Anelli di valutazione

Raffaele Di Donna

8 febbraio 2021

Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica

Piano della presentazione

Introduzione: motivazione geometrica

Definizione, esempi e proprietà

Caratterizzazione degli anelli di valutazione

Anelli di valutazione discreta

Introduzione: motivazione geometrica

Anelli locali regolari di dimensione 1

Anelli locali regolari di dimensione 1

Definizione (Dimensione)

La dimensione di Krull di un anello A è la massima lunghezza di una catena di ideali primi di A del tipo:

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n$$

Anelli locali regolari di dimensione 1

Definizione (Dimensione)

La dimensione di Krull di un anello A è la massima lunghezza di una catena di ideali primi di A del tipo:

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n$$

La dimensione di un insieme algebrico $X \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ è:

$$\dim X := \dim \mathcal{A}(X)$$

Anelli locali regolari di dimensione 1

Definizione (Regolarità)

Sia A anello locale con ideale massimale $\mathfrak{m}$ e sia $\mathbb{K} = A/\mathfrak{m}$. Diciamo che A è regolare se è un anello noetheriano e se:

$$\dim A = \dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$$

Anelli locali regolari di dimensione 1

Definizione (Regolarità)

Sia A anello locale con ideale massimale $\mathfrak{m}$ e sia $\mathbb{K} = A/\mathfrak{m}$. Diciamo che A è regolare se è un anello noetheriano e se:

$$\dim A = \dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$$

Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ un insieme algebrico. Un punto $x \in X$ viene detto regolare se, posto $\mathfrak{m} = \mathcal{I}_{x/X}$, la localizzazione $\mathcal{A}(X)_{\mathfrak{m}}$ è un anello locale regolare.

Verso un lemma chiave

Proposizione

Ogni anello locale regolare è un dominio di integrità.

Verso un lemma chiave

Proposizione

Ogni anello locale regolare è un dominio di integrità.

Dimostrazione (Idea)

Sia A un anello locale regolare di dimensione n con ideale massimale $\mathfrak{m}$ e sia $\mathbb{K} := A/\mathfrak{m}$.

Verso un lemma chiave

Proposizione

Ogni anello locale regolare è un dominio di integrità.

Dimostrazione (Idea)

Sia A un anello locale regolare di dimensione n con ideale massimale $\mathfrak{m}$ e sia $\mathbb{K} := A/\mathfrak{m}$. Induzione su $n \geq 0$.

Verso un lemma chiave

Proposizione

Ogni anello locale regolare è un dominio di integrità.

Dimostrazione (Idea)

Sia A un anello locale regolare di dimensione n con ideale massimale $\mathfrak{m}$ e sia $\mathbb{K} := A/\mathfrak{m}$. Induzione su $n \geq 0$.

- Base ($n = 0$).

Verso un lemma chiave

Proposizione

Ogni anello locale regolare è un dominio di integrità.

Dimostrazione (Idea)

Sia A un anello locale regolare di dimensione n con ideale massimale $\mathfrak{m}$ e sia $\mathbb{K} := A/\mathfrak{m}$. Induzione su $n \geq 0$.

- Base ($n = 0$).

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 0$$

Verso un lemma chiave

Proposizione

Ogni anello locale regolare è un dominio di integrità.

Dimostrazione (Idea)

Sia A un anello locale regolare di dimensione n con ideale massimale $\mathfrak{m}$ e sia $\mathbb{K} := A/\mathfrak{m}$. Induzione su $n \geq 0$.

- Base ($n = 0$).

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 0$$
$$\implies \mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$$

Verso un lemma chiave

Proposizione

Ogni anello locale regolare è un dominio di integrità.

Dimostrazione (Idea)

Sia A un anello locale regolare di dimensione n con ideale massimale $\mathfrak{m}$ e sia $\mathbb{K} := A/\mathfrak{m}$. Induzione su $n \geq 0$.

- Base ($n = 0$).

$$\begin{aligned} &\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 0 \\ &\implies \mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2 \\ &\implies \mathfrak{m} = 0 \text{ (Nakayama)} \end{aligned}$$

Verso un lemma chiave

- Passo ($n \geq 1$).

Verso un lemma chiave

- Passo ($n \geq 1$). Si trova un elemento $a \in \mathfrak{m}$ tale che il quoziente $A/(a)$ sia un anello locale regolare di dimensione $n - 1$.

Verso un lemma chiave

- Passo ($n \geq 1$). Si trova un elemento $a \in \mathfrak{m}$ tale che il quoziente $A/(a)$ sia un anello locale regolare di dimensione $n - 1$. Usando poi l'ipotesi induttiva e il lemma di Nakayama si ottiene la tesi. $\square$

Verso un lemma chiave

Lemma

Sia A un anello locale regolare di dimensione 1.

Verso un lemma chiave

Lemma

Sia A un anello locale regolare di dimensione 1.

(i) L'ideale massimale $\mathfrak{m}$ di A è principale non nullo.

Verso un lemma chiave

Lemma

Sia A un anello locale regolare di dimensione 1.

(i) L'ideale massimale $\mathfrak{m}$ di A è principale non nullo.

Dimostrazione

Basta utilizzare il fatto che $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$

Verso un lemma chiave

Lemma

Sia A un anello locale regolare di dimensione 1.

(i) L'ideale massimale $\mathfrak{m}$ di A è principale non nullo.

Dimostrazione

Basta utilizzare il fatto che $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim A$

Verso un lemma chiave

Lemma

Sia A un anello locale regolare di dimensione 1.

(i) L'ideale massimale $\mathfrak{m}$ di A è principale non nullo.

Dimostrazione

Basta utilizzare il fatto che $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim A = 1$

Verso un lemma chiave

Lemma

Sia A un anello locale regolare di dimensione 1.

(i) L'ideale massimale $\mathfrak{m}$ di A è principale non nullo.

Dimostrazione

Basta utilizzare il fatto che $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim A = 1$ è il minimo numero di generatori di $\mathfrak{m}$. $\square$

Verso un lemma chiave

(ii) Per ogni $a \in A$ con $a \neq 0$ esiste un unico intero $n \geq 0$, detto la valutazione di a, tale che $(a) = \mathfrak{m}^n$.

Verso un lemma chiave

(ii) Per ogni $a \in A$ con $a \neq 0$ esiste un unico intero $n \geq 0$, detto la valutazione di a, tale che $(a) = \mathfrak{m}^n$.

Dimostrazione (Idea)

Bisogna innanzitutto osservare che 0 e $\mathfrak{m}$ sono gli unici ideali primi di A. Questo è garantito dall'ipotesi che $\dim A = 1$.

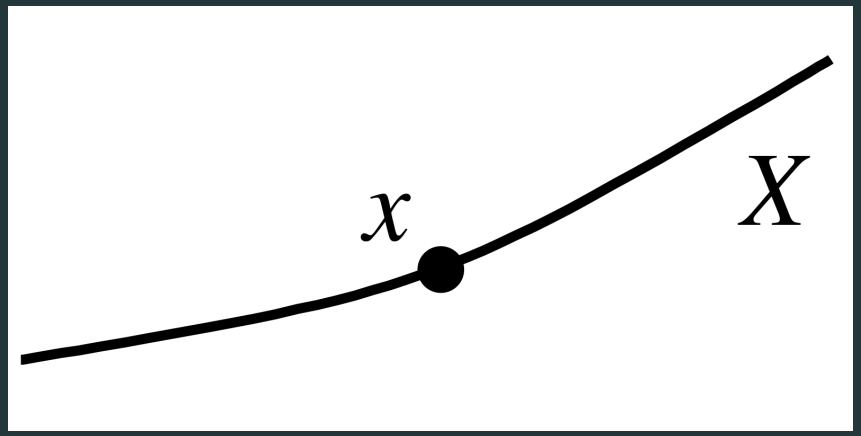
Verso un lemma chiave

(ii) Per ogni $a \in A$ con $a \neq 0$ esiste un unico intero $n \geq 0$, detto la valutazione di a, tale che $(a) = \mathfrak{m}^n$.

Dimostrazione (Idea)

Bisogna innanzitutto osservare che 0 e $\mathfrak{m}$ sono gli unici ideali primi di A. Questo è garantito dall'ipotesi che $\dim A = 1$. Per la parte successiva si usano ragionamenti per assurdo. $\square$

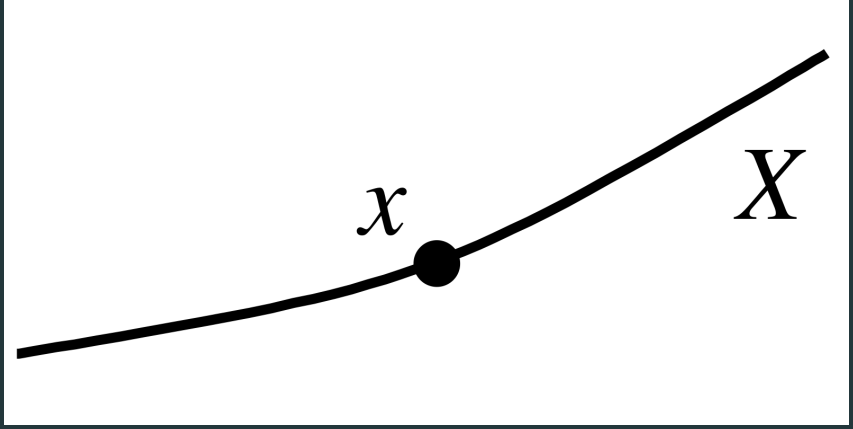
Interpretazione geometrica: ordini di svanimento



Osservazione

Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ una curva, cioè $\dim X = 1$

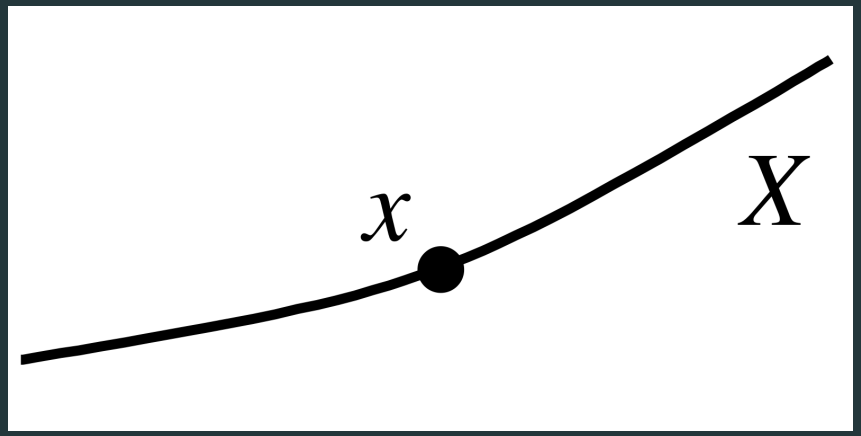
Interpretazione geometrica: ordini di svanimento



Osservazione

Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ una curva, cioè $\dim X = 1$ e sia $x \in X$ un punto regolare.

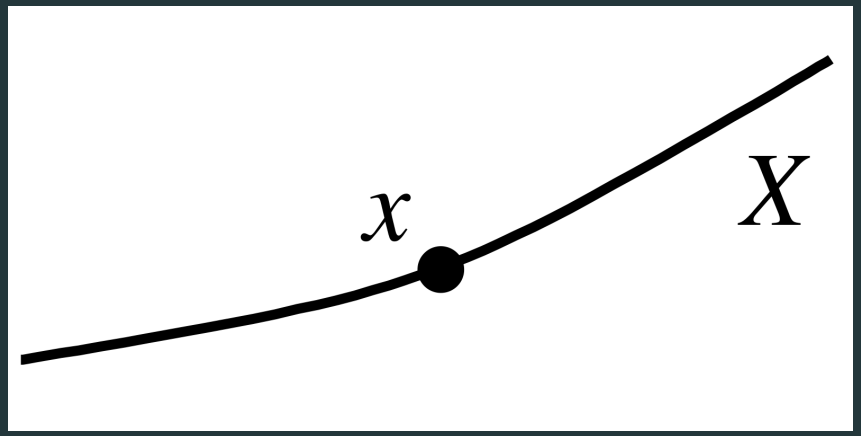
Interpretazione geometrica: ordini di svanimento



Osservazione

Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ una curva, cioè $\dim X = 1$ e sia $x \in X$ un punto regolare. Sia inoltre $\mathfrak{m} := \mathcal{I}_{x/X}$.

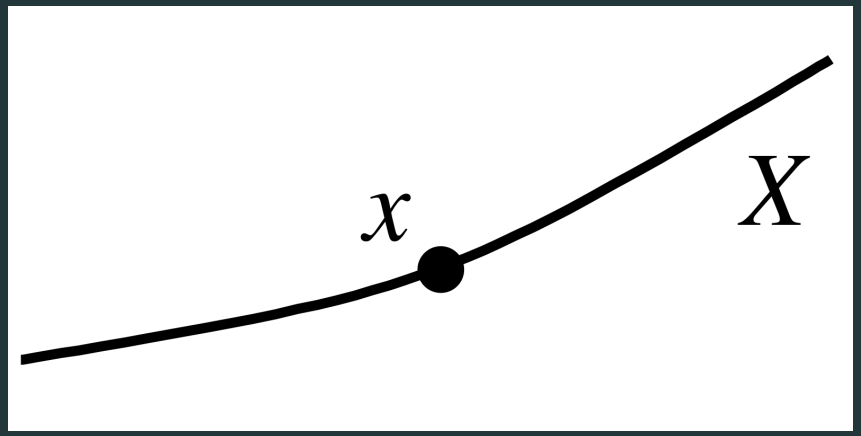
Interpretazione geometrica: ordini di svanimento



Osservazione

Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ una curva, cioè $\dim X = 1$ e sia $x \in X$ un punto regolare. Sia inoltre $\mathfrak{m} := \mathcal{I}_{x/X}$. Allora $\mathcal{A}(X)_{\mathfrak{m}}$ è un anello locale

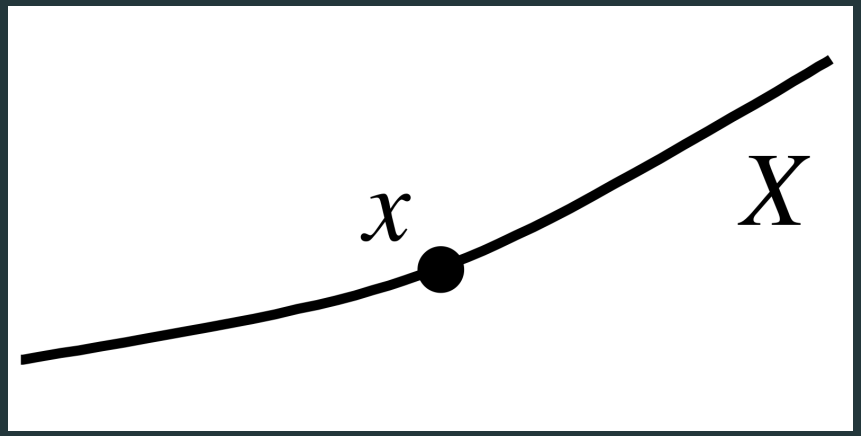
Interpretazione geometrica: ordini di svanimento



Osservazione

Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ una curva, cioè $\dim X = 1$ e sia $x \in X$ un punto regolare. Sia inoltre $\mathfrak{m} := \mathcal{I}_{x/X}$. Allora $\mathcal{A}(X)_{\mathfrak{m}}$ è un anello locale regolare

Interpretazione geometrica: ordini di svanimento



Osservazione

Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ una curva, cioè $\dim X = 1$ e sia $x \in X$ un punto regolare. Sia inoltre $\mathfrak{m} := \mathcal{I}_{x/X}$. Allora $\mathcal{A}(X)_{\mathfrak{m}}$ è un anello locale regolare di dimensione 1.

Interpretazione geometrica: ordini di svanimento

L'unico ideale massimale di $\mathcal{A}(X)_{\mathfrak{m}}$ è:

$$\mathfrak{m}^{\mathrm{e}} = \left\{ \frac{f}{g} : f \in \mathfrak{m},\ g \in \mathcal{A}(X) \setminus \mathfrak{m} \right\}$$

Interpretazione geometrica: ordini di svanimento

L'unico ideale massimale di $\mathcal{A}(X)_{\mathfrak{m}}$ è:

$$\mathfrak{m}^{\mathrm{e}} = \left\{ \frac{f}{g} : f \in \mathfrak{m},\, g \in \mathcal{A}(X) \setminus \mathfrak{m} \right\}$$

Per il punto (i) del lemma, esiste una funzione locale $\tau = t/s$ con $t \neq 0$, che si può pensare come una coordinata locale, tale che:

$$\mathfrak{m}^{\mathrm{e}} = (\tau)$$

Interpretazione geometrica: ordini di svanimento

Per il punto (ii) del lemma, se $\alpha = f/g$ è una funzione locale in x con $f \neq 0$, allora esiste un unico intero $n \geq 0$ tale che:

$$(\alpha) = (\tau^n)$$

Interpretazione geometrica: ordini di svanimento

Per il punto (ii) del lemma, se $\alpha = f/g$ è una funzione locale in x con $f \neq 0$, allora esiste un unico intero $n \geq 0$ tale che:

$$(\alpha) = (\tau^n)$$

Esiste dunque un elemento invertibile $\beta \in \mathcal{A}(X)_{\mathfrak{m}}$ tale che:

$$\alpha = \beta\tau^n$$

Interpretazione geometrica: ordini di svanimento

Per il punto (ii) del lemma, se $\alpha = f/g$ è una funzione locale in x con $f \neq 0$, allora esiste un unico intero $n \geq 0$ tale che:

$$(\alpha) = (\tau^n)$$

Esiste dunque un elemento invertibile $\beta \in \mathcal{A}(X)_{\mathfrak{m}}$ tale che:

$$\alpha = \beta\tau^n$$

Possiamo pensare n come l'ordine di svanimento di α in x.

Definizione, esempi e proprietà

Definizione

(a) Un gruppo ordinato è un gruppo abeliano G con una relazione d'ordine totale $\leq$ tale che, per ogni $m, n, k \in G$, se $m \leq n$, allora $m + k \leq n + k$.

Definizione

(a) Un gruppo ordinato è un gruppo abeliano G con una relazione d'ordine totale $\leq$ tale che, per ogni $m, n, k \in G$, se $m \leq n$, allora $m + k \leq n + k$.

(b) Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia G un gruppo ordinato.

Valutazioni e anelli di valutazione

Definizione

(a) Un gruppo ordinato è un gruppo abeliano G con una relazione d'ordine totale $\leq$ tale che, per ogni $m, n, k \in G$, se $m \leq n$, allora $m + k \leq n + k$.

(b) Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia G un gruppo ordinato. Una mappa $v : \mathbb{K}^* \to G$ si dice una valutazione su $\mathbb{K}$ se soddisfa, per ogni $a, b \in \mathbb{K}^*$, le due condizioni seguenti:

Valutazioni e anelli di valutazione

Definizione

(a) Un gruppo ordinato è un gruppo abeliano G con una relazione d'ordine totale $\leq$ tale che, per ogni $m, n, k \in G$, se $m \leq n$, allora $m + k \leq n + k$.

(b) Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia G un gruppo ordinato. Una mappa $v : \mathbb{K}^* \to G$ si dice una valutazione su $\mathbb{K}$ se soddisfa, per ogni $a, b \in \mathbb{K}^*$, le due condizioni seguenti:

   (i) $v(ab) = v(a) + v(b)$.

Valutazioni e anelli di valutazione

Definizione

(a) Un gruppo ordinato è un gruppo abeliano G con una relazione d'ordine totale $\leq$ tale che, per ogni $m, n, k \in G$, se $m \leq n$, allora $m + k \leq n + k$.

(b) Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia G un gruppo ordinato. Una mappa $v : \mathbb{K}^* \to G$ si dice una valutazione su $\mathbb{K}$ se soddisfa, per ogni $a, b \in \mathbb{K}^*$, le due condizioni seguenti:

  (i) $v(ab) = v(a) + v(b)$.

  (ii) $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$ se $a + b \neq 0$.

Valutazioni e anelli di valutazione

Definizione

(a) Un gruppo ordinato è un gruppo abeliano G con una relazione d'ordine totale $\leq$ tale che, per ogni $m, n, k \in G$, se $m \leq n$, allora $m + k \leq n + k$.

(b) Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia G un gruppo ordinato. Una mappa $v : \mathbb{K}^* \to G$ si dice una valutazione su $\mathbb{K}$ se soddisfa, per ogni $a, b \in \mathbb{K}^*$, le due condizioni seguenti:

  (i) $v(ab) = v(a) + v(b)$.

  (ii) $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$ se $a + b \neq 0$.

  Talvolta si pone formalmente $v(0) := \infty$.

Valutazioni e anelli di valutazione

L'immagine di v è detta gruppo dei valori di v.

Valutazioni e anelli di valutazione

L'immagine di v è detta gruppo dei valori di v. Si dice invece anello di valutazione di v il seguente insieme:

$$A_v := \{a \in \mathbb{K} : v(a) \geq 0\}$$

Valutazioni e anelli di valutazione

L'immagine di v è detta gruppo dei valori di v. Si dice invece anello di valutazione di v il seguente insieme:

$$A_v := \{a \in \mathbb{K} : v(a) \geq 0\}$$

Esempio (Gruppi ordinati)

Sono gruppi ordinati gli insiemi numerici $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

Un esempio fondamentale

Esempio (Anelli di valutazione)

(a) Ogni campo $\mathbb{K}$ ammette l'applicazione nulla $v\colon \mathbb{K}^* \to 0$ come valutazione banale.

Un esempio fondamentale

Esempio (Anelli di valutazione)

(a) Ogni campo $\mathbb{K}$ ammette l'applicazione nulla $v\colon \mathbb{K}^* \to 0$ come valutazione banale. Il gruppo dei valori di v è il gruppo nullo, l'anello di valutazione di v è tutto $\mathbb{K}$.

Un esempio fondamentale

Esempio (Anelli di valutazione)

(a) Ogni campo $\mathbb{K}$ ammette l'applicazione nulla $v\colon \mathbb{K}^* \to 0$ come valutazione banale. Il gruppo dei valori di v è il gruppo nullo, l'anello di valutazione di v è tutto $\mathbb{K}$.

(b) Siano A un UFD, $p \in A$ irriducibile, $\mathbb{K} := \operatorname{Quot} A$.

Un esempio fondamentale

Esempio (Anelli di valutazione)

(a) Ogni campo $\mathbb{K}$ ammette l'applicazione nulla $v\colon \mathbb{K}^* \to 0$ come valutazione banale. Il gruppo dei valori di v è il gruppo nullo, l'anello di valutazione di v è tutto $\mathbb{K}$.

(b) Siano A un UFD, $p \in A$ irriducibile, $\mathbb{K} := \operatorname{Quot} A$. Allora:

$$\forall\, x \in A\ \exists!\, n \geq 0,\ a \in A\colon\ x = ap^n,\ p \nmid a$$

Un esempio fondamentale

Esempio (Anelli di valutazione)

(a) Ogni campo $\mathbb{K}$ ammette l'applicazione nulla $v\colon \mathbb{K}^* \to 0$ come valutazione banale. Il gruppo dei valori di v è il gruppo nullo, l'anello di valutazione di v è tutto $\mathbb{K}$.

(b) Siano A un UFD, $p \in A$ irriducibile, $\mathbb{K} := \operatorname{Quot} A$. Allora:

$$\forall\, x \in A\ \exists!\, n \geq 0,\ a \in A\colon\ x = ap^n,\ p \nmid a$$

$$\forall\, x \in \mathbb{K}^*\ \exists!\, n \in \mathbb{Z},\ \alpha = a/b \in \mathbb{K}^*\colon\ x = \alpha p^n,\ p \nmid a,\ p \nmid b$$

Un esempio fondamentale

La mappa $v\colon \mathbb{K}^* \to \mathbb{Z}$ definita da $v(\alpha p^n) := n$ è una valutazione su $\mathbb{K}$.

Un esempio fondamentale

La mappa $v\colon \mathbb{K}^* \to \mathbb{Z}$ definita da $v(\alpha p^n) := n$ è una valutazione su $\mathbb{K}$. Il gruppo dei valori di v è $\mathbb{Z}$.

Un esempio fondamentale

La mappa $v\colon \mathbb{K}^* \to \mathbb{Z}$ definita da $v(\alpha p^n) := n$ è una valutazione su $\mathbb{K}$. Il gruppo dei valori di v è $\mathbb{Z}$. Invece:

A_v

Un esempio fondamentale

La mappa $v\colon \mathbb{K}^* \to \mathbb{Z}$ definita da $v(\alpha p^n) := n$ è una valutazione su $\mathbb{K}$. Il gruppo dei valori di v è $\mathbb{Z}$. Invece:

$$A_v = \left\{ \frac{a}{b} p^n : a, b \in A,\ b \neq 0,\ n \geq 0,\ p \nmid a,\ p \nmid b \right\}$$

Un esempio fondamentale

La mappa $v\colon \mathbb{K}^* \to \mathbb{Z}$ definita da $v(\alpha p^n) := n$ è una valutazione su $\mathbb{K}$. Il gruppo dei valori di v è $\mathbb{Z}$. Invece:

$$\begin{aligned} A_v &= \left\{ \frac{a}{b} p^n : a, b \in A,\ b \neq 0,\ n \geq 0,\ p \nmid a,\ p \nmid b \right\} \\ &= \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in A,\ b \neq 0,\ p \nmid b \right\} \end{aligned}$$

Un esempio fondamentale

La mappa $v\colon \mathbb{K}^* \to \mathbb{Z}$ definita da $v(\alpha p^n) := n$ è una valutazione su $\mathbb{K}$. Il gruppo dei valori di v è $\mathbb{Z}$. Invece:

$$\begin{aligned} A_v &= \left\{ \frac{a}{b} p^n : a, b \in A,\ b \neq 0,\ n \geq 0,\ p \nmid a,\ p \nmid b \right\} \\ &= \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in A,\ b \neq 0,\ p \nmid b \right\} = A_{(p)} \end{aligned}$$

Un esempio fondamentale

La mappa $v\colon \mathbb{K}^* \to \mathbb{Z}$ definita da $v(\alpha p^n) := n$ è una valutazione su $\mathbb{K}$. Il gruppo dei valori di v è $\mathbb{Z}$. Invece:

$$\begin{aligned} A_v &= \left\{ \frac{a}{b} p^n : a, b \in A,\ b \neq 0,\ n \geq 0,\ p \nmid a,\ p \nmid b \right\} \\ &= \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in A,\ b \neq 0,\ p \nmid b \right\} = A_{(p)} \end{aligned}$$

Possiamo ripetere questa costruzione scegliendo $\mathbb{Z}$ oppure $\mathbb{K}[X_1, X_2, \dots, X_n]$ come UFD.

Proprietà degli anelli di valutazione

Lemma

Sia $v : \mathbb{K}^* \to G$ una valutazione e sia $A = A_v$.

Proprietà degli anelli di valutazione

Lemma

Sia $v : \mathbb{K}^* \to G$ una valutazione e sia $A = A_v$.

(i) Per ogni $a \in \mathbb{K}^*$ abbiamo che $a \in A$ oppure $a^{-1} \in A$.

Proprietà degli anelli di valutazione

Lemma

Sia $v : \mathbb{K}^* \to G$ una valutazione e sia $A = A_v$.

(i) Per ogni $a \in \mathbb{K}^*$ abbiamo che $a \in A$ oppure $a^{-1} \in A$.

(ii) Per ogni $a, b \in A$ si ha $v(a) \leq v(b)$ se e solo se $b \in (a)$.

Proprietà degli anelli di valutazione

Lemma

Sia $v : \mathbb{K}^* \to G$ una valutazione e sia $A = A_v$.

(i) Per ogni $a \in \mathbb{K}^*$ abbiamo che $a \in A$ oppure $a^{-1} \in A$.

(ii) Per ogni $a, b \in A$ si ha $v(a) \leq v(b)$ se e solo se $b \in (a)$.

(iii) Il gruppo degli elementi invertibili è $A^* = \{a \in A : v(a) = 0\}$.

Proprietà degli anelli di valutazione

Lemma

Sia $v\colon \mathbb{K}^* \to G$ una valutazione e sia $A = A_v$.

(i) Per ogni $a \in \mathbb{K}^*$ abbiamo che $a \in A$ oppure $a^{-1} \in A$.

(ii) Per ogni $a, b \in A$ si ha $v(a) \leq v(b)$ se e solo se $b \in (a)$.

(iii) Il gruppo degli elementi invertibili è $A^* = \{a \in A\colon v(a) = 0\}$.

(iv) Vale che A è un anello locale con ideale massimale $\mathfrak{m} := \{a \in A\colon v(a) > 0\}$.

Proprietà degli anelli di valutazione

Lemma

Sia $v\colon \mathbb{K}^* \to G$ una valutazione e sia $A = A_v$.

(i) Per ogni $a \in \mathbb{K}^*$ abbiamo che $a \in A$ oppure $a^{-1} \in A$.

(ii) Per ogni $a, b \in A$ si ha $v(a) \leq v(b)$ se e solo se $b \in (a)$.

(iii) Il gruppo degli elementi invertibili è $A^* = \{a \in A\colon v(a) = 0\}$.

(iv) Vale che A è un anello locale con ideale massimale $\mathfrak{m} := \{a \in A\colon v(a) > 0\}$.

(v) Vale che A è un dominio normale.

Caratterizzazione degli anelli di valutazione

Risalire alla valutazione a partire dal suo anello di valutazione

Osservazione

Sia $v : \mathbb{K}^* \to G$ una valutazione e sia $A := A_v$.

Risalire alla valutazione a partire dal suo anello di valutazione

Osservazione

Sia $v : \mathbb{K}^* \to G$ una valutazione e sia $A := A_v$. Assumiamo che v sia un'applicazione suriettiva.

Risalire alla valutazione a partire dal suo anello di valutazione

Osservazione

Sia $v : \mathbb{K}^* \to G$ una valutazione e sia $A := A_v$. Assumiamo che v sia un'applicazione suriettiva. Allora v può essere ricavata da A a meno di isomorfismo nel senso seguente:

Risalire alla valutazione a partire dal suo anello di valutazione

Osservazione

Sia $v : \mathbb{K}^* \to G$ una valutazione e sia $A := A_v$. Assumiamo che v sia un'applicazione suriettiva. Allora v può essere ricavata da A a meno di isomorfismo nel senso seguente:

(a) Si deve avere che $\mathbb{K} = \operatorname{Quot} A$.

Risalire alla valutazione a partire dal suo anello di valutazione

Osservazione

Sia $v : \mathbb{K}^* \to G$ una valutazione e sia $A := A_v$. Assumiamo che v sia un'applicazione suriettiva. Allora v può essere ricavata da A a meno di isomorfismo nel senso seguente:

(a) Si deve avere che $\mathbb{K} = \operatorname{Quot} A$.

(b) Vale che $\mathbb{K}^*/A^* \simeq G$

Risalire alla valutazione a partire dal suo anello di valutazione

Osservazione

Sia $v : \mathbb{K}^* \to G$ una valutazione e sia $A := A_v$. Assumiamo che v sia un'applicazione suriettiva. Allora v può essere ricavata da A a meno di isomorfismo nel senso seguente:

(a) Si deve avere che $\mathbb{K} = \operatorname{Quot} A$.

(b) Vale che $\mathbb{K}^*/A^* \simeq G$ e si ha un diagramma commutativo:

Risalire alla valutazione a partire dal suo anello di valutazione

Osservazione

Sia $v\colon \mathbb{K}^* \to G$ una valutazione e sia $A := A_v$. Assumiamo che v sia un'applicazione suriettiva. Allora v può essere ricavata da A a meno di isomorfismo nel senso seguente:

(a) Si deve avere che $\mathbb{K} = \operatorname{Quot} A$.

(b) Vale che $\mathbb{K}^*/A^* \simeq G$ e si ha un diagramma commutativo:

$$\mathbb{K}^* \xrightarrow{\;v\;} G$$

Risalire alla valutazione a partire dal suo anello di valutazione

Osservazione

Sia $v : \mathbb{K}^* \to G$ una valutazione e sia $A := A_v$. Assumiamo che v sia un'applicazione suriettiva. Allora v può essere ricavata da A a meno di isomorfismo nel senso seguente:

(a) Si deve avere che $\mathbb{K} = \operatorname{Quot} A$.

(b) Vale che $\mathbb{K}^*/A^* \simeq G$ e si ha un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^* \arrow[r, two heads, "v"] & G \\ & \mathbb{K}^*/A^* \arrow[u, hook, two heads] \end{tikzcd}$$

Risalire alla valutazione a partire dal suo anello di valutazione

Osservazione

Sia $v\colon \mathbb{K}^* \to G$ una valutazione e sia $A := A_v$. Assumiamo che v sia un'applicazione suriettiva. Allora v può essere ricavata da A a meno di isomorfismo nel senso seguente:

(a) Si deve avere che $\mathbb{K} = \operatorname{Quot} A$.

(b) Vale che $\mathbb{K}^*/A^* \simeq G$ e si ha un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^* \arrow[r, two heads, "v"] \arrow[dr, two heads, bend right, "\pi"'] & G \\
& \mathbb{K}^*/A^* \arrow[u, hook, two heads]
\end{tikzcd}$$

Risalire alla valutazione a partire dal suo anello di valutazione

(c) Dobbiamo ancora determinare la struttura di gruppo ordinato di G.

Risalire alla valutazione a partire dal suo anello di valutazione

(c) Dobbiamo ancora determinare la struttura di gruppo ordinato di G. In effetti, per ogni $a, b \in \mathbb{K}^*$, si ha che:

Risalire alla valutazione a partire dal suo anello di valutazione

(c) Dobbiamo ancora determinare la struttura di gruppo ordinato di G. In effetti, per ogni $a, b \in \mathbb{K}^*$, si ha che:

$$v(a) \leq v(b)$$

Risalire alla valutazione a partire dal suo anello di valutazione

(c) Dobbiamo ancora determinare la struttura di gruppo ordinato di G. In effetti, per ogni $a, b \in \mathbb{K}^*$, si ha che:

$$\begin{aligned} & v(a) \leq v(b) \\ \iff \quad & v(ba^{-1}) \geq 0 \end{aligned}$$

Risalire alla valutazione a partire dal suo anello di valutazione

(c) Dobbiamo ancora determinare la struttura di gruppo ordinato di G. In effetti, per ogni $a, b \in \mathbb{K}^*$, si ha che:

$$\begin{aligned} & v(a) \leq v(b) \\ \iff & v(ba^{-1}) \geq 0 \\ \iff & ba^{-1} \in A \end{aligned}$$

Caratterizzazione degli anelli di valutazione

Proposizione

Sia A un anello.

Caratterizzazione degli anelli di valutazione

Proposizione

Sia A un anello. Le seguenti asserzioni sono equivalenti:

Caratterizzazione degli anelli di valutazione

Proposizione

Sia A un anello. Le seguenti asserzioni sono equivalenti:

(i) Esiste una valutazione $v : \mathbb{K}^* \to G$ tale che $A = A_v$.

Caratterizzazione degli anelli di valutazione

Proposizione

Sia A un anello. Le seguenti asserzioni sono equivalenti:

(i) Esiste una valutazione $v : \mathbb{K}^* \to G$ tale che $A = A_v$.

(ii) Vale che A è un dominio di integrità e, per ogni $a \in (\operatorname{Quot} A) \setminus \{0\}$, abbiamo $a \in A$ oppure $a^{-1} \in A$.

Caratterizzazione degli anelli di valutazione

Proposizione

Sia A un anello. Le seguenti asserzioni sono equivalenti:

(i) Esiste una valutazione $v : \mathbb{K}^* \to G$ tale che $A = A_v$.

(ii) Vale che A è un dominio di integrità e, per ogni $a \in (\operatorname{Quot} A) \setminus \{0\}$, abbiamo $a \in A$ oppure $a^{-1} \in A$.

Dimostrazione

($\Downarrow$) Conseguenza immediata delle proprietà precedenti.

Caratterizzazione degli anelli di valutazione

Proposizione

Sia A un anello. Le seguenti asserzioni sono equivalenti:

(i) Esiste una valutazione $v : \mathbb{K}^* \to G$ tale che $A = A_v$.

(ii) Vale che A è un dominio di integrità e, per ogni $a \in (\operatorname{Quot} A) \setminus \{0\}$, abbiamo $a \in A$ oppure $a^{-1} \in A$.

Dimostrazione

($\Downarrow$) Conseguenza immediata delle proprietà precedenti.

($\Uparrow$) Poniamo $\mathbb{K} := \operatorname{Quot} A$ e $G := \mathbb{K}^*/A^*$.

Caratterizzazione degli anelli di valutazione

Poniamo $\bar{a} \leq \bar{b}$

Caratterizzazione degli anelli di valutazione

Poniamo $\bar{a} \leq \bar{b}$ se $ba^{-1} \in A$.

Caratterizzazione degli anelli di valutazione

Poniamo $\bar{a} \leq \bar{b}$ se $ba^{-1} \in A$.

- Buona definizione.

Caratterizzazione degli anelli di valutazione

Poniamo $\bar{a} \leq \bar{b}$ se $ba^{-1} \in A$.

- Buona definizione. Vediamo che, se $c, d \in A^*$, allora $\bar{a}\bar{c} \leq \bar{b}\bar{d}$.

Caratterizzazione degli anelli di valutazione

Poniamo $\bar{a} \leq \bar{b}$ se $ba^{-1} \in A$.

- Buona definizione. Vediamo che, se $c, d \in A^*$, allora $\bar{a}\bar{c} \leq \bar{b}\bar{d}$. In effetti, si ha $dc^{-1} \in A$

Caratterizzazione degli anelli di valutazione

Poniamo $\bar{a} \leq \bar{b}$ se $ba^{-1} \in A$.

- Buona definizione. Vediamo che, se $c, d \in A^*$, allora $\bar{a}\bar{c} \leq \bar{b}\bar{d}$. In effetti, si ha $dc^{-1} \in A$ e di conseguenza:

$$bd(ac)^{-1}$$

Caratterizzazione degli anelli di valutazione

Poniamo $\bar{a} \leq \bar{b}$ se $ba^{-1} \in A$.

- Buona definizione. Vediamo che, se $c, d \in A^*$, allora $\bar{a}\bar{c} \leq \bar{b}\bar{d}$. In effetti, si ha $dc^{-1} \in A$ e di conseguenza:

$$bd(ac)^{-1} = (ba^{-1})(dc^{-1})$$

Caratterizzazione degli anelli di valutazione

Poniamo $\bar{a} \leq \bar{b}$ se $ba^{-1} \in A$.

- Buona definizione. Vediamo che, se $c, d \in A^*$, allora $\bar{a}\bar{c} \leq \bar{b}\bar{d}$. In effetti, si ha $dc^{-1} \in A$ e di conseguenza:

$$bd(ac)^{-1} = (ba^{-1})(dc^{-1})$$

Caratterizzazione degli anelli di valutazione

Poniamo $\bar{a} \leq \bar{b}$ se $ba^{-1} \in A$.

- Buona definizione. Vediamo che, se $c, d \in A^*$, allora $\bar{a}\bar{c} \leq \bar{b}\bar{d}$. In effetti, si ha $dc^{-1} \in A$ e di conseguenza:

$$bd(ac)^{-1} = (ba^{-1})(dc^{-1}) \in A$$

Caratterizzazione degli anelli di valutazione

Poniamo $\bar{a} \leq \bar{b}$ se $ba^{-1} \in A$.

- Buona definizione. Vediamo che, se $c, d \in A^*$, allora $\bar{a}\bar{c} \leq \bar{b}\bar{d}$. In effetti, si ha $dc^{-1} \in A$ e di conseguenza:

$$bd(ac)^{-1} = (ba^{-1})(dc^{-1}) \in A$$

- Ordine parziale. Facile esercizio.

Caratterizzazione degli anelli di valutazione

Poniamo $\bar{a} \leq \bar{b}$ se $ba^{-1} \in A$.

- Buona definizione. Vediamo che, se $c, d \in A^*$, allora $\bar{a}\bar{c} \leq \bar{b}\bar{d}$. In effetti, si ha $dc^{-1} \in A$ e di conseguenza:

$$bd(ac)^{-1} = (ba^{-1})(dc^{-1}) \in A$$

- Ordine parziale. Facile esercizio.
- Ordine totale.

Caratterizzazione degli anelli di valutazione

Poniamo $\bar{a} \leq \bar{b}$ se $ba^{-1} \in A$.

- Buona definizione. Vediamo che, se $c, d \in A^*$, allora $\bar{a}\bar{c} \leq \bar{b}\bar{d}$. In effetti, si ha $dc^{-1} \in A$ e di conseguenza:

$$bd(ac)^{-1} = (ba^{-1})(dc^{-1}) \in A$$

- Ordine parziale. Facile esercizio.
- Ordine totale. Per ogni $a, b \in \mathbb{K}^*$, abbiamo:

Caratterizzazione degli anelli di valutazione

Poniamo $\bar{a} \leq \bar{b}$ se $ba^{-1} \in A$.

- Buona definizione. Vediamo che, se $c, d \in A^*$, allora $\bar{a}\bar{c} \leq \bar{b}\bar{d}$. In effetti, si ha $dc^{-1} \in A$ e di conseguenza:

$$bd(ac)^{-1} = (ba^{-1})(dc^{-1}) \in A$$

- Ordine parziale. Facile esercizio.
- Ordine totale. Per ogni $a, b \in \mathbb{K}^*$, abbiamo:

$$ba^{-1} \in \mathbb{K}^*$$

Caratterizzazione degli anelli di valutazione

Poniamo $\bar{a} \leq \bar{b}$ se $ba^{-1} \in A$.

- Buona definizione. Vediamo che, se $c, d \in A^*$, allora $\bar{a}\bar{c} \leq \bar{b}\bar{d}$. In effetti, si ha $dc^{-1} \in A$ e di conseguenza:

$$bd(ac)^{-1} = (ba^{-1})(dc^{-1}) \in A$$

- Ordine parziale. Facile esercizio.
- Ordine totale. Per ogni $a, b \in \mathbb{K}^*$, abbiamo:

$$ba^{-1} \in \mathbb{K}^*$$
$$\implies ba^{-1} \in A \text{ oppure } ab^{-1} \in A \ (\textit{ipotesi})$$

Caratterizzazione degli anelli di valutazione

Poniamo $\bar{a} \leq \bar{b}$ se $ba^{-1} \in A$.

- Buona definizione. Vediamo che, se $c, d \in A^*$, allora $\bar{a}\bar{c} \leq \bar{b}\bar{d}$. In effetti, si ha $dc^{-1} \in A$ e di conseguenza:

$$bd(ac)^{-1} = (ba^{-1})(dc^{-1}) \in A$$

- Ordine parziale. Facile esercizio.
- Ordine totale. Per ogni $a, b \in \mathbb{K}^*$, abbiamo:

$$\begin{aligned} & ba^{-1} \in \mathbb{K}^* \\ & \implies ba^{-1} \in A \text{ oppure } ab^{-1} \in A \ (\textit{ipotesi}) \\ & \implies \bar{a} \leq \bar{b} \text{ oppure } \bar{b} \leq \bar{a} \end{aligned}$$

Caratterizzazione degli anelli di valutazione

Definiamo $v\colon \mathbb{K}^* \to G$ come la mappa quoziente.

Caratterizzazione degli anelli di valutazione

Definiamo $v : \mathbb{K}^* \to G$ come la mappa quoziente. Allora, per ogni $a, b \in \mathbb{K}^*$, si ha:

$$v(a) \leq v(b) \iff ba^{-1} \in A$$

Caratterizzazione degli anelli di valutazione

Definiamo $v : \mathbb{K}^* \to G$ come la mappa quoziente. Allora, per ogni $a, b \in \mathbb{K}^*$, si ha:

$$v(a) \leq v(b) \iff ba^{-1} \in A$$

Da questo segue che v è una valutazione su $\mathbb{K}$.

Caratterizzazione degli anelli di valutazione

Definiamo $v : \mathbb{K}^* \to G$ come la mappa quoziente. Allora, per ogni $a, b \in \mathbb{K}^*$, si ha:

$$v(a) \leq v(b) \iff ba^{-1} \in A$$

Da questo segue che v è una valutazione su $\mathbb{K}$. Infine, si ha $A = A_v$ perché, per ogni $b \in \mathbb{K}^*$, abbiamo:

Caratterizzazione degli anelli di valutazione

Definiamo $v : \mathbb{K}^* \to G$ come la mappa quoziente. Allora, per ogni $a, b \in \mathbb{K}^*$, si ha:

$$v(a) \leq v(b) \iff ba^{-1} \in A$$

Da questo segue che v è una valutazione su $\mathbb{K}$. Infine, si ha $A = A_v$ perché, per ogni $b \in \mathbb{K}^*$, abbiamo:

$$v(b) \geq 0 = v(1) \iff b \in A \qquad \square$$

Ingrandire anelli di valutazione

Lemma

Sia A un anello di valutazione e sia A' un anello tale che $A \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A$ come sottoanelli.

Ingrandire anelli di valutazione

Lemma

Sia A un anello di valutazione e sia A' un anello tale che $A \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A$ come sottoanelli. Allora anche A' è un anello di valutazione e $\operatorname{Quot} A' = \operatorname{Quot} A$.

Ingrandire anelli di valutazione

Lemma

Sia A un anello di valutazione e sia A' un anello tale che $A \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A$ come sottoanelli. Allora anche A' è un anello di valutazione e $\operatorname{Quot} A' = \operatorname{Quot} A$.

Dimostrazione

L'identità $\operatorname{Quot} A' = \operatorname{Quot} A$ segue dalla proprietà universale del campo dei quozienti e dalle inclusioni $A \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A$.

Ingrandire anelli di valutazione

Lemma

Sia A un anello di valutazione e sia A' un anello tale che $A \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A$ come sottoanelli. Allora anche A' è un anello di valutazione e $\operatorname{Quot} A' = \operatorname{Quot} A$.

Dimostrazione

L'identità $\operatorname{Quot} A' = \operatorname{Quot} A$ segue dalla proprietà universale del campo dei quozienti e dalle inclusioni $A \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A$. Per concludere che A' è un anello di valutazione basta osservare che, per ogni $a \in \operatorname{Quot} A' = \operatorname{Quot} A$ con $a \neq 0$,

Ingrandire anelli di valutazione

Lemma

Sia A un anello di valutazione e sia A' un anello tale che $A \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A$ come sottoanelli. Allora anche A' è un anello di valutazione e $\operatorname{Quot} A' = \operatorname{Quot} A$.

Dimostrazione

L'identità $\operatorname{Quot} A' = \operatorname{Quot} A$ segue dalla proprietà universale del campo dei quozienti e dalle inclusioni $A \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A$. Per concludere che A' è un anello di valutazione basta osservare che, per ogni $a \in \operatorname{Quot} A' = \operatorname{Quot} A$ con $a \neq 0$,

Ingrandire anelli di valutazione

Lemma

Sia A un anello di valutazione e sia A' un anello tale che $A \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A$ come sottoanelli. Allora anche A' è un anello di valutazione e $\operatorname{Quot} A' = \operatorname{Quot} A$.

Dimostrazione

L'identità $\operatorname{Quot} A' = \operatorname{Quot} A$ segue dalla proprietà universale del campo dei quozienti e dalle inclusioni $A \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A$. Per concludere che A' è un anello di valutazione basta osservare che, per ogni $a \in \operatorname{Quot} A' = \operatorname{Quot} A$ con $a \neq 0$, si ha $a \in A \subseteq A'$ oppure $a^{-1} \in A \subseteq A'$.

Ingrandire anelli di valutazione

Lemma

Sia A un anello di valutazione e sia A' un anello tale che $A \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A$ come sottoanelli. Allora anche A' è un anello di valutazione e $\operatorname{Quot} A' = \operatorname{Quot} A$.

Dimostrazione

L'identità $\operatorname{Quot} A' = \operatorname{Quot} A$ segue dalla proprietà universale del campo dei quozienti e dalle inclusioni $A \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A$. Per concludere che A' è un anello di valutazione basta osservare che, per ogni $a \in \operatorname{Quot} A' = \operatorname{Quot} A$ con $a \neq 0$, si ha $a \in A \subseteq A'$ oppure $a^{-1} \in A \subseteq A'$. $\square$

Chiusura integrale da anelli di valutazione

Proposizione

Sia A un dominio di integrità.

Chiusura integrale da anelli di valutazione

Proposizione

Sia A un dominio di integrità. Allora:

$$\bar{A} = \bigcap_{\substack{A' \text{ anello di valutazione con} \\ A \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A \text{ come sottoanelli}}} A'$$

Chiusura integrale da anelli di valutazione

Proposizione

Sia A un dominio di integrità. Allora:

$$\bar{A} = \bigcap_{\substack{A' \text{ anello di valutazione con} \\ A \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A \text{ come sottoanelli}}} A'$$

Dimostrazione (Idea)

($\subseteq$) Sia $x \in \bar{A}$

Chiusura integrale da anelli di valutazione

Proposizione

Sia A un dominio di integrità. Allora:

$$\bar{A} = \bigcap_{\substack{A' \text{ anello di valutazione con} \\ A \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A \text{ come sottoanelli}}} A'$$

Dimostrazione (Idea)

($\subseteq$) Sia $x \in \bar{A}$ e sia A' un anello di valutazione con $A \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A$ come sottoanelli.

Chiusura integrale da anelli di valutazione

Proposizione

Sia A un dominio di integrità. Allora:

$$\bar{A} = \bigcap_{\substack{A' \text{ anello di valutazione con} \\ A \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A \text{ come sottoanelli}}} A'$$

Dimostrazione (Idea)

($\subseteq$) Sia $x \in \bar{A}$ e sia A' un anello di valutazione con $A \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A$ come sottoanelli. Per il lemma precedente si ha $x \in \operatorname{Quot} A = \operatorname{Quot} A'$.

Chiusura integrale da anelli di valutazione

Proposizione

Sia A un dominio di integrità. Allora:

$$\bar{A} = \bigcap_{\substack{A' \text{ anello di valutazione con} \\ A \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A \text{ come sottoanelli}}} A'$$

Dimostrazione (Idea)

($\subseteq$) Sia $x \in \bar{A}$ e sia A' un anello di valutazione con $A \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A$ come sottoanelli. Per il lemma precedente si ha $x \in \operatorname{Quot} A = \operatorname{Quot} A'$. Per ipotesi x è intero su $A \subseteq A'$.

Chiusura integrale da anelli di valutazione

Proposizione

Sia A un dominio di integrità. Allora:

$$\bar{A} = \bigcap_{\substack{A' \text{ anello di valutazione con} \\ A \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A \text{ come sottoanelli}}} A'$$

Dimostrazione (Idea)

($\subseteq$) Sia $x \in \bar{A}$ e sia A' un anello di valutazione con $A \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A$ come sottoanelli. Per il lemma precedente si ha $x \in \operatorname{Quot} A = \operatorname{Quot} A'$. Per ipotesi x è intero su $A \subseteq A'$.

Chiusura integrale da anelli di valutazione

Proposizione

Sia A un dominio di integrità. Allora:

$$\bar{A} = \bigcap_{\substack{A' \text{ anello di valutazione con} \\ A \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A \text{ come sottoanelli}}} A'$$

Dimostrazione (Idea)

($\subseteq$) Sia $x \in \bar{A}$ e sia A' un anello di valutazione con $A \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A$ come sottoanelli. Per il lemma precedente si ha $x \in \operatorname{Quot} A = \operatorname{Quot} A'$. Per ipotesi x è intero su $A \subseteq A'$. Dunque $x \in A'$ perché A' è normale.

Chiusura integrale da anelli di valutazione

($\supseteq$) Fissato $x \notin \bar{A}$,

Chiusura integrale da anelli di valutazione

($\supseteq$) Fissato $x \notin \bar{A}$, si usa il lemma di Zorn per costruire un anello A' con $A \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A$ come sottoanelli tale che $x \notin A'$.

Chiusura integrale da anelli di valutazione

($\supseteq$) Fissato $x \notin \bar{A}$, si usa il lemma di Zorn per costruire un anello A' con $A \subseteq A' \subseteq \operatorname{Quot} A$ come sottoanelli tale che $x \notin A'$. Poi si ricorre alla caratterizzazione degli anelli di valutazione e a un ragionamento per assurdo per concludere che A' è un anello di valutazione. $\square$

Ideali e sottoinsiemi saturi non negativi

Esercizio

Sia A un anello di valutazione con gruppo dei valori G.

Ideali e sottoinsiemi saturi non negativi

Esercizio

Sia A un anello di valutazione con gruppo dei valori G. Un sottoinsieme H di G è detto non negativo se abbiamo che $a \geq 0$ per ogni $a \in H$,

Ideali e sottoinsiemi saturi non negativi

Esercizio

Sia A un anello di valutazione con gruppo dei valori G. Un sottoinsieme H di G è detto non negativo se abbiamo che $a \geq 0$ per ogni $a \in H$, mentre viene detto saturo se, per ogni $a, b \in G$ con $a \leq b$ e $a \in H$, si ha $b \in H$.

Ideali e sottoinsiemi saturi non negativi

(i) Esiste una corrispondenza biiettiva, che preserva le inclusioni, tra ideali di A e sottoinsiemi saturi non negativi di G.

Ideali e sottoinsiemi saturi non negativi

(i) Esiste una corrispondenza biiettiva, che preserva le inclusioni, tra ideali di A e sottoinsiemi saturi non negativi di G.

Svolgimento (Idea)

Siano $\mathbb{K} := \operatorname{Quot} A$, $v : \mathbb{K}^* \to G$ la valutazione tale che $A = A_v$.

Ideali e sottoinsiemi saturi non negativi

(i) Esiste una corrispondenza biiettiva, che preserva le inclusioni, tra ideali di A e sottoinsiemi saturi non negativi di G.

Svolgimento (Idea)

Siano $\mathbb{K} := \operatorname{Quot} A$, $v : \mathbb{K}^* \to G$ la valutazione tale che $A = A_v$.

$$\{\text{Ideali di } A\} \quad \longleftrightarrow \quad \{\text{Sottoinsiemi saturi non negativi di } G\}$$

Ideali e sottoinsiemi saturi non negativi

(i) Esiste una corrispondenza biiettiva, che preserva le inclusioni, tra ideali di A e sottoinsiemi saturi non negativi di G.

Svolgimento (Idea)

Siano $\mathbb{K} := \operatorname{Quot} A$, $v : \mathbb{K}^* \to G$ la valutazione tale che $A = A_v$.

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Ideali di } A\} & \longleftrightarrow & \{\text{Sottoinsiemi saturi non negativi di } G\} \\ I & \longmapsto & v(I) \end{array}$$

Ideali e sottoinsiemi saturi non negativi

(i) Esiste una corrispondenza biiettiva, che preserva le inclusioni, tra ideali di A e sottoinsiemi saturi non negativi di G.

Svolgimento (Idea)

Siano $\mathbb{K} := \operatorname{Quot} A$, $v : \mathbb{K}^* \to G$ la valutazione tale che $A = A_v$.

$$\begin{array}{rcl} \{\text{Ideali di } A\} & \longleftrightarrow & \{\text{Sottoinsiemi saturi non negativi di } G\} \\ I & \longmapsto & v(I) \\ v^{-1}(H) & \longleftarrow\!\shortmid & H \end{array}$$

Ideali e sottoinsiemi saturi non negativi

(i) Esiste una corrispondenza biiettiva, che preserva le inclusioni, tra ideali di A e sottoinsiemi saturi non negativi di G.

Svolgimento (Idea)

Siano $\mathbb{K} := \operatorname{Quot} A$, $v : \mathbb{K}^* \to G$ la valutazione tale che $A = A_v$.

$$\begin{array}{rcl} \{\text{Ideali di } A\} & \longleftrightarrow & \{\text{Sottoinsiemi saturi non negativi di } G\} \\ I & \longmapsto & v(I) \setminus \{\infty\} \\ v^{-1}(H) & \longleftarrow\!\shortmid & H \end{array}$$

Ideali e sottoinsiemi saturi non negativi

(i) Esiste una corrispondenza biiettiva, che preserva le inclusioni, tra ideali di A e sottoinsiemi saturi non negativi di G.

Svolgimento (Idea)

Siano $\mathbb{K} := \operatorname{Quot} A$, $v : \mathbb{K}^* \to G$ la valutazione tale che $A = A_v$.

$$\begin{array}{rcl} \{\text{Ideali di } A\} & \longleftrightarrow & \{\text{Sottoinsiemi saturi non negativi di } G\} \\ I & \longmapsto & v(I) \setminus \{\infty\} \\ v^{-1}(H) \cup \{0\} & \longleftarrow\!\shortmid & H \end{array}$$

Ideali e sottoinsiemi saturi non negativi

(ii) Per ogni I e J ideali di A, si ha $I \subseteq J$ oppure $J \subseteq I$.

Ideali e sottoinsiemi saturi non negativi

(ii) Per ogni I e J ideali di A, si ha $I \subseteq J$ oppure $J \subseteq I$.

Svolgimento (Idea)

Questa è una conseguenza immediata del punto (i) e del fatto che la relazione d'ordine su G è totale.

Anelli di valutazione discreta

Anelli di valutazione discreta

Proposizione

Sia A un anello di valutazione con ideale massimale $\mathfrak{m}$.

Anelli di valutazione discreta

Proposizione

Sia A un anello di valutazione con ideale massimale $\mathfrak{m}$.
Le seguenti affermazioni sono equivalenti.

Anelli di valutazione discreta

Proposizione

Sia A un anello di valutazione con ideale massimale $\mathfrak{m}$.
Le seguenti affermazioni sono equivalenti.

(i) L'anello A è noetheriano, ma non è un campo.

Anelli di valutazione discreta

Proposizione

Sia A un anello di valutazione con ideale massimale $\mathfrak{m}$.
Le seguenti affermazioni sono equivalenti.

(i) L'anello A è noetheriano, ma non è un campo.

(ii) L'anello A è un PID, ma non è un campo.

Anelli di valutazione discreta

Proposizione

Sia A un anello di valutazione con ideale massimale $\mathfrak{m}$.
Le seguenti affermazioni sono equivalenti.

(i) L'anello A è noetheriano, ma non è un campo.

(ii) L'anello A è un PID, ma non è un campo.

(iii) Il gruppo dei valori di A è $\mathbb{Z}$.

Anelli di valutazione discreta

Proposizione

Sia A un anello di valutazione con ideale massimale $\mathfrak{m}$.
Le seguenti affermazioni sono equivalenti.

(i) L'anello A è noetheriano, ma non è un campo.

(ii) L'anello A è un PID, ma non è un campo.

(iii) Il gruppo dei valori di A è $\mathbb{Z}$.

Se inoltre tali condizioni sono soddisfatte allora, per qualsiasi $a \in A$ con $a \neq 0$, la valutazione $v(a) \in \mathbb{Z}$ è l'unico intero $n \geq 0$ tale che $(a) = \mathfrak{m}^n$.

Anelli di valutazione discreta

Proposizione

Sia A un anello di valutazione con ideale massimale $\mathfrak{m}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti.

(i) L'anello A è noetheriano, ma non è un campo.

(ii) L'anello A è un PID, ma non è un campo.

(iii) Il gruppo dei valori di A è $\mathbb{Z}$.

Se inoltre tali condizioni sono soddisfatte allora, per qualsiasi $a \in A$ con $a \neq 0$, la valutazione $v(a) \in \mathbb{Z}$ è l'unico intero $n \geq 0$ tale che $(a) = \mathfrak{m}^n$. Si dice che A è un anello di valutazione discreta (DVR).

Anelli di valutazione discreta

(i) L'anello A è noetheriano, ma non è un campo.

(ii) L'anello A è un PID, ma non è un campo.

(iii) Il gruppo dei valori di A è $\mathbb{Z}$.

Anelli di valutazione discreta

(i) L'anello A è noetheriano, ma non è un campo.

(ii) L'anello A è un PID, ma non è un campo.

(iii) Il gruppo dei valori di A è $\mathbb{Z}$.

Dimostrazione (Idea)

Sia I un ideale di A.

Anelli di valutazione discreta

(i) L'anello A è noetheriano, ma non è un campo.

(ii) L'anello A è un PID, ma non è un campo.

(iii) Il gruppo dei valori di A è $\mathbb{Z}$.

Dimostrazione (Idea)

Sia I un ideale di A. Allora $I = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ per certi $a_1, a_2, \dots, a_r \in A$.

Anelli di valutazione discreta

(i) L'anello A è noetheriano, ma non è un campo.

(ii) L'anello A è un PID, ma non è un campo.

(iii) Il gruppo dei valori di A è $\mathbb{Z}$.

Dimostrazione (Idea)

Sia I un ideale di A. Allora $I = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ per certi $a_1, a_2, \dots, a_r \in A$. Scegliendo a_i con valutazione minima:

Anelli di valutazione discreta

(i) L'anello A è noetheriano, ma non è un campo.

(ii) L'anello A è un PID, ma non è un campo.

(iii) Il gruppo dei valori di A è $\mathbb{Z}$.

Dimostrazione (Idea)

Sia I un ideale di A. Allora $I = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ per certi $a_1, a_2, \dots, a_r \in A$. Scegliendo a_i con valutazione minima:

$$v(a_i) \leq v(a_j) \; \forall j = 1, 2, \dots, r$$

Anelli di valutazione discreta

(i) L'anello A è noetheriano, ma non è un campo.

(ii) L'anello A è un PID, ma non è un campo.

(iii) Il gruppo dei valori di A è $\mathbb{Z}$.

Dimostrazione (Idea)

Sia I un ideale di A. Allora $I = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ per certi $a_1, a_2, \dots, a_r \in A$. Scegliendo a_i con valutazione minima:

$$v(a_i) \leq v(a_j) \; \forall j = 1, 2, \dots, r$$

$$\implies a_j \in (a_i) \; \forall j = 1, 2, \dots, r$$

Anelli di valutazione discreta

(i) L'anello A è noetheriano, ma non è un campo.

(ii) L'anello A è un PID, ma non è un campo.

(iii) Il gruppo dei valori di A è $\mathbb{Z}$.

Dimostrazione (Idea)

Sia I un ideale di A. Allora $I = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ per certi $a_1, a_2, \dots, a_r \in A$. Scegliendo a_i con valutazione minima:

$$v(a_i) \leq v(a_j) \; \forall j = 1, 2, \dots, r$$

$$\implies a_j \in (a_i) \; \forall j = 1, 2, \dots, r \implies I = (a_i)$$

Anelli di valutazione discreta

(i) L'anello A è noetheriano, ma non è un campo.

(ii) L'anello A è un PID, ma non è un campo.

(iii) Il gruppo dei valori di A è $\mathbb{Z}$.

Dimostrazione (Idea)

Innanzitutto, dobbiamo avere $\mathfrak{m} \neq 0$.

Anelli di valutazione discreta

(i) L'anello A è noetheriano, ma non è un campo.

(ii) L'anello A è un PID, ma non è un campo.

(iii) Il gruppo dei valori di A è $\mathbb{Z}$.

Dimostrazione (Idea)

Innanzitutto, dobbiamo avere $\mathfrak{m} \neq 0$. Dunque $\mathfrak{m} = (t)$ per qualche $t \in A$ irriducibile.

Anelli di valutazione discreta

(i) L'anello A è noetheriano, ma non è un campo.

(ii) L'anello A è un PID, ma non è un campo.

(iii) Il gruppo dei valori di A è $\mathbb{Z}$.

Dimostrazione (Idea)

Innanzitutto, dobbiamo avere $\mathfrak{m} \neq 0$. Dunque $\mathfrak{m} = (t)$ per qualche $t \in A$ irriducibile. Essendo A un UFD,

Anelli di valutazione discreta

(i) L'anello A è noetheriano, ma non è un campo.

(ii) L'anello A è un PID, ma non è un campo.

(iii) Il gruppo dei valori di A è $\mathbb{Z}$.

Dimostrazione (Idea)

Innanzitutto, dobbiamo avere $\mathfrak{m} \neq 0$. Dunque $\mathfrak{m} = (t)$ per qualche $t \in A$ irriducibile. Essendo A un UFD, per un esempio precedente la localizzazione $A_{(t)}$ è un anello di valutazione con gruppo dei valori $\mathbb{Z}$.

Anelli di valutazione discreta

(i) L'anello A è noetheriano, ma non è un campo.

(ii) L'anello A è un PID, ma non è un campo.

(iii) Il gruppo dei valori di A è $\mathbb{Z}$.

Dimostrazione (Idea)

Innanzitutto, dobbiamo avere $\mathfrak{m} \neq 0$. Dunque $\mathfrak{m} = (t)$ per qualche $t \in A$ irriducibile. Essendo A un UFD, per un esempio precedente la localizzazione $A_{(t)}$ è un anello di valutazione con gruppo dei valori $\mathbb{Z}$. La tesi segue perciò dal fatto che $A = A_{(t)}$.

Anelli di valutazione discreta

(i) L'anello A è noetheriano, ma non è un campo.

(ii) L'anello A è un PID, ma non è un campo.

(iii) Il gruppo dei valori di A è $\mathbb{Z}$.

Dimostrazione (Idea)

Innanzitutto, dobbiamo avere $\mathfrak{m} \neq 0$. Dunque $\mathfrak{m} = (t)$ per qualche $t \in A$ irriducibile. Essendo A un UFD, per un esempio precedente la localizzazione $A_{(t)}$ è un anello di valutazione con gruppo dei valori $\mathbb{Z}$. La tesi segue perciò dal fatto che $A = A_{(t)}$. Da questo discende anche l'asserzione aggiuntiva della proposizione.

Anelli di valutazione discreta

(i) L'anello A è noetheriano, ma non è un campo.

(ii) L'anello A è un PID, ma non è un campo.

(iii) Il gruppo dei valori di A è $\mathbb{Z}$.

Dimostrazione (Idea)

Se A fosse un campo, avremmo la seguente contraddizione:

Anelli di valutazione discreta

(i) L'anello A è noetheriano, ma non è un campo.

(ii) L'anello A è un PID, ma non è un campo.

(iii) Il gruppo dei valori di A è $\mathbb{Z}$.

Dimostrazione (Idea)

Se A fosse un campo, avremmo la seguente contraddizione:

$$(\operatorname{Quot} A)^* / A^*$$

Anelli di valutazione discreta

(i) L'anello A è noetheriano, ma non è un campo.

(ii) L'anello A è un PID, ma non è un campo.

(iii) Il gruppo dei valori di A è $\mathbb{Z}$.

Dimostrazione (Idea)

Se A fosse un campo, avremmo la seguente contraddizione:

$$(\operatorname{Quot} A)^* / A^* \simeq \mathbb{Z}$$

Anelli di valutazione discreta

(i) L'anello A è noetheriano, ma non è un campo.

(ii) L'anello A è un PID, ma non è un campo.

(iii) Il gruppo dei valori di A è $\mathbb{Z}$.

Dimostrazione (Idea)

Se A fosse un campo, avremmo la seguente contraddizione:

$$0 = (\operatorname{Quot} A)^* / A^* \simeq \mathbb{Z}$$

Anelli di valutazione discreta

(i) L'anello A è noetheriano, ma non è un campo.

(ii) L'anello A è un PID, ma non è un campo.

(iii) Il gruppo dei valori di A è $\mathbb{Z}$.

Dimostrazione (Idea)

Se A fosse un campo, avremmo la seguente contraddizione:

$$0 = (\operatorname{Quot} A)^* / A^* \simeq \mathbb{Z}$$

Dato invece un ideale non nullo di A,

Anelli di valutazione discreta

(i) L'anello A è noetheriano, ma non è un campo.

(ii) L'anello A è un PID, ma non è un campo.

(iii) Il gruppo dei valori di A è $\mathbb{Z}$.

Dimostrazione (Idea)

Se A fosse un campo, avremmo la seguente contraddizione:

$$0 = (\operatorname{Quot} A)^* / A^* \simeq \mathbb{Z}$$

Dato invece un ideale non nullo di A, possiamo scegliere un elemento di I che abbia valutazione minima

Anelli di valutazione discreta

(i) L'anello A è noetheriano, ma non è un campo.

(ii) L'anello A è un PID, ma non è un campo.

(iii) Il gruppo dei valori di A è $\mathbb{Z}$.

Dimostrazione (Idea)

Se A fosse un campo, avremmo la seguente contraddizione:

$$0 = (\operatorname{Quot} A)^* / A^* \simeq \mathbb{Z}$$

Dato invece un ideale non nullo di A, possiamo scegliere un elemento di I che abbia valutazione minima e quindi, per lo stesso ragionamento di prima, tale ideale è principale. $\square$

Condizioni equivalenti per gli anelli di valutazione discreta

Proposizione

Sia A un anello noetheriano locale.

Condizioni equivalenti per gli anelli di valutazione discreta

Proposizione

Sia A un anello noetheriano locale. Sono equivalenti:

Condizioni equivalenti per gli anelli di valutazione discreta

Proposizione

Sia A un anello noetheriano locale. Sono equivalenti:

(i) L'anello A è un DVR.

Condizioni equivalenti per gli anelli di valutazione discreta

Proposizione

Sia A un anello noetheriano locale. Sono equivalenti:

(i) L'anello A è un DVR.

(ii) L'anello A è un PID, ma non è un campo.

Condizioni equivalenti per gli anelli di valutazione discreta

Proposizione

Sia A un anello noetheriano locale. Sono equivalenti:

(i) L'anello A è un DVR.

(ii) L'anello A è un PID, ma non è un campo.

(iii) L'anello A è un UFD di dimensione 1.

Condizioni equivalenti per gli anelli di valutazione discreta

Proposizione

Sia A un anello noetheriano locale. Sono equivalenti:

(i) L'anello A è un DVR.

(ii) L'anello A è un PID, ma non è un campo.

(iii) L'anello A è un UFD di dimensione 1.

(iv) L'anello A è un dominio normale di dimensione 1.

Condizioni equivalenti per gli anelli di valutazione discreta

Proposizione

Sia A un anello noetheriano locale. Sono equivalenti:

(i) L'anello A è un DVR.

(ii) L'anello A è un PID, ma non è un campo.

(iii) L'anello A è un UFD di dimensione 1.

(iv) L'anello A è un dominio normale di dimensione 1.

(v) L'anello A è un anello locale regolare di dimensione 1.

Condizioni equivalenti per gli anelli di valutazione discreta

(iv) L'anello A è un dominio normale di dimensione 1.

(v) L'anello A è un anello locale regolare di dimensione 1.

(i) L'anello A è un DVR.

Condizioni equivalenti per gli anelli di valutazione discreta

(iv) L'anello A è un dominio normale di dimensione 1.

(v) L'anello A è un anello locale regolare di dimensione 1.

(i) L'anello A è un DVR.

Dimostrazione (Idea)

Dalle ipotesi e dalla generalizzazione del teorema di Cayley-Hamilton segue che $\mathfrak{m} = (t)$ per qualche $t \neq 0$.

Condizioni equivalenti per gli anelli di valutazione discreta

(iv) L'anello A è un dominio normale di dimensione 1.

(v) L'anello A è un anello locale regolare di dimensione 1.

(i) L'anello A è un DVR.

Dimostrazione (Idea)

Dalle ipotesi e dalla generalizzazione del teorema di Cayley-Hamilton segue che $\mathfrak{m} = (t)$ per qualche $t \neq 0$. Dunque:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$$

Condizioni equivalenti per gli anelli di valutazione discreta

(iv) L'anello A è un dominio normale di dimensione 1.

(v) L'anello A è un anello locale regolare di dimensione 1.

(i) L'anello A è un DVR.

Dimostrazione (Idea)

Dalle ipotesi e dalla generalizzazione del teorema di Cayley-Hamilton segue che $\mathfrak{m} = (t)$ per qualche $t \neq 0$. Dunque:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$$

Condizioni equivalenti per gli anelli di valutazione discreta

(iv) L'anello A è un dominio normale di dimensione 1.

(v) L'anello A è un anello locale regolare di dimensione 1.

(i) L'anello A è un DVR.

Dimostrazione (Idea)

Dalle ipotesi e dalla generalizzazione del teorema di Cayley-Hamilton segue che $\mathfrak{m} = (t)$ per qualche $t \neq 0$. Dunque:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1 = \dim A$$

Condizioni equivalenti per gli anelli di valutazione discreta

(iv) L'anello A è un dominio normale di dimensione 1.

(v) L'anello A è un anello locale regolare di dimensione 1.

(i) L'anello A è un DVR.

Dimostrazione (Idea)

Dalle ipotesi e dalla generalizzazione del teorema di Cayley-Hamilton segue che $\mathfrak{m} = (t)$ per qualche $t \neq 0$. Dunque:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1 = \dim A$$

Condizioni equivalenti per gli anelli di valutazione discreta

(iv) L'anello A è un dominio normale di dimensione 1.

(v) L'anello A è un anello locale regolare di dimensione 1.

(i) L'anello A è un DVR.

Dimostrazione (Idea)

Per dimostrare che A è un anello di valutazione, si usa la caratterizzazione fornita in precedenza.

Condizioni equivalenti per gli anelli di valutazione discreta

(iv) L'anello A è un dominio normale di dimensione 1.

(v) L'anello A è un anello locale regolare di dimensione 1.

(i) L'anello A è un DVR.

Dimostrazione (Idea)

Per dimostrare che A è un anello di valutazione, si usa la caratterizzazione fornita in precedenza. Per concludere che A è un DVR basta ricordare l'ipotesi che A è noetheriano

Condizioni equivalenti per gli anelli di valutazione discreta

(iv) L'anello A è un dominio normale di dimensione 1.

(v) L'anello A è un anello locale regolare di dimensione 1.

(i) L'anello A è un DVR.

Dimostrazione (Idea)

Per dimostrare che A è un anello di valutazione, si usa la caratterizzazione fornita in precedenza. Per concludere che A è un DVR basta ricordare l'ipotesi che A è noetheriano e osservare che A non è un campo. □

Ideali in un anello di valutazione discreta

Corollario

Sia A un DVR con ideale massimale $\mathfrak{m}$.

Ideali in un anello di valutazione discreta

Corollario

Sia A un DVR con ideale massimale $\mathfrak{m}$. Allora gli ideali non banali di A sono le potenze $\mathfrak{m}^n$ al variare dell'intero $n \geq 0$

Ideali in un anello di valutazione discreta

Corollario

Sia A un DVR con ideale massimale $\mathfrak{m}$. Allora gli ideali non banali di A sono le potenze $\mathfrak{m}^n$ al variare dell'intero $n \geq 0$ e formano una catena strettamente discendente:

$$A = \mathfrak{m}^0 \supsetneq \mathfrak{m}^1 \supsetneq \mathfrak{m}^2 \supsetneq \cdots$$

Ideali in un anello di valutazione discreta

Corollario

Sia A un DVR con ideale massimale $\mathfrak{m}$. Allora gli ideali non banali di A sono le potenze $\mathfrak{m}^n$ al variare dell'intero $n \geq 0$ e formano una catena strettamente discendente:

$$A = \mathfrak{m}^0 \supsetneq \mathfrak{m}^1 \supsetneq \mathfrak{m}^2 \supsetneq \cdots$$

In particolare, l'anello A non è artiniano.

Ideali in un anello di valutazione discreta

Dimostrazione (Idea)

Per una proposizione precedente, ogni ideale non nullo di A è principale e della forma $\mathfrak{m}^n$ per qualche intero $n \geq 0$.

Ideali in un anello di valutazione discreta

Dimostrazione (Idea)

Per una proposizione precedente, ogni ideale non nullo di A è principale e della forma $\mathfrak{m}^n$ per qualche intero $n \geq 0$. Per dimostrare che la catena è strettamente discendente si ragiona per assurdo, usando il lemma di Nakayama. $\square$

Valutazione e lunghezza

Corollario

Sia A un DVR.

Valutazione e lunghezza

Corollario

Sia A un DVR. Per ogni $a \in A$ con $a \neq 0$ si ha:

$$v(a) = \ell_A(A/(a))$$

Valutazione e lunghezza

Corollario

Sia A un DVR. Per ogni $a \in A$ con $a \neq 0$ si ha:

$$v(a) = \ell_A(A/(a))$$

Dimostrazione (Idea)

Sia $\mathfrak{m}$ l'ideale massimale di A.

Valutazione e lunghezza

Corollario

Sia A un DVR. Per ogni $a \in A$ con $a \neq 0$ si ha:

$$v(a) = \ell_A(A/(a))$$

Dimostrazione (Idea)

Sia $\mathfrak{m}$ l'ideale massimale di A. Allora $\mathfrak{m} = (t)$ con $t \neq 0$

Valutazione e lunghezza

Corollario

Sia A un DVR. Per ogni $a \in A$ con $a \neq 0$ si ha:

$$v(a) = \ell_A(A/(a))$$

Dimostrazione (Idea)

Sia $\mathfrak{m}$ l'ideale massimale di A. Allora $\mathfrak{m} = (t)$ con $t \neq 0$ e, se $n := v(a)$, allora $(a) = \mathfrak{m}^n$

Valutazione e lunghezza

Corollario

Sia A un DVR. Per ogni $a \in A$ con $a \neq 0$ si ha:

$$v(a) = \ell_A(A/(a))$$

Dimostrazione (Idea)

Sia $\mathfrak{m}$ l'ideale massimale di A. Allora $\mathfrak{m} = (t)$ con $t \neq 0$ e, se $n := v(a)$, allora $(a) = \mathfrak{m}^n = (t^n)$.

Valutazione e lunghezza

Corollario

Sia A un DVR. Per ogni $a \in A$ con $a \neq 0$ si ha:

$$v(a) = \ell_A(A/(a))$$

Dimostrazione (Idea)

Sia $\mathfrak{m}$ l'ideale massimale di A. Allora $\mathfrak{m} = (t)$ con $t \neq 0$ e, se $n := v(a)$, allora $(a) = \mathfrak{m}^n = (t^n)$. Per concludere, basta notare che la seguente è una serie di composizione per $A/(a)$:

Valutazione e lunghezza

Corollario

Sia A un DVR. Per ogni $a \in A$ con $a \neq 0$ si ha:

$$v(a) = \ell_A(A/(a))$$

Dimostrazione (Idea)

Sia $\mathfrak{m}$ l'ideale massimale di A. Allora $\mathfrak{m} = (t)$ con $t \neq 0$ e, se $n := v(a)$, allora $(a) = \mathfrak{m}^n = (t^n)$. Per concludere, basta notare che la seguente è una serie di composizione per $A/(a)$:

$$A/(a) = (t^0)/(a) \supsetneq \cdots \supsetneq (t^{n-1})/(a) \supsetneq (t^n)/(a) = 0 \qquad \square$$

Bibliografia

- Michael Atiyah.
  Introduction to commutative algebra.
  CRC Press, 2018.
- Maurice Auslander and David A Buchsbaum.
  Unique factorization in regular local rings.
  Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 45(5):733, 1959.
- Andreas Gathmann.
  Commutative algebra.