$\mathfrak{m}^{\mathrm{e}} = \left\{ \frac{f}{g} \colon f \in \mathfrak{m},\ g \in \mathcal{A}(X) \setminus \mathfrak{m} \right\}$$

Siccome $\mathfrak{m}$ è definito come l'ideale del punto x in X, tale estensione consiste di tutte le funzioni locali in x che svaniscono, cioè si annullano, in x. Ora, per il punto (i) del lemma 13, sappiamo che $\mathfrak{m}^{\mathrm{e}} = (\tau)$ per qualche funzione locale $\tau = t/s$ con $t \neq 0$. L'interpretazione geometrica di questo fatto è che τ si può pensare come una *coordinata locale* per X in un intorno di x, che assume il valore 0 in x con ordine di svanimento uguale a 1. Sia infatti $\alpha = f/g$ con $f \neq 0$ una funzione locale in x. Allora, per il punto (ii) del lemma 13, esiste un unico intero $n \geq 0$ tale che:

$$(\alpha) = (\tau^n)$$

Equivalentemente, i generatori α e τ^n sono associati, cioè esiste un elemento invertibile $\beta \in \mathcal{A}(X)_{\mathfrak{m}}$ tale che:

$$\alpha = \beta\tau^n$$

Geometricamente, questa equazione ci dice che n fattori di α si annullano in x, ovvero che α svanisce in x con ordine n. Perciò è ragionevole pensare alla valutazione costruita nel lemma 13 come all'ordine di svanimento di una funzione locale in un punto.

2 Definizione, esempi e proprietà

Adesso vedremo che, in realtà, la nozione algebrica di valutazione è ben più generale. Considereremo infatti domini di integrità e permetteremo alle valutazioni di assumere valori in qualsiasi gruppo abeliano ordinato anziché interi non negativi. Nel seguito, dato un campo $\mathbb{K}$, utilizzeremo la notazione $\mathbb{K}^* := \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Inoltre, indicheremo i gruppi con la notazione additiva.

Definizione 15 (Valutazioni e anelli di valutazione)**.**

(a) Un *gruppo ordinato* è un gruppo abeliano G munito di una relazione d'ordine totale $\leq$ tale che, per ogni $m, n, k \in G$, se $m \leq n$, allora $m + k \leq n + k$.

(b) Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia G un gruppo ordinato. Una mappa $\nu \colon \mathbb{K}^* \to G$ si dice una *valutazione* su $\mathbb{K}$ se, per ogni $a, b \in \mathbb{K}^*$, soddisfa le due condizioni seguenti:

(i) $\nu(ab) = \nu(a) + \nu(b)$, cioè ν è un omomorfismo di gruppi.

(ii) $\nu(a + b) \geq \min\{\nu(a), \nu(b)\}$ se $a + b \neq 0$.

Talvolta è opportuno estendere formalmente questa mappa all'intero campo $\mathbb{K}$ ponendo $\nu(0) := \infty$. Così facendo, le condizioni (i) e (ii) sopra valgono per ogni $a, b \in \mathbb{K}$, purché si adottino le convenzioni:

$$\infty + \infty = \infty \,,\; m + \infty = \infty \,,\; \infty + m = \infty \,,\; m \leq \infty \quad \text{per ogni } m \in G$$

L'immagine di ν è detta *gruppo dei valori* di ν. Chiamiamo invece *anello di valutazione* di ν l'insieme:

$$A_\nu := \{a \in \mathbb{K} \colon \nu(a) \geq 0\}$$

Osservazione 16. Geometricamente, potremmo immaginare il campo $\mathbb{K}$ della definizione precedente come il campo delle funzioni locali in un punto regolare x di un insieme algebrico X. La valutazione $\nu(f) \in G$ di una funzione locale $f \in \mathbb{K}^*$ si può pensare allora come l'ordine dello zero, se $\nu(f) > 0$, o del polo, se $\nu(f) < 0$, di f in x.

Osservazione 17. Il gruppo dei valori di ν ha, in effetti, una struttura algebrica di gruppo. Sappiamo infatti che l'immagine di un omomorfismo di gruppi è sempre un sottogruppo del codominio. Similmente, l'anello di valutazione di ν è un sottoanello di $\mathbb{K}$. Infatti, abbiamo ovviamente $\nu(0) = \infty \geq 0$ e $\nu(1) = 0$. Inoltre, per ogni $a, b \in \mathbb{K}$ con $\nu(a) \geq 0$ e $\nu(b) \geq 0$, dalle condizioni (i) e (ii) precedenti segue facilmente che $\nu(a + b) \geq 0$ e $\nu(ab) \geq 0$. Notiamo anche che, nella condizione (ii), il minimo tra $\nu(a)$ e $\nu(b)$ è ben definito grazie al fatto che la relazione d'ordine $\leq$ su G è totale.

Dall'osservazione 17 segue in particolare che gli anelli di valutazione sono domini di integrità. In realtà, essi hanno tante altre proprietà interessanti. Prima di dimostrarle, vediamo però qualche esempio al fine di comprendere meglio le nozioni che abbiamo introdotto.

Esempio 18 (Gruppi ordinati)**.** I gruppi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ sono tutti ordinati, se consideriamo la relazione d'ordine usuale su questi insiemi numerici. Nel seguito, il gruppo dei valori più comune sarà $\mathbb{Z}$, ma in generale possono presentarsi anche altri gruppi di valori non banali.

Esempio 19 (Anelli di valutazione)**.**

(a) Ogni campo $\mathbb{K}$ ammette l'applicazione nulla $\nu \colon \mathbb{K}^* \to 0$ come valutazione banale. In questo caso, il gruppo dei valori di ν è il gruppo nullo, mentre l'anello di valutazione di ν è tutto $\mathbb{K}$. Osserviamo che anche qui abbiamo $\nu(0) = \infty$ per definizione.

(b) L'esempio più importante di anello di valutazione è il seguente. Sia A un dominio a fattorizzazione unica e sia $p \in A$ un elemento irriducibile fissato. Sia inoltre $\mathbb{K} := \operatorname{Quot} A$. Si noti che, per l'unicità della fattorizzazione in A, ogni elemento non nullo di A si può esprimere in modo unico nella forma ap^n con $n \geq 0$ intero e $a \in A$ tale che p non divida a. Di conseguenza, qualsiasi elemento di $\mathbb{K}^*$ si può scrivere in modo unico nella forma ap^n con $n \in \mathbb{Z}$ e $a \in \mathbb{K}^*$ quoziente di elementi di A che non hanno p come fattore irriducibile. Con questa rappresentazione risulta ben definita una mappa $\nu \colon \mathbb{K}^* \to \mathbb{Z}$ ponendo:

$$\nu(ap^n) := n$$

Fissiamo due elementi ap^n e bp^m con $n, m \in \mathbb{Z}$ e $a, b \in \mathbb{K}^*$ quozienti di elementi di A non divisi da p e verifichiamo esplicitamente che ν soddisfa le due condizioni richieste nella definizione di valutazione:

(i) Questa condizione segue banalmente dal fatto che nel prodotto di due potenze con la stessa base si sommano gli esponenti.

(ii) Assumiamo senza perdita di generalità che $n \geq m$. Applicando la proprietà (i), cioè il fatto che ν è un omomorfismo di gruppi, otteniamo che:

$$\nu(ap^n + bp^m) = \nu(p^m(ap^{n-m} + b)) = m + \nu(ap^{n-m} + b) \geq m = \nu(bp^m)$$

La disuguaglianza è giustificata dal fatto che il denominatore della frazione $ap^{n-m} + b$ non ha p come fattore irriducibile.

Dunque ν è una valutazione su $\mathbb{K}$. Il gruppo dei valori di ν è $\mathbb{Z}$ perché ν è un'applicazione suriettiva. L'anello di valutazione di ν è invece la localizzazione di A all'ideale primo (p). Infatti, per definizione:

$$\begin{aligned} A_\nu &= \left\{ \frac{a}{b} p^n \colon a, b \in A,\ b \neq 0,\ n \geq 0 \,\text{intero},\ p \,\text{non divide}\, a \,\text{e}\, b \right\} \\ &= \left\{ \frac{a}{b} \colon a, b \in A,\ b \neq 0,\ p \,\text{non divide}\, b \right\} = A_{(p)} \end{aligned}$$

In particolare, per avere anche degli esempi più concreti, possiamo ripetere la costruzione precedente scegliendo $\mathbb{Z}$ come dominio a fattorizzazione unica e fissando un numero primo p, oppure prendendo l'anello dei polinomi $\mathbb{K}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ come dominio a fattorizzazione unica e fissando f polinomio irriducibile.

Lemma 20 (Proprietà degli anelli di valutazione)**.** *Sia $\nu \colon \mathbb{K}^* \to G$ una valutazione e definiamo $A := A_\nu$.*

(i) Per ogni $a \in \mathbb{K}^*$ abbiamo che $a \in A$ oppure $a^{-1} \in A$.

(ii) Per ogni $a, b \in A$ si ha $\nu(a) \leq \nu(b)$ se e solo se $b \in (a)$.

(iii) Il gruppo degli elementi invertibili di A è $A^* = \{a \in A \colon \nu(a) = 0\}$.

(iv) Vale che A è un anello locale con ideale massimale $\mathfrak{m} := \{a \in A \colon \nu(a) > 0\}$.

(v) Vale che A è un dominio normale.

Dimostrazione.

(i) Sia $a \in \mathbb{K}^*$ un elemento fissato. Per la condizione (i) della definizione di valutazione, otteniamo che:

$$\begin{aligned} &\nu(a) + \nu(a^{-1}) = \nu(aa^{-1}) = \nu(1) = 0 \\ &\implies \nu(a) \geq 0 \,\text{oppure}\, \nu(a^{-1}) \geq 0 \\ &\implies a \in A \,\text{oppure}\, a^{-1} \in A \end{aligned}$$

(ii) Fissiamo $a, b \in A$. L'asserto è ovvio se $a = 0$, perciò assumiamo che $a \neq 0$. Abbiamo le implicazioni:

$$\begin{aligned} &\nu(a) \leq \nu(b) \\ &\implies \nu(ba^{-1}) = \nu(b) - \nu(a) \geq 0 \\ &\implies ba^{-1} \in A \\ &\implies b = ba^{-1}a \in (a) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &b \in (a) \\ &\implies \exists\, c \in A \colon b = ca \\ &\implies \nu(b) = \nu(c) + \nu(a) \geq \nu(a) \end{aligned}$$

(iii) Di nuovo, il caso $a = 0$ è particolare perché 0 non è invertibile in A, non essendolo in $\mathbb{K}$ e $\nu(0) = \infty$. Fissiamo perciò $a \in A$ con $a \neq 0$. Allora $\nu(a) \geq 0$ ed esiste $a^{-1} \in \mathbb{K}^*$. Si hanno allora le equivalenze:

$$\begin{aligned} & a \in A \text{ invertibile} \\ \iff & a^{-1} \in A \\ \iff & \nu(a^{-1}) = -\nu(a) \geq 0 \\ \iff & \nu(a) = 0 \end{aligned}$$

(iv) Si verifica facilmente che $\mathfrak{m}$ è un ideale di A. Infatti, per ogni $x, y \in \mathfrak{m}$ e per ogni $a \in A$, abbiamo che:

$$\nu(x + y) \geq \min\{\nu(x), \nu(y)\} > 0$$
$$\nu(ax) = \nu(a) + \nu(x) > 0$$

Notiamo ora che $\mathfrak{m}$ è un ideale proprio di A perché $\nu(1) = 0$ e dunque $1 \notin \mathfrak{m}$. Inoltre, per il punto (iii) appena dimostrato, ogni elemento di $A \setminus \mathfrak{m}$ è invertibile. Ne deduciamo che A è un anello locale con ideale massimale $\mathfrak{m}$.

(v) Abbiamo già visto che A è un dominio di integrità come immediata conseguenza dell'osservazione 17, perciò dobbiamo mostrare che A è integralmente chiuso in Quot A. Poiché $\mathbb{K}$ è un campo che contiene A come sottoanello e Quot A è il più piccolo di tali campi, basterà far vedere che A è integralmente chiuso in $\mathbb{K}$. Fissiamo perciò un elemento $a \in \mathbb{K}$ intero su A. Si può assumere $a \neq 0$ perché $0 \in A$. Poiché a è intero su A, esistono un intero $n \geq 1$ e degli elementi $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in A$ tali che si abbia:

$$a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \cdots + c_0 = 0$$

Supponiamo per assurdo che $a \notin A$. Per il punto (i) precedente, poiché assumiamo $a \neq 0$, dobbiamo avere che $a^{-1} \in A$. Allora, moltiplicando per a^{-n+1} entrambi i membri dell'equazione precedente, si arriva alla seguente contraddizione:

$$a = -c_{n-1} - \cdots - c_0 a^{-n+1} \in A$$ □

3 Caratterizzazione degli anelli di valutazione

Finora abbiamo sempre considerato dapprima una valutazione ν su un campo $\mathbb{K}$ e abbiamo poi costruito un anello di valutazione a partire da questa. Dimostreremo ora che questo processo può essere invertito ovvero che, se abbiamo un anello di valutazione A, allora abbiamo anche abbastanza informazioni per risalire alla valutazione ν tale che $A = A_\nu$.

Osservazione 21 (Costruzione della valutazione a partire dal suo anello di valutazione). Sia $\nu\colon \mathbb{K}^* \to G$ una valutazione e sia $A := A_\nu$. Chiaramente, non si può sperare di poter recuperare tutto il gruppo G a partire da A, ma soltanto l'immagine di ν, cioè il gruppo dei valori di ν. Perciò, senza perdita di generalità, assumiamo che ν sia una mappa suriettiva. Allora ν può essere ricavata da A a meno di isomorfismo nel senso seguente:

(a) Dobbiamo avere che $\mathbb{K} = \operatorname{Quot} A$. Giustifichiamo le due inclusioni.

  ($\supseteq$) Per la proprietà universale del campo dei quozienti, sappiamo che $\operatorname{Quot} A$ è il più piccolo campo che contiene A come sottoanello.

  ($\subseteq$) Sia $a \in \mathbb{K}^*$ un elemento fissato. Per il punto (i) del lemma 20, si avrà che $a \in A$ oppure $a^{-1} \in A$. In entrambi i casi, otteniamo che $a \in \operatorname{Quot} A$.

(b) Per il punto (iii) del lemma 20, l'omomorfismo di gruppi $\nu\colon \mathbb{K}^* \to G$ ha nucleo A^* e di conseguenza, per il primo teorema di isomorfismo, si ha:

$$\mathbb{K}^*/A^* \simeq G$$

Per il punto (a) precedente, il gruppo G è dunque determinato da A a meno di isomorfismo. Se inoltre indichiamo con $\pi\colon \mathbb{K}^* \to \mathbb{K}^*/A^*$ la mappa quoziente, allora il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^* \arrow[r, two heads, "\nu"] \arrow[dr, two heads, "\pi"'] & G \\ & \mathbb{K}^*/A^* \arrow[u, "\simeq"'] \end{tikzcd}$$

La commutatività del diagramma è garantita dal fatto che l'isomorfismo agisce esattamente come ν. Potremmo dire perciò che $\nu = \pi$ a meno di isomorfismo.

(c) Nel punto (b) precedente abbiamo determinato G e la sua struttura di gruppo abeliano a partire da A. Adesso vediamo che è possibile ricavare anche la sua struttura di gruppo *ordinato*. In altre parole, dimostriamo che la relazione d'ordine $\leq$ su G dipende solo da A. In effetti, per ogni $a, b \in \mathbb{K}^*$, si ha:

$$\begin{aligned} &\nu(a) \leq \nu(b) \\ &\iff \nu(ba^{-1}) \geq 0 \\ &\iff ba^{-1} \in A \end{aligned}$$

A questo punto, diamo un semplice criterio per poter stabilire se un anello dato è un anello di valutazione.

Proposizione 22 (Caratterizzazione degli anelli di valutazione)**.** *Sia A un anello. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *Esiste una valutazione $\nu\colon \mathbb{K}^* \to G$ tale che $A = A_\nu$.*

(ii) *Vale che A è un dominio di integrità e, per ogni $a \in (\operatorname{Quot} A) \setminus \{0\}$, abbiamo $a \in A$ oppure $a^{-1} \in A$.*

Dimostrazione. L'implicazione (i) $\Longrightarrow$ (ii) è una facile conseguenza delle proprietà (i) e (v) del lemma 20 e di quanto osservato nel punto (a) dell'osservazione 21. Dimostriamo perciò l'altra implicazione. Consideriamo un dominio di integrità A e poniamo per semplicità $\mathbb{K} := \operatorname{Quot} A$, $G := \mathbb{K}^*/A^*$. Si noti che ha senso prendere il quoziente $\mathbb{K}^*/A^*$ perché A^* è un sottogruppo di $\mathbb{K}^*$. Trattandosi tuttavia di un sottogruppo rispetto alla moltiplicazione e non rispetto all'addizione, in contrasto con quanto avevamo premesso alla definizione 15, per il gruppo G qui useremo la notazione moltiplicativa.

Vogliamo ora dare a G una struttura di gruppo ordinato. Il punto (c) dell'osservazione 21 ci suggerisce di definire una relazione binaria $\leq$ su G ponendo $\bar{a} \leq \bar{b}$ se $ba^{-1} \in A$. Mostriamo che $\leq$ è una relazione d'ordine totale su G.

- *Buona definizione.* La prima cosa da dimostrare è che $\leq$ non dipende dalla scelta dei rappresentanti in $\mathbb{K}^*$ delle classi $\bar{a}$ e $\bar{b}$. Per farlo sarà sufficiente osservare che, se $c, d \in A^*$, allora da $\bar{a} \leq \bar{b}$, ovvero da $ba^{-1} \in A$, discende la condizione $\bar{a}\bar{c} \leq \bar{b}\bar{d}$. In effetti, poiché $c \in A^*$, si ha $dc^{-1} \in A$ e di conseguenza:

$$bd(ac)^{-1} = (ba^{-1})(dc^{-1}) \in A$$

- *Riflessività.* Basta semplicemente notare che, per ogni $a \in \mathbb{K}^*$, si ha $aa^{-1} = 1 \in A$ e dunque $\bar{a} \leq \bar{a}$.
- *Antisimmetria.* Se $ba^{-1} \in A$ e $ab^{-1} \in A$, allora $ba^{-1} \in A^*$ perché ab^{-1} è il suo inverso, perciò $\bar{a} = \bar{b}$.
- *Transitività.* Se $ba^{-1} \in A$ e $cb^{-1} \in A$, allora moltiplicando questi elementi otteniamo che $ca^{-1} \in A$.
- *Totalità.* Per ogni $a, b \in \mathbb{K}^*$ si ha $ba^{-1} \in \mathbb{K}^*$ e dunque, per ipotesi, vale $ba^{-1} \in A$ oppure $ab^{-1} \in A$.

Se adesso definiamo $\nu\colon \mathbb{K}^* \to G$ come la mappa quoziente allora, per ogni $a, b \in \mathbb{K}^*$ abbiamo $\nu(a) \leq \nu(b)$ se e solo se $ba^{-1} \in A$. Per dimostrare che ν è una valutazione su $\mathbb{K}$, sarà sufficiente verificare le due condizioni della definizione di valutazione.

(i) Per ogni $a, b \in \mathbb{K}^*$ abbiamo $\nu(ab) = \nu(a)\nu(b)$ per la definizione del prodotto nel gruppo quoziente G.

(ii) Siano $a, b \in \mathbb{K}^*$ elementi fissati. Dobbiamo mostrare che $\nu(a + b) \geq \min\{\nu(a), \nu(b)\}$. Supponiamo, senza perdita di generalità, che si abbia $\nu(a) \leq \nu(b)$. Allora abbiamo $ba^{-1} \in A$ e, in particolare, vale:

$$(a + b)a^{-1} = 1 + ba^{-1} \in A$$

Dunque $\nu(a + b) \geq \nu(a)$.

Osserviamo infine che $A = A_\nu$ perché, per qualsiasi $a \in \mathbb{K}^*$, abbiamo $\nu(a) \geq 0 = \nu(1)$ se e solo se $a \in A$. □

Osservazione 23. La proposizione 22 fornisce una definizione alternativa del concetto di anello di valutazione come dominio di integrità A tale che, per ogni $a \in (\operatorname{Quot} A) \setminus \{0\}$, si abbia $a \in A$ oppure $a^{-1} \in A$. In effetti, è una definizione ricorrente in letteratura e spesso nel seguito parleremo di anelli di valutazione senza prima menzionare una valutazione. Osserviamo anche che la valutazione $\nu\colon \mathbb{K}^* \to G$ costruita nella dimostrazione della proposizione 22 è l'unica a meno di isomorfismo, nel senso che abbiamo specificato nell'osservazione 21, tale che $A = A_\nu$ e tale che ν sia suriettiva.

La caratterizzazione alternativa degli anelli di valutazione ci permette di vedere altre loro proprietà che risulterebbero difficili da dimostrare usando solo la definizione 15.

Lemma 24 (Ingrandire anelli di valutazione)**.** *Sia A un anello di valutazione e sia A' un anello tale che si abbiano le inclusioni $A \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A$ come sottoanelli. Allora anche A' è un anello di valutazione e inoltre vale che* $\operatorname{Quot} A' = \operatorname{Quot} A$.

Dimostrazione. Notiamo, innanzitutto, che A' è un dominio integrità perché è un sottoanello di $\operatorname{Quot} A$, che è un campo. Ha dunque senso considerare il campo $\operatorname{Quot} A'$. Dimostriamo ora l'identità $\operatorname{Quot} A' = \operatorname{Quot} A$.

($\supseteq$) Questa inclusione discende immediatamente dall'ipotesi che $\operatorname{Quot} A$ contenga A' come sottoanello.

($\subseteq$) Sappiamo che $\operatorname{Quot} A'$ è un campo che contiene A' come sottoanello. Si ha perciò $A \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A'$ come sottoanelli. In particolare, otteniamo che il campo $\operatorname{Quot} A'$ contiene anche A come sottoanello e quindi $\operatorname{Quot} A' \subseteq \operatorname{Quot} A$.

A questo punto, per concludere che A' è un anello di valutazione, ci serviremo della caratterizzazione fornita dalla proposizione 22. Basta perciò notare che, per ogni $a \in \operatorname{Quot} A' = \operatorname{Quot} A$ con $a \neq 0$, si ha $a \in A \subseteq A'$ oppure $a^{-1} \in A \subseteq A'$. $\square$

Proposizione 25 (Chiusura integrale da anelli di valutazione)**.** *Sia A un dominio di integrità e sia $\bar{A}$ la sua chiusura integrale in* $\operatorname{Quot} A$*. Allora:*

$$\bar{A} = \bigcap_{\substack{A' \text{ anello di valutazione con} \\ A \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A \text{ come sottoanelli}}} A'$$

Dimostrazione. Dimostriamo la doppia inclusione.

($\subseteq$) Fissiamo un elemento $x \in \bar{A}$ e consideriamo un anello di valutazione A' con $A \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A$ come sottoanelli. Per il lemma 24, vale che $x \in \operatorname{Quot} A = \operatorname{Quot} A'$. D'altra parte, per l'inclusione $A \subseteq A'$, l'elemento $x \in \operatorname{Quot} A'$ è intero non solo su A, ma anche su A'. Ne deduciamo che $x \in A'$ perché, per il punto (v) del lemma 20, l'anello di valutazione A' è normale, cioè integralmente chiuso in $\operatorname{Quot} A'$.

($\supseteq$) Sia $x \notin \bar{A}$. Costruiremo un anello di valutazione A' tale che $A \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A$ come sottoanelli e tale che valga $x \notin A'$.

Notiamo, innanzitutto, che $x \neq 0$ perché $0 \in \bar{A}$ e quindi x è invertibile in $\operatorname{Quot} A$. Ha dunque senso considerare il sottoanello $A[x^{-1}]$ di $\operatorname{Quot} A$. Dimostriamo che $x \notin A[x^{-1}]$. Per assurdo, se così non fosse, esisterebbero un intero $k \geq 0$ e degli elementi $a_0, a_1, \ldots, a_k \in A$ tali che:

$$x = a_0 + a_1 x^{-1} + \cdots + a_k x^{-k}$$

Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione precedente per x^k, otteniamo:

$$x^{k+1} - a_0 x^k - a_1 x^{k-1} - \cdots - a_k = 0$$

Dunque x soddisfa una relazione polinomiale monica a coefficienti in A e questo è assurdo in quanto avevamo scelto $x \notin \bar{A}$.

Consideriamo adesso il seguente insieme:

$$S := \{A' \colon A' \text{ è un anello tale che } A[x^{-1}] \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A \text{ come sottoanelli e } x \notin A'\}$$

Vorremmo applicare il lemma di Zorn perciò osserviamo che, per quanto dimostrato poco fa, l'anello $A[x^{-1}]$ appartiene a S e dunque S è un insieme non vuoto. Inoltre, è parzialmente ordinato rispetto all'inclusione insiemistica. Sia quindi F una catena in S, cioè un sottoinsieme totalmente ordinato. Definiamo:

$$M := \bigcup_{A' \in F} A'$$

Allora M contiene banalmente tutti gli elementi di F, ma per concludere che è un maggiorante per F dobbiamo prima osservare che $M \in S$. In effetti, utilizzando il fatto che F è totalmente ordinato, si vede facilmente che M è un anello, che $A[x^{-1}] \subseteq M \subseteq \operatorname{Quot} A$ come sottoanelli e che $x \notin M$. Per il lemma di Zorn l'insieme S ammette perciò un elemento massimale A'. In particolare, otteniamo che $A \subseteq A[x^{-1}] \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A$ come sottoanelli e che $x \notin A'$, quindi rimane da dimostrare che A' è un anello di valutazione.

Per dimostrare questo, utilizzeremo la caratterizzazione fornita dalla proposizione 22. Innanzitutto, poiché valgono le inclusioni $A \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A$ come sottoanelli, si può ripetere la prima parte della dimostrazione del lemma 24 per ottenere che A' è un dominio di integrità e che $\operatorname{Quot} A' = \operatorname{Quot} A$. Consideriamo adesso un elemento $a \in \operatorname{Quot} A' = \operatorname{Quot} A$. Allora $A'[a]$ e $A'[a^{-1}]$ sono sottoanelli di $\operatorname{Quot} A$. Supponiamo per assurdo che valgano $a \notin A'$ e $a^{-1} \notin A'$. Allora i due anelli $A'[a]$ e $A'[a^{-1}]$ contengono strettamente A'. In particolare, contengono $A[x^{-1}]$ come sottoanello e dunque, essendo

A' massimale in S, si deve avere $x \in A'[a]$ e $x \in A'[a^{-1}]$. Esistono perciò due interi $n, m \geq 0$ e degli elementi $r_0, r_1, \ldots, r_n, s_0, s_1, \ldots, s_m \in A'$ tali che:

$$x = \sum_{i=0}^{n} r_i a^i = \sum_{i=0}^{m} s_i a^{-i}$$

Siano ora $n, m \geq 0$ i più piccoli interi soddisfacenti tale proprietà. Si osservi che in realtà $n, m \geq 1$, altrimenti $x \in A'$ e questo è un assurdo. Supponiamo inoltre, senza perdita di generalità, che $m \leq n$. Allora possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} x = s_0 + (x - s_0)x^{-1}x &= s_0 + (x - s_0)x^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} r_i a^i + (x - s_0)x^{-1} r_n a^n \\ &= s_0 + (1 - s_0 x^{-1}) \sum_{i=0}^{n-1} r_i a^i + \Big(\sum_{i=1}^{m} s_i a^{-i}\Big) x^{-1} r_n a^n \end{aligned}$$

Poiché $x^{-1} \in A[x^{-1}] \subseteq A'$, questa è una relazione polinomiale di grado strettamente inferiore a n in a con coefficienti in A'. Abbiamo allora una contraddizione con la minimalità di n. Otteniamo perciò che A' è un anello di valutazione. □

Esercizio 26. Sia A un anello di valutazione con gruppo dei valori G. Un sottoinsieme H di G è detto *non negativo* se $a \geq 0$ per ogni $a \in H$, mentre è detto *saturo* se, per ogni $a, b \in G$ con $a \leq b$ e $a \in H$, si ha $b \in H$.

(i) Esiste una corrispondenza biiettiva naturale, che preserva le inclusioni, tra ideali di A e sottoinsiemi saturi non negativi di G.

(ii) L'insieme degli ideali di A è totalmente ordinato rispetto all'inclusione insiemistica cioè, comunque scelti I e J ideali di A, si ha $I \subseteq J$ oppure $J \subseteq I$.

Svolgimento.

(i) Sia $\mathbb{K} := \operatorname{Quot} A$ e sia $\nu \colon \mathbb{K}^* \to G$ la valutazione tale che $A = A_\nu$. Consideriamo la corrispondenza:

$$\begin{array}{rcl} \{\text{Ideali di } A\} & \longleftrightarrow & \{\text{Sottoinsiemi saturi non negativi di } G\} \\ I & \longmapsto & \nu(I) \setminus \{\infty\} \\ \nu^{-1}(H) \cup \{0\} & \longleftarrow\!\shortmid & H \end{array}$$

Dobbiamo innanzitutto mostrare che le due mappe sono ben definite nel senso che le loro immagini sono contenute nei rispettivi codomini.

($\mapsto$) Consideriamo un ideale I di A e facciamo vedere che $\nu(I) \setminus \{\infty\}$ è un sottoinsieme saturo non negativo di G.

- *Sottoinsieme di* G. Sia $a \in \nu(I) \setminus \{\infty\}$. Allora esiste un elemento $x \in I$ tale che $\nu(x) = a$. Osserviamo che $x \neq 0$, altrimenti $a = \infty$. Ne deduciamo che $x \in \mathbb{K}^*$ e allora $a = \nu(x) \in G$.
- *Saturo.* Siano $a, b \in G$ con $a \leq b$ e $a \in \nu(I)$. Allora esiste $x \in I$ tale che $a = \nu(x)$. Inoltre, dato che per ipotesi G è il gruppo dei valori, cioè l'immagine di ν, esiste un elemento $y \in \mathbb{K}^*$ tale che $b = \nu(y)$. Come abbiamo visto nel punto (c) dell'osservazione 21, dalla condizione $\nu(x) = a \leq b = \nu(y)$ segue allora che $yx^{-1} \in A$. Dunque $y = yx^{-1}x \in I$ e quindi $b \in \nu(I)$.

($\leftarrow\!\shortmid$) Consideriamo un sottoinsieme saturo non negativo H di G e dimostriamo che $\nu^{-1}(H) \cup \{0\}$ è un ideale di A.

- *Sottoinsieme di* A. Già sappiamo che $0 \in A$, perciò consideriamo un elemento $x \in \nu^{-1}(H)$. Allora $\nu(x) \in H$ e quindi $\nu(x) \geq 0$ perché H è un sottoinsieme non negativo di G. Dunque otteniamo che $x \in A = A_\nu$.

- *Sottogruppo additivo.* Innanzitutto, si ha che $0 \in \nu^{-1}(H) \cup \{0\}$. Siano ora $x, y \in \nu^{-1}(H)$. Assumiamo, senza perdita di generalità, che valga $\nu(x) \leq \nu(y)$. Per la condizione (ii) della definizione di valutazione, otteniamo dunque che $\nu(x+y) \geq \nu(x)$. Dal fatto che $\nu(x) \in H$ e dall'ipotesi che H sia un sottoinsieme saturo di G segue allora che $\nu(x+y) \in H$, ovvero che $x + y \in \nu^{-1}(H)$. Notiamo infine che $-x \in \nu^{-1}(H)$ perché -1 è un elemento invertibile di A e quindi, per la condizione (i) della definizione di valutazione assieme al punto (iii) del lemma 20, vale:
$$\nu(-x) = \nu(x(-1)) = \nu(x) + \nu(-1) = \nu(x) \in H$$
- *Ideale.* Fissiamo $a \in A$ e $x \in \nu^{-1}(H)$. Allora $\nu(a) \geq 0$ perché $A = A_\nu$, mentre $\nu(x) \in H$. Per l'ipotesi che H sia un sottoinsieme saturo di G e per la condizione (i) della definizione di valutazione abbiamo dunque le seguenti implicazioni:
$$\begin{aligned} &\nu(ax) = \nu(a) + \nu(x) \geq \nu(x) \in H \\ &\implies \nu(ax) \in H \implies ax \in \nu^{-1}(H) \end{aligned}$$

Si verifica facilmente che il passaggio all'immagine o alla preimmagine e la rimozione o aggiunta di un elemento particolare preservano le inclusioni. Ci resta da dimostrare soltanto che la corrispondenza è biiettiva.

- *Invertibile a sinistra.* Fissiamo un ideale I di A e dimostriamo che $\nu^{-1}(\nu(I)\setminus\{\infty\}) \cup \{0\} = I$.
  - ($\subseteq$) Innanzitutto, vale ovviamente che $0 \in I$. D'altra parte, abbiamo le seguenti implicazioni:
$$\begin{aligned} &x \in \nu^{-1}(\nu(I)\setminus\{\infty\}) \\ &\implies \nu(x) \in \nu(I) \\ &\implies \exists\, y \in I \colon \nu(x) = \nu(y) \\ &\implies \nu(xy^{-1}) = 0 \\ &\implies xy^{-1} \in A = A_\nu \\ &\implies x = xy^{-1}y \in I \end{aligned}$$
  - ($\supseteq$) Fissiamo $x \in I$ con $x \neq 0$. Allora $\nu(x) \in \nu(I)$ e $\nu(x) \neq \infty$. Dunque $x \in \nu^{-1}(\nu(I)\setminus\{\infty\})$.
- *Invertibile a destra.* Consideriamo un sottoinsieme saturo non negativo H di G e dimostriamo che $\nu(\nu^{-1}(H) \cup \{0\})\setminus\{\infty\} = H$.
  - ($\subseteq$) Fissiamo un elemento $a \in \nu(\nu^{-1}(H) \cup \{0\})$ con $a \neq \infty$. Allora si ha $a = \nu(x)$ per qualche $x \in \nu^{-1}(H) \cup \{0\}$. Si osservi però che dobbiamo necessariamente avere $x \neq 0$, altrimenti avremmo la contraddizione $a = \nu(0) = \infty$. Dunque $x \in \nu^{-1}(H)$. In altre parole, abbiamo:
$$a = \nu(x) \in H$$
  - ($\supseteq$) Sia $a \in H$. Sicuramente $a \neq \infty$, perché H è un sottoinsieme di G. Poiché G è il gruppo dei valori di ν, abbiamo allora le seguenti implicazioni:
$$\begin{aligned} &\exists\, x \in \mathbb{K}^* \colon \nu(x) = a \in H \\ &\implies x \in \nu^{-1}(H) \\ &\implies a = \nu(x) \in \nu(\nu^{-1}(H)) \end{aligned}$$

(ii) Poiché la corrispondenza trovata al punto (i) precedente è biunivoca e preserva le inclusioni, basterà far vedere che l'insieme di tutti i sottoinsiemi saturi non negativi di G è totalmente ordinato rispetto all'inclusione insiemistica. In altre parole dimostriamo che, dati due sottoinsiemi saturi non negativi H e K di G, si ha $H \subseteq K$ oppure $K \subseteq H$. Assumiamo perciò $H \nsubseteq K$, ovvero che esista un elemento $a \in H$ tale che $a \notin K$ e dimostriamo che, fissato $b \in K$, dobbiamo avere $b \in H$. Siccome la relazione d'ordine $\leq$ su G è totale, abbiamo che $a \leq b$ oppure $b \leq a$. Se fosse $b \leq a$ allora, poiché $b \in K$ e K è un sottoinsieme saturo di G, dovremmo avere $a \in K$, ma questo è assurdo. Dunque $a \leq b$. Quindi, poiché $a \in H$ e H è un sottoinsieme saturo di G, otteniamo che $b \in H$.

4 Anelli di valutazione discreta

Fin qui abbiamo considerato anelli di valutazione qualunque. Tuttavia, dato che nella pratica quasi tutti gli anelli sono noetheriani, vogliamo specializzarci a questo caso particolare. Sorprendentemente questa ipotesi aggiuntiva, apparentemente di poco conto, ha conseguenze importanti, come vedremo nei prossimi risultati.

Proposizione 27 (Anelli di valutazione discreta)**.** *Sia A un anello di valutazione con ideale massimale $\mathfrak{m}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

(i) *L'anello A è noetheriano, ma non è un campo.*

(ii) *L'anello A è un dominio a ideali principali, ma non è un campo.*

(iii) *Il gruppo dei valori di A è $\mathbb{Z}$.*

Se inoltre queste condizioni sono verificate allora, per ogni $a \in A$ con $a \neq 0$, la valutazione $\nu(a) \in \mathbb{Z}$ è l'unico intero $n \geq 0$ tale che $(a) = \mathfrak{m}^n$.

Dimostrazione. Dimostreremo che (i) $\overset{1}{\Longrightarrow}$ (ii) $\overset{2}{\Longrightarrow}$ (iii) $\overset{3}{\Longrightarrow}$ (i). Prima però ricordiamo che, per il punto (iv) del lemma 20, l'anello di valutazione A è locale e perciò ha senso considerare l'unico ideale massimale $\mathfrak{m}$ di A.

(1) Sia I un ideale di A. Essendo A noetheriano, esistono $a_1, a_2, \ldots, a_r \in A$ tali che $I = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$. Siccome il gruppo dei valori è un gruppo ordinato, possiamo scegliere un indice $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ tale che a_i abbia valutazione minima. Per ogni $j = 1, 2, \ldots, r$ si ha perciò $\nu(a_i) \leq \nu(a_j)$. Per il punto (ii) del lemma 20, ciò è del tutto equivalente a richiedere che $a_j \in (a_i)$ e concludiamo allora che $I = (a_i)$.

(2) Notiamo, innanzitutto, che $\mathfrak{m} \neq 0$ altrimenti A sarebbe un campo. Possiamo perciò scrivere $\mathfrak{m} = (t)$ per qualche $t \in A$ elemento irriducibile. Adesso, essendo A un dominio a ideali principali e quindi un dominio a fattorizzazione unica, per il punto (b) dell'esempio 19 sappiamo che la localizzazione di A all'ideale (t) è un anello di valutazione con gruppo dei valori $\mathbb{Z}$. Ricordiamo che, esplicitamente, si ha:

$$A_{(t)} = \left\{ \frac{a}{b} \colon a, b \in A,\ b \neq 0,\ t \text{ non divide } b \right\}$$

La condizione che t non divida b equivale però a richiedere che $b \notin \mathfrak{m}$ cioè, per i punti (iii) e (iv) del lemma 20, che b sia invertibile in A. Ne deduciamo che $A_{(t)} = A$. In particolare, il gruppo dei valori di A è $\mathbb{Z}$.

Inoltre, come abbiamo già osservato nel punto (b) dell'esempio 19, ogni elemento non nullo $a \in A$ si può esprimere in modo unico nella forma $a = ct^n$ per qualche intero $n \geq 0$ e per un opportuno $c \in A$ tale che t non divida c, cioè tale che c sia invertibile in A. Gli elementi a e t^n sono perciò associati e quindi:

$$(a) = (t^n) = \mathfrak{m}^n$$

Inoltre, per come si era definita la valutazione ν associata ad $A_{(t)} = A$ nel punto (b) dell'esempio 19, abbiamo la condizione $\nu(a) = n$ e con questo è dimostrata l'asserzione aggiuntiva della proposizione.

(3) Per prima cosa si noti che, se A fosse un campo allora, per il punto (b) dell'osservazione 21, avremmo la contraddizione:

$$0 = (\operatorname{Quot} A)^* / A^* \simeq \mathbb{Z}$$

Sia ora I un ideale non nullo di A. Dato che per ipotesi il gruppo dei valori di A è $\mathbb{Z}$ e $I \subseteq A$, tutti gli elementi di I hanno valutazioni intere e non negative. Si può allora scegliere un elemento $a \in I$ tale che a abbia valutazione minima. Ragionando come nel punto (1) precedente, otteniamo che $I = (a)$. In particolare, l'ideale I è finitamente generato. □

Definizione 28. Un anello di valutazione A che soddisfa le condizioni equivalenti della proposizione 27 si dice un *anello di valutazione discreta.*

Proposizione 29 (Condizioni equivalenti per gli anelli di valutazione discreta)**.** *Per un anello noetheriano locale A, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *L'anello A è un anello di valutazione discreta.*

(ii) *L'anello A è un dominio a ideali principali, ma non è un campo.*

(iii) *L'anello A è un dominio a fattorizzazione unica di dimensione 1.*

(iv) *L'anello A è un dominio normale di dimensione 1.*

(v) *L'anello A è un anello locale regolare di dimensione 1.*

Dimostrazione. Le implicazioni (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) sono banali. La prima infatti è del tutto ovvia per la definizione 28, la seconda è vera per il punto (b) dell'osservazione 4, mentre la terza è una conseguenza immediata del fatto che i domini a fattorizzazione unica sono normali. Dobbiamo perciò far vedere che vale:

$$\text{(iv)} \overset{1}{\Longrightarrow} \text{(v)} \overset{2}{\Longrightarrow} \text{(i)}$$

(1) Dal momento che per ipotesi A è un dominio locale di dimensione 1, esso ha un unico ideale massimale $\mathfrak{m}$ e inoltre, ripetendo l'argomento visto all'inizio della dimostrazione del punto (ii) del lemma 13, si ha che l'ideale nullo e $\mathfrak{m}$ sono gli unici ideali primi di A. Perciò, prendendo $a \in \mathfrak{m}$ con $a \neq 0$, abbiamo:

$$\sqrt{(a)} = \bigcap_{P \text{ ideale primo}:\ a \in P} P = \mathfrak{m}$$

Per l'esercizio 12, esiste un intero $n \geq 0$ tale che si abbia $\mathfrak{m}^n \subseteq (a)$. Scegliamo n come il più piccolo di tali interi e notiamo che, se fosse $n = 0$, allora $A \subseteq (a)$ e di conseguenza $a \in \mathfrak{m}$ sarebbe un elemento invertibile, contraddicendo il fatto che $\mathfrak{m}$ è un ideale massimale di A. Dobbiamo perciò avere $n \geq 1$. Adesso, per la minimalità di n, abbiamo che $\mathfrak{m}^{n-1} \nsubseteq (a)$ e dunque esiste un elemento $b \in \mathfrak{m}^{n-1}$ tale che $b \notin (a)$.

Definiamo $t := a/b \in \operatorname{Quot} A$. Il nostro obiettivo sarà dimostrare che $\mathfrak{m} = (t)$. Da questo dedurremo infatti, per il punto (i) del lemma 5, che A è un anello locale regolare. In primo luogo, osserviamo che:

$$M := \frac{1}{t}\mathfrak{m} = \frac{b}{a}\mathfrak{m} \subseteq \frac{1}{a}\mathfrak{m}^n \subseteq \frac{1}{a}(a) \subseteq A$$

Dunque M è un ideale di A come conseguenza del fatto che lo è $\mathfrak{m}$. Ora supponiamo per assurdo che $M \subseteq \mathfrak{m}$ e troviamo una contraddizione usando la generalizzazione del teorema di Cayley-Hamilton.

Dato che per ipotesi A è un anello noetheriano, l'ideale $\mathfrak{m}$ è finitamente generato. Sia $\varphi\colon \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ la mappa definita da $\varphi(x) := x/t$. Poiché assumiamo che $M \subseteq \mathfrak{m}$, abbiamo in effetti $\varphi(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{m} \subseteq A\mathfrak{m}$. Inoltre, si verifica facilmente che φ è un omomorfismo di A-moduli. Dunque, per la generalizzazione del teorema di Cayley-Hamilton, vi sono un intero $k \geq 1$ e degli elementi $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1} \in A$ tali che:

$$\varphi^n + c_{n-1}\varphi^{n-1} + \cdots + c_1\varphi + c_0 \mathrm{id}_{\mathfrak{m}} = 0$$

Se adesso applichiamo primo e secondo membro a un elemento non nullo $x \in \mathfrak{m}$ e poi lo "cancelliamo" usando il fatto che $\operatorname{Quot} A$ è un dominio di integrità, otteniamo che $1/t$ soddisfa la seguente relazione polinomiale monica a coefficienti in A:

$$\left(\frac{1}{t}\right)^n + c_{n-1}\left(\frac{1}{t}\right)^{n-1} + \cdots + c_1\frac{1}{t} + c_0 = 0$$

Dunque $1/t \in \operatorname{Quot} A$ è intero su A. Sappiamo però, per ipotesi, che A è un dominio normale, ovvero integralmente chiuso in $\operatorname{Quot} A$ e di conseguenza $1/t \in A$. Si ha dunque la seguente contraddizione:

$$b = \frac{1}{t}a \in (a)$$

Abbiamo così dimostrato che $M \nsubseteq \mathfrak{m}$. Ne segue che $M = A$ perché, se M fosse un ideale proprio di A, allora sarebbe contenuto in un ideale massimale, ma $\mathfrak{m}$ è l'unico ideale massimale di A. Dimostriamo che $\mathfrak{m} = (t)$.

($\subseteq$) Sia $x \in \mathfrak{m}$. Allora $x/t \in M = A$, ovvero esiste $a \in A$ tale che $x/t = a/1$. Dunque $x = ta \in (t)$.

($\supseteq$) Da $M = A$ segue che $1 \in M$, cioè che esiste $x \in \mathfrak{m}$ tale che $x/t = 1/1$. Ma allora si ha $t = x \in \mathfrak{m}$.

(2) Per mostrare che A è un anello di valutazione, si userà la caratterizzazione data dalla proposizione 22. Sappiamo, per la proposizione 11, che A è un dominio di integrità. Inoltre, per il lemma 13, l'ideale massimale $\mathfrak{m}$ di A è generato da un solo elemento $t \in A$ e, per ogni $a \in A$ con $a \neq 0$, esistono un intero $n \geq 0$ e un elemento invertibile $b \in A$ tali che $a = bt^n$. Di conseguenza, per qualsiasi $a \in \operatorname{Quot} A$ con $a \neq 0$, esistono $n \in \mathbb{Z}$ e un elemento invertibile $b \in A$ tali che $a = bt^n$. Ne deduciamo che, se $n \geq 0$, allora $a \in A$, mentre $a^{-1} \in A$ se $n \leq 0$. Questo dimostra che A è un anello di valutazione. Si osservi infine che A è un anello di valutazione discreta perché verifica la condizione (i) della proposizione 27. In effetti, l'anello A è noetheriano per ipotesi e, per il punto (a) dell'osservazione 4, non è un campo essendo $\dim A = 1$. $\square$

Osservazione 30.

(a) La proposizione 29 ci dice che gli anelli locali regolari di dimensione 1 sono esattamente gli anelli di valutazione discreta. Inoltre, l'affermazione aggiuntiva della proposizione 27 dimostra che, in effetti, la "valutazione" che abbiamo costruito nel lemma 13 è una valutazione nel senso della definizione 15.

(b) Finora conosciamo due condizioni sugli anelli che, geometricamente, corrispondono a una nozione di "non singolarità": la normalità e la regolarità. L'equivalenza dei punti (iv) e (v) della proposizione 29 ci dice che le due nozioni coincidono nel caso unidimensionale. Si può dimostrare, però, che questo non è più valido se la dimensione è strettamente maggiore di 1. Da una parte, infatti, gli anelli locali regolari sono normali: i due matematici Maurice Auslander e David Buchsbaum hanno dimostrato, nell'articolo [2], che gli anelli locali regolari sono domini a fattorizzazione unica e sappiamo già che questi ultimi sono normali. Non vale invece il viceversa, perché si possono trovare esempi di domini normali che non sono anelli locali regolari.

Possiamo dare una descrizione molto semplice degli ideali in un anello di valutazione discreta.

Corollario 31 (Ideali in un anello di valutazione discreta)**.** *Sia A un anello di valutazione discreta con ideale massimale $\mathfrak{m}$. Allora gli ideali non banali di A sono esattamente le potenze $\mathfrak{m}^n$ al variare dell'intero $n \geq 0$ e formano una catena strettamente discendente:*

$$A = \mathfrak{m}^0 \supsetneq \mathfrak{m}^1 \supsetneq \mathfrak{m}^2 \supsetneq \cdots$$

In particolare, l'anello A non è artiniano.

Dimostrazione. Per la proposizione 27, ogni ideale non nullo di A è principale e della forma $\mathfrak{m}^n$ per un certo intero $n \geq 0$. Inoltre, esiste $t \in A$ tale che $\mathfrak{m} = (t)$. Osserviamo adesso che gli ideali di A formano una catena strettamente discendente. Per dimostrarlo, supponiamo per assurdo che $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1} = \mathfrak{m}^n\mathfrak{m}$ per un qualche intero $n \geq 0$ e notiamo che:

(1) Essendo A un anello noetheriano per definizione, l'ideale $\mathfrak{m}^n$ è finitamente generato.

(2) Essendo $\mathfrak{m}$ l'unico ideale massimale di A, si ha $\operatorname{Jac}(A) = \mathfrak{m}$.

Per il lemma di Nakayama, otteniamo dunque che $\mathfrak{m}^n = 0$. Ne segue che $t^n = 0$, quindi $t = 0$ perché A è un dominio di integrità. E allora si ha $\mathfrak{m} = 0$, ma questo è assurdo perché A non è un campo per definizione. $\square$

Infine, la valutazione in un anello di valutazione discreta si può anche esprimere in termini di lunghezza di moduli.

Corollario 32 (Valutazione e lunghezza)**.** *Sia A un anello di valutazione discreta. Per ogni $a \in A$, se $a \neq 0$:*

$$\nu(a) = \ell_A(A/(a))$$

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{m}$ l'ideale massimale di A. Per definizione, esiste $t \in A$ tale che $\mathfrak{m} = (t)$. L'affermazione aggiuntiva della proposizione 27 ci dice che, se $\nu\colon \mathbb{K}^* \to G$ è la valutazione associata ad A e $n := \nu(a)$, allora $(a) = \mathfrak{m}^n = (t^n)$. Consideriamo ora la seguente catena strettamente discendente di A-sottomoduli di $A/(a)$:

$$A/(a) = (t^0)/(a) \supsetneq \cdots \supsetneq (t^{n-1})/(a) \supsetneq (t^n)/(a) = 0$$

Se dimostriamo che questa è una serie di composizione per $A/(a)$, possiamo concludere che $\ell_A(A/(a)) = n$. Osserviamo, innanzitutto, che in effetti le inclusioni sono strette. Per giustificarlo, supponiamo per assurdo che $(t^{i-1})/(a) = (t^i)/(a)$ per qualche indice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Se indichiamo le classi laterali con la notazione della barretta in alto, allora $\bar{t}^{i-1} \in (\bar{t}^i) = (t^i)/(a)$. Di conseguenza:

$$\begin{aligned}
&\exists\, b \in A\colon \bar{t}^{i-1} = \overline{bt^i} \\
&\implies (1 - bt)t^{i-1} \in (a) = (t^n) \\
&\implies \exists\, c \in A\colon (1 - bt)t^{i-1} = ct^n \\
&\implies 1 - bt = ct^{n-i+1} \\
&\implies (b + ct^{n-i})t = 1
\end{aligned}$$

Otteniamo perciò che $t \in A$ è un elemento invertibile, quindi $\mathfrak{m} = (t) = A$, ma questo contraddice il fatto che $\mathfrak{m}$ sia un ideale massimale. Ci resta da dimostrare che la catena è massimale, cioè che non è possibile inserire altri sottomoduli nella catena. Per farlo, grazie al terzo teorema di isomorfismo, sarà sufficiente dimostrare che $(t^{i-1})/(t^i)$ è semplice, cioè non contiene sottomoduli non banali, per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$. Fissiamo allora un tale indice i. Se dimostriamo che $(t^{i-1})/(t^i) \simeq A/\mathfrak{m}$ abbiamo finito, perché $A/\mathfrak{m}$ è semplice in virtù della corrispondenza:

$$\{A\text{-sottomoduli di } A/\mathfrak{m}\} \longleftrightarrow \{A\text{-sottomoduli di } A, \text{ cioè ideali di } A, \text{ contenenti } \mathfrak{m}\}$$

Si consideri allora l'omomorfismo di A-moduli suriettivo $\varphi\colon A \to (t^{i-1})/(t^i)$ definito ponendo $\varphi(c) := \overline{ct^{i-1}}$. Per concludere la dimostrazione, basterà applicare il primo teorema di isomorfismo e calcolare il nucleo di φ:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} \varphi &= \{c \in A\colon ct^{i-1} \in (t^i)\} \\
&= \{c \in A\colon ct^{i-1} = bt^i,\ \exists\, b \in A\} \\
&= \{c \in A\colon c = bt,\ \exists\, b \in A\} = (t) = \mathfrak{m}
\end{aligned}$$

□

Riferimenti bibliografici

[1] Michael Atiyah. *Introduction to commutative algebra*. CRC Press, 2018.

[2] Maurice Auslander and David A Buchsbaum. Unique factorization in regular local rings. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 45(5):733, 1959.

[3] Andreas Gathmann. Commutative algebra.