Sequenzializzazione di Proof Net in MLL puro

Raffaele Di Donna

5 agosto 2021

Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica

Piano della presentazione

Il processo di sequenzializzazione

Cammini switching e discendenti

Nodi $\parr$ di correttezza

Esistenza di nodi sequenzializzanti

Il processo di sequenzializzazione

Sia π una proof net. Assumiamo che π sia senza tagli, altrimenti basta trattare ogni nodo *cut* come un nodo $\otimes$.

Sia π una proof net. Assumiamo che π sia senza tagli, altrimenti basta trattare ogni nodo *cut* come un nodo $\otimes$.

Vi sono due tipi di vertici in π. Chiamiamo nodi quelli etichettati da *ax*, $\otimes$ o $\parr$, mentre gli altri saranno chiamati pozzi.

Nodi sequenzializzanti

Sia π una proof net. Assumiamo che π sia senza tagli, altrimenti basta trattare ogni nodo *cut* come un nodo $\otimes$.

Vi sono due tipi di vertici in π. Chiamiamo nodi quelli etichettati da *ax*, $\otimes$ o $\parr$, mentre gli altri saranno chiamati pozzi.

Un nodo terminale N di π, cioè un nodo di π tale che le teste dei suoi archi conclusione siano pozzi, si dice sequenzializzante quando:

Sia π una proof net. Assumiamo che π sia senza tagli, altrimenti basta trattare ogni nodo *cut* come un nodo $\otimes$.

Vi sono due tipi di vertici in π. Chiamiamo nodi quelli etichettati da *ax*, $\otimes$ o $\parr$, mentre gli altri saranno chiamati pozzi.

Un nodo terminale N di π, cioè un nodo di π tale che le teste dei suoi archi conclusione siano pozzi, si dice sequenzializzante quando:

- Se N è un nodo *ax*, allora è l'unico nodo di π.

Nodi sequenzializzanti

Sia π una proof net. Assumiamo che π sia senza tagli, altrimenti basta trattare ogni nodo *cut* come un nodo $\otimes$.

Vi sono due tipi di vertici in π. Chiamiamo nodi quelli etichettati da *ax*, $\otimes$ o $\parr$, mentre gli altri saranno chiamati pozzi.

Un nodo terminale N di π, cioè un nodo di π tale che le teste dei suoi archi conclusione siano pozzi, si dice sequenzializzante quando:

- Se N è un nodo *ax*, allora è l'unico nodo di π.
- Se N è un nodo $\otimes$, la sua rimozione produce due proof net.

Nodi sequenzializzanti

Sia π una proof net. Assumiamo che π sia senza tagli, altrimenti basta trattare ogni nodo *cut* come un nodo $\otimes$.

Vi sono due tipi di vertici in π. Chiamiamo nodi quelli etichettati da *ax*, $\otimes$ o $\parr$, mentre gli altri saranno chiamati pozzi.

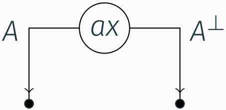
Un nodo terminale N di π, cioè un nodo di π tale che le teste dei suoi archi conclusione siano pozzi, si dice sequenzializzante quando:

- Se N è un nodo *ax*, allora è l'unico nodo di π.
- Se N è un nodo $\otimes$, la sua rimozione produce due proof net.
- Se N è un nodo $\parr$, la sua rimozione produce una proof net.

Supponiamo che π ammetta un nodo sequenzializzante N e ragioniamo per induzione sul numero $n \geqslant 1$ dei nodi di π.

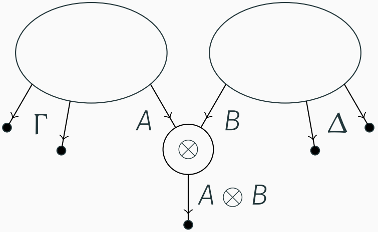
Supponiamo che π ammetta un nodo sequenzializzante N e ragioniamo per induzione sul numero $n \geqslant 1$ dei nodi di π.

- Caso $n = 1$: N è un nodo *ax*.

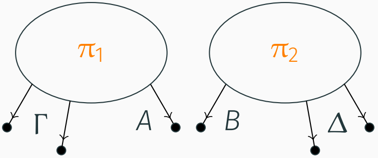


$$\rightsquigarrow \quad \frac{}{\vdash A, A^{\perp}}$$

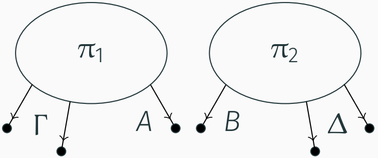
- Caso $n \geqslant 2$ ed N è un nodo $\otimes$.



- Caso $n \geqslant 2$ ed N è un nodo $\otimes$.

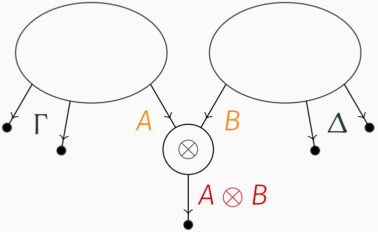


- Caso $n \geqslant 2$ ed N è un nodo $\otimes$.



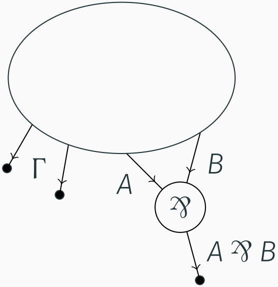
$$\rightsquigarrow \quad \begin{array}{c} \vdots\, \Pi_1 \\ \vdash \Gamma, A \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots\, \Pi_2 \\ \vdash \Delta, B \end{array}$$

- Caso $n \geqslant 2$ ed N è un nodo $\otimes$.

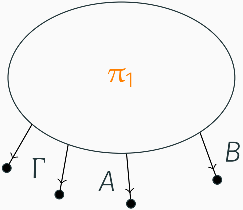


$$\rightsquigarrow \quad \dfrac{\begin{array}{cc} \vdots\, \Pi_1 & \vdots\, \Pi_2 \\ \vdash \Gamma, A & \vdash \Delta, B \end{array}}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B}\,(\otimes)$$

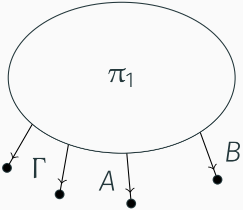
- Caso $n \geqslant 2$ ed N è un nodo $\parr$.



- Caso $n \geqslant 2$ ed N è un nodo $\invamp$.

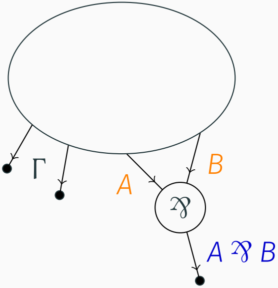


- Caso $n \geqslant 2$ ed N è un nodo $\parr$.



$$\rightsquigarrow \qquad \begin{array}{c} \vdots\ \Pi_1 \\ \vdash \Gamma, A, B \end{array}$$

- Caso $n \geqslant 2$ ed N è un nodo $⅋$.



$$\rightsquigarrow \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \Pi_1 \\ \vdash \Gamma, A, B\end{array}}{\vdash \Gamma, A ⅋ B}\ (⅋)$$

Cammini switching e discendenti

Un cammino γ è una successione $\{(a_i, \varepsilon_i)\}_{i=1,\dots,n}$ con a_i arco di π ed $\varepsilon_i \in \{+,-\}$ tale che $t_\gamma(a_{i-1}) = s_\gamma(a_i)$ per $i = 2, \dots, n$, dove:

Un cammino γ è una successione $\{(a_i, \varepsilon_i)\}_{i=1,\dots,n}$ con a_i arco di π ed $\varepsilon_i \in \{+,-\}$ tale che $t_\gamma(a_{i-1}) = s_\gamma(a_i)$ per $i = 2, \dots, n$, dove:

- Per $i = 1, \dots, n$ denotiamo $t_\gamma(a_i)$ la testa di a_i se $\varepsilon_i = +$, la sorgente di a_i se $\varepsilon_i = -$.

Cammini

Un cammino γ è una successione $\{(a_i, \varepsilon_i)\}_{i=1,\dots,n}$ con a_i arco di π ed $\varepsilon_i \in \{+,-\}$ tale che $t_\gamma(a_{i-1}) = s_\gamma(a_i)$ per $i = 2, \dots, n$, dove:

- Per $i = 1, \dots, n$ denotiamo $t_\gamma(a_i)$ la testa di a_i se $\varepsilon_i = +$, la sorgente di a_i se $\varepsilon_i = -$.
- Per $i = 1, \dots, n$ denotiamo $s_\gamma(a_i)$ la sorgente di a_i, se $\varepsilon_i = +$, la testa di a_i, se $\varepsilon_i = -$.

Un cammino γ è una successione $\{(a_i, \varepsilon_i)\}_{i=1,\dots,n}$ con a_i arco di π ed $\varepsilon_i \in \{+, -\}$ tale che $t_\gamma(a_{i-1}) = s_\gamma(a_i)$ per $i = 2, \dots, n$, dove:

- Per $i = 1, \dots, n$ denotiamo $t_\gamma(a_i)$ la testa di a_i se $\varepsilon_i = +$, la sorgente di a_i se $\varepsilon_i = -$.
- Per $i = 1, \dots, n$ denotiamo $s_\gamma(a_i)$ la sorgente di a_i, se $\varepsilon_i = +$, la testa di a_i, se $\varepsilon_i = -$.

Indichiamo inoltre con $s(\gamma) := s_\gamma(a_1)$ e $t(\gamma) := t_\gamma(a_n)$ i vertici iniziale e finale di γ.

Useremo anche la notazione γ_{uv} per indicare il sottocammino di γ tra due suoi vertici u e v.

Useremo anche la notazione γ_{uv} per indicare il sottocammino di γ tra due suoi vertici u e v. Denotiamo invece $\overline{\gamma}$ il cammino inverso di γ, cioè $\{(a_{n+1-i}, -\varepsilon_{n+1-i})\}_{i=1,\dots,n}$.

Useremo anche la notazione γ_{uv} per indicare il sottocammino di γ tra due suoi vertici u e v. Denotiamo invece $\overline{\gamma}$ il cammino inverso di γ, cioè $\{(a_{n+1-i}, -\varepsilon_{n+1-i})\}_{i=1,\dots,n}$.

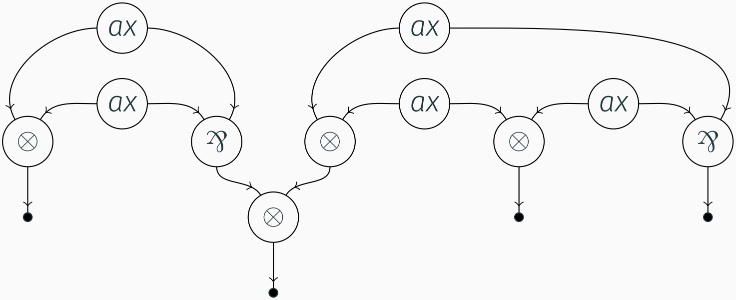
Chiamiamo pseudociclo un cammino γ tale che $t(\gamma) = s_\gamma(a_j)$ oppure $t_\gamma(a_j) = s(\gamma)$ per un qualche indice $j \in \{1, \dots, n\}$.

Useremo anche la notazione γ_{uv} per indicare il sottocammino di γ tra due suoi vertici u e v. Denotiamo invece $\overline{\gamma}$ il cammino inverso di γ, cioè $\{(a_{n+1-i}, -\varepsilon_{n+1-i})\}_{i=1,\dots,n}$.

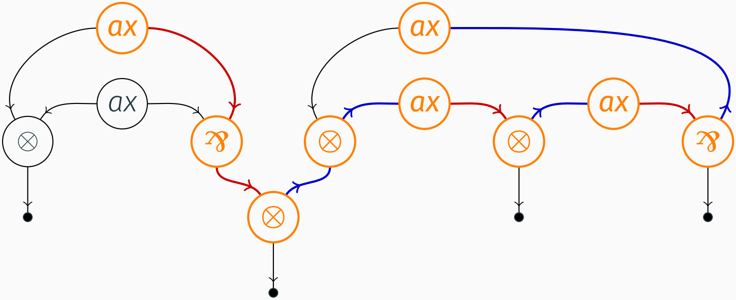
Chiamiamo pseudociclo un cammino γ tale che $t(\gamma) = s_\gamma(a_j)$ oppure $t_\gamma(a_j) = s(\gamma)$ per un qualche indice $j \in \{1, \dots, n\}$.

Diremo infine che un cammino è semplice se è uno pseudociclo oppure non ammette ripetizioni di vertici.

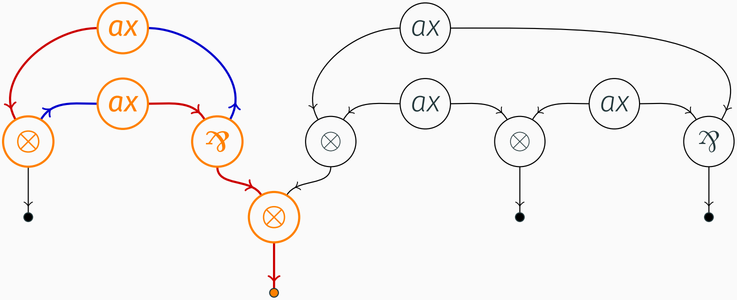
Consideriamo la seguente proof net.



Abbiamo tracciato un cammino semplice, colorando in rosso gli archi con segno positivo e in blu gli archi con segno negativo.



Il cammino illustrato ora in figura è anche uno pseudociclo.



Un cammino localmente switching è un cammino semplice γ di π che soddisfa le seguenti condizioni:

Un cammino localmente switching è un cammino semplice γ di π che soddisfa le seguenti condizioni:

(1) Se $s(\gamma)$ è un nodo $\parr$, allora $\varepsilon_1 = +$, ovvero a_1 non è una premessa di $s(\gamma)$.

Un cammino localmente switching è un cammino semplice γ di π che soddisfa le seguenti condizioni:

(1) Se $s(\gamma)$ è un nodo $\wp$, allora $\varepsilon_1 = +$, ovvero a_1 non è una premessa di $s(\gamma)$.

(2) Se esiste $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ tale che $t_\gamma(a_j)$ sia un nodo $\wp$ ed $\varepsilon_j = +$, allora anche $\varepsilon_{j+1} = +$, cioè γ non attraversa consecutivamente le due premesse di alcun nodo $\wp$.

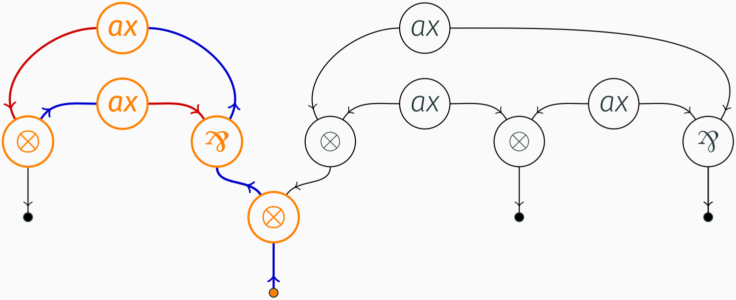
Un cammino localmente switching è un cammino semplice γ di π che soddisfa le seguenti condizioni:

(1) Se $s(\gamma)$ è un nodo $\parr$, allora $\varepsilon_1 = +$, ovvero a_1 non è una premessa di $s(\gamma)$.

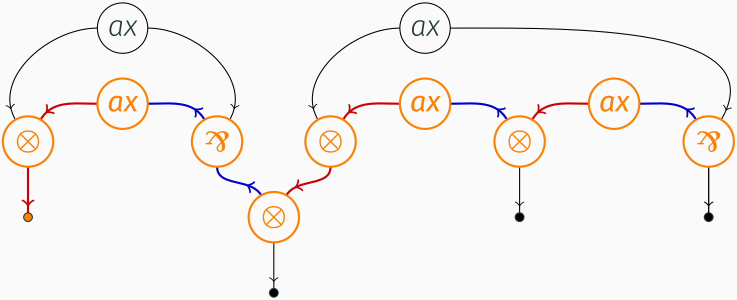
(2) Se esiste $j \in \{1, \dots, n-1\}$ tale che $t_\gamma(a_j)$ sia un nodo $\parr$ ed $\varepsilon_j = +$, allora anche $\varepsilon_{j+1} = +$, cioè γ non attraversa consecutivamente le due premesse di alcun nodo $\parr$.

Un cammino globalmente switching è un cammino semplice di π che è anche un cammino in qualche switching di π.

Un esempio di cammino localmente switching è il seguente.



Vediamo ora un esempio di cammino globalmente switching.



Fatto 1. Se π è una proof net, allora non ammette cicli globalmente switching.

Proprietà dei cammini switching

Fatto 1. Se π è una proof net, allora non ammette cicli globalmente switching.

Fatto 2. Se γ_1 e γ_2 sono cammini localmente switching senza ripetizioni di vertici e tali che $t(\gamma_1) = s(\gamma_2)$, allora la loro concatenazione $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ è un cammino localmente switching.

Fatto 1. Se π è una proof net, allora non ammette cicli globalmente switching.

Fatto 2. Se γ_1 e γ_2 sono cammini localmente switching senza ripetizioni di vertici e tali che $t(\gamma_1) = s(\gamma_2)$, allora la loro concatenazione $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ è un cammino localmente switching.

Fatto 3. Un cammino globalmente switching γ che gode della proprietà (1) è anche un cammino localmente switching.

Lemma 1. Sia γ uno pseudociclo localmente switching.

Lemma 1. Sia γ uno pseudociclo localmente switching. Se $t(\gamma)$ non è un nodo $\parr$ con premesse a ed a_n tali che $(a, -) \in \gamma$, allora γ contiene un ciclo globalmente switching.

Lemma 1. Sia γ uno pseudociclo localmente switching. Se $t(\gamma)$ non è un nodo $\parr$ con premesse a ed a_n tali che $(a, -) \in \gamma$, allora γ contiene un ciclo globalmente switching.

Dimostrazione. Sia $\gamma' \subseteq \gamma$ un ciclo.

Lemma 1. Sia γ uno pseudociclo localmente switching. Se $t(\gamma)$ non è un nodo $\parr$ con premesse a ed a_n tali che $(a, -) \in \gamma$, allora γ contiene un ciclo globalmente switching.

Dimostrazione. Sia $\gamma' \subseteq \gamma$ un ciclo. Siano v il vertice iniziale e finale di γ', a e b il primo e l'ultimo arco di γ' rispettivamente.

Lemma 1. Sia γ uno pseudociclo localmente switching. Se $t(\gamma)$ non è un nodo $\invamp$ con premesse a ed a_n tali che $(a, -) \in \gamma$, allora γ contiene un ciclo globalmente switching.

Dimostrazione. Sia $\gamma' \subseteq \gamma$ un ciclo. Siano v il vertice iniziale e finale di γ', a e b il primo e l'ultimo arco di γ' rispettivamente.

- Se v è un nodo $\invamp$ mentre a e b sono le sue premesse, allora a ha segno negativo mentre b ha segno positivo.

Lemma 1. Sia γ uno pseudociclo localmente switching. Se $t(\gamma)$ non è un nodo $\parr$ con premesse a ed a_n tali che $(a, -) \in \gamma$, allora γ contiene un ciclo globalmente switching.

Dimostrazione. Sia $\gamma' \subseteq \gamma$ un ciclo. Siano v il vertice iniziale e finale di γ', a e b il primo e l'ultimo arco di γ' rispettivamente.

- Se v è un nodo $\parr$ mentre a e b sono le sue premesse, allora a ha segno negativo mentre b ha segno positivo. Visto che γ è uno pseudociclo e soddisfa (1), dobbiamo avere $b = a_n$ e quindi $v = t(\gamma)$.

Lemma 1. Sia γ uno pseudociclo localmente switching. Se $t(\gamma)$ non è un nodo $\parr$ con premesse a ed a_n tali che $(a, -) \in \gamma$, allora γ contiene un ciclo globalmente switching.

Dimostrazione. Sia $\gamma' \subseteq \gamma$ un ciclo. Siano v il vertice iniziale e finale di γ', a e b il primo e l'ultimo arco di γ' rispettivamente.

- Se v è un nodo $\parr$ mentre a e b sono le sue premesse, allora a ha segno negativo mentre b ha segno positivo. Visto che γ è uno pseudociclo e soddisfa (1), dobbiamo avere $b = a_n$ e quindi $v = t(\gamma)$. Poiché $(a, -) \in \gamma$, l'antecedente dell'implicazione da dimostrare è falso.

Lemma 1. Sia γ uno pseudociclo localmente switching. Se $t(\gamma)$ non è un nodo $\parr$ con premesse a ed a_n tali che $(a, -) \in \gamma$, allora γ contiene un ciclo globalmente switching.

Dimostrazione. Sia $\gamma' \subseteq \gamma$ un ciclo. Siano v il vertice iniziale e finale di γ', a e b il primo e l'ultimo arco di γ' rispettivamente.

- Se v è un nodo $\parr$ mentre a e b sono le sue premesse, allora a ha segno negativo mentre b ha segno positivo. Visto che γ è uno pseudociclo e soddisfa (1), dobbiamo avere $b = a_n$ e quindi $v = t(\gamma)$. Poiché $(a, -) \in \gamma$, l'antecedente dell'implicazione da dimostrare è falso.
- Se v non è $\parr$ oppure lo è ma a e b non sono premesse di v, allora γ' è globalmente switching perché γ verifica (2). $\square$

Un cammino discendente è un cammino γ costituito da soli archi di segno positivo e tale che $t(\gamma)$ sia un nodo terminale.

Un cammino discendente è un cammino γ costituito da soli archi di segno positivo e tale che $t(\gamma)$ sia un nodo terminale.

Un cammino discendente non può ammettere ripetizioni di vertici, altrimenti conterrebbe un ciclo globalmente switching per il lemma 1, assurdo per il fatto 1.

Un cammino discendente è un cammino γ costituito da soli archi di segno positivo e tale che $t(\gamma)$ sia un nodo terminale.

Un cammino discendente non può ammettere ripetizioni di vertici, altrimenti conterrebbe un ciclo globalmente switching per il lemma 1, assurdo per il fatto 1.

Fatto 4. I cammini discendenti sono localmente switching.

Dato un arco a la cui testa è un nodo, esiste un unico cammino discendente tale che il suo primo arco sia a, in virtù del fatto che ogni nodo $\otimes$ o $\parr$ ha una e una sola conclusione.

Dato un arco a la cui testa è un nodo, esiste un unico cammino discendente tale che il suo primo arco sia a, in virtù del fatto che ogni nodo $\otimes$ o $\parr$ ha una e una sola conclusione. Denotiamo $\delta(a)$ tale cammino.

Dato un arco a la cui testa è un nodo, esiste un unico cammino discendente tale che il suo primo arco sia a, in virtù del fatto che ogni nodo $\otimes$ o $\parr$ ha una e una sola conclusione. Denotiamo $\delta(a)$ tale cammino.

Poniamo invece $\delta(a) := \varnothing$ se la testa di a è un pozzo.

Dato un arco a la cui testa è un nodo, esiste un unico cammino discendente tale che il suo primo arco sia a, in virtù del fatto che ogni nodo $\otimes$ o $\invamp$ ha una e una sola conclusione. Denotiamo $\delta(a)$ tale cammino.

Poniamo invece $\delta(a) := \varnothing$ se la testa di a è un pozzo.

Se inoltre N è un nodo $\otimes$ o $\invamp$ e se a è la sua unica conclusione, definiamo $\delta(N) := \delta(a)$.

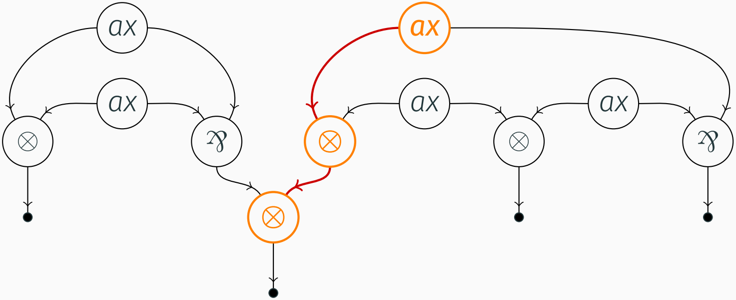
Dato un arco a la cui testa è un nodo, esiste un unico cammino discendente tale che il suo primo arco sia a, in virtù del fatto che ogni nodo $\otimes$ o $\parr$ ha una e una sola conclusione. Denotiamo $\delta(a)$ tale cammino.

Poniamo invece $\delta(a) := \varnothing$ se la testa di a è un pozzo.

Se inoltre N è un nodo $\otimes$ o $\parr$ e se a è la sua unica conclusione, definiamo $\delta(N) := \delta(a)$. Si ha allora $\delta(N) = \varnothing$ se e solo se N è terminale.

Esempio

Abbiamo in figura un esempio di cammino discendente.



Nodi $\parr$ di correttezza

Nodi $\parr$ di correttezza

Sia T un nodo $\otimes$ e sia P un nodo $\parr$.

Nodi $\parr$ di correttezza

Sia T un nodo $\otimes$ e sia P un nodo $\parr$.

Diciamo che P è un $\parr$ di correttezza per T se esistono due cammini localmente switching κ_0 e κ_1 internamente disgiunti tra T e P, detti cammini di correttezza, tali che per entrambi il primo arco sia una premessa di T e l'ultimo arco sia una premessa di P.

Nodi $⅋$ di correttezza

Sia T un nodo $\otimes$ e sia P un nodo $⅋$.

Diciamo che P è un $⅋$ di correttezza per T se esistono due cammini localmente switching κ_0 e κ_1 internamente disgiunti tra T e P, detti cammini di correttezza, tali che per entrambi il primo arco sia una premessa di T e l'ultimo arco sia una premessa di P.

La tupla (κ_0, κ_1, P) viene detta una tripla di correttezza per T.

Lemma 2. Se T è un nodo $\otimes$ terminale non sequenzializzante, allora T ha un nodo $\parr$ di correttezza.

Lemma 2. Se T è un nodo $\otimes$ terminale non sequenzializzante, allora T ha un nodo $\parr$ di correttezza.

Dimostrazione. Sia φ uno switching di π e sia π_φ il grafo a esso associato.

Lemma 2. Se T è un nodo $\otimes$ terminale non sequenzializzante, allora T ha un nodo $\parr$ di correttezza.

Dimostrazione. Sia φ uno switching di π e sia π_φ il grafo a esso associato. Allora π_φ è connesso e quindi la rimozione di T da π_φ produce esattamente due componenti connesse, perché π è una proof net.

Lemma 2. Se T è un nodo $\otimes$ terminale non sequenzializzante, allora T ha un nodo $\parr$ di correttezza.

Dimostrazione. Sia φ uno switching di π e sia π_φ il grafo a esso associato. Allora π_φ è connesso e quindi la rimozione di T da π_φ produce esattamente due componenti connesse, perché π è una proof net.

Se, per ogni P nodo $\parr$, la premessa diversa da $\varphi(P)$, cioè quella rimossa da π, incide su vertici appartenenti a una stessa componente connessa di π_φ, allora la rimozione di T da π produce due componenti connesse e queste, come π, sono delle proof net.

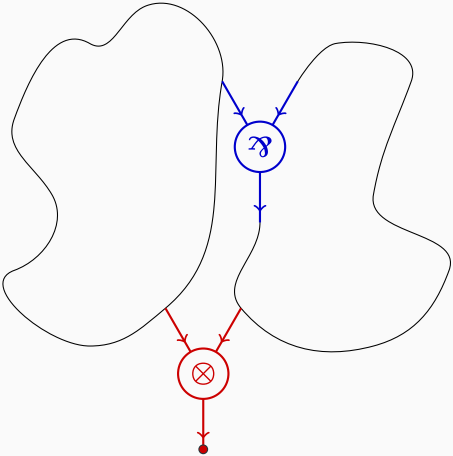
Lemma 2. Se T è un nodo $\otimes$ terminale non sequenzializzante, allora T ha un nodo $\parr$ di correttezza.

Dimostrazione. Sia φ uno switching di π e sia π_φ il grafo a esso associato. Allora π_φ è connesso e quindi la rimozione di T da π_φ produce esattamente due componenti connesse, perché π è una proof net.

Se, per ogni P nodo $\parr$, la premessa diversa da $\varphi(P)$, cioè quella rimossa da π, incide su vertici appartenenti a una stessa componente connessa di π_φ, allora la rimozione di T da π produce due componenti connesse e queste, come π, sono delle proof net. Dunque T è sequenzializzante.

Lemma 2. Se T è un nodo $\otimes$ terminale non sequenzializzante, allora T ha un nodo $\parr$ di correttezza.

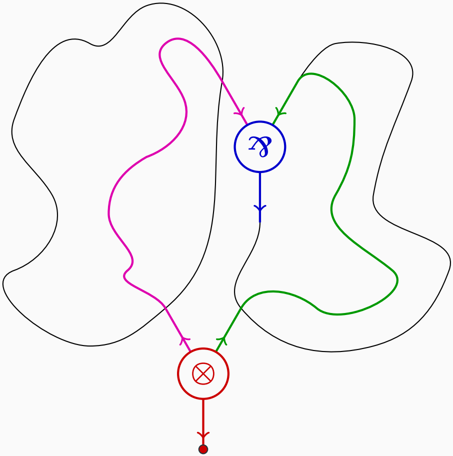
Dimostrazione.
Supponiamo ora che esista P nodo $\parr$ tale che la premessa diversa da $\varphi(P)$ incida su vertici appartenenti a componenti connesse distinte di π_φ.



Lemma 2. Se T è un nodo $\otimes$ terminale non sequenzializzante, allora T ha un nodo $\parr$ di correttezza.

Dimostrazione.

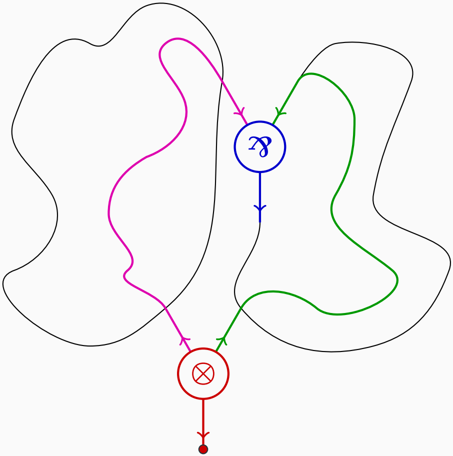
Allora la componente che contiene $\varphi(P)$ e l'unione dell'altra componente con l'altra premessa di P indurranno ciascuna un cammino che ha come primo arco una premessa di T e come ultimo arco una premessa di P.



Lemma 2. Se T è un nodo $\otimes$ terminale non sequenzializzante, allora T ha un nodo $⅋$ di correttezza.

Dimostrazione.

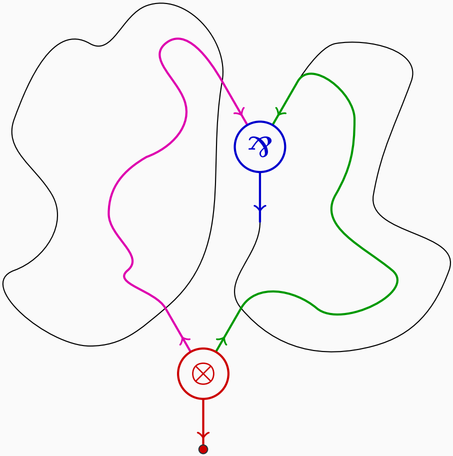
Questi cammini sono internamente disgiunti.



Lemma 2. Se T è un nodo $\otimes$ terminale non sequenzializzante, allora T ha un nodo $\parr$ di correttezza.

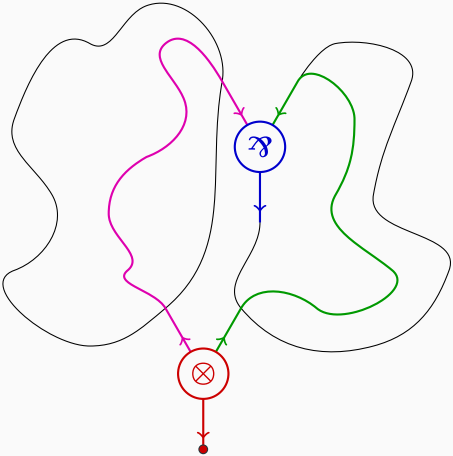
Dimostrazione.

Questi cammini sono internamente disgiunti. Inoltre, soddisfano la proprietà (1) e sono globalmente switching, dunque sono localmente switching per il fatto 3.



Lemma 2. Se T è un nodo $\otimes$ terminale non sequenzializzante, allora T ha un nodo $\parr$ di correttezza.

Dimostrazione.
Questi cammini sono internamente disgiunti.
Inoltre, soddisfano la proprietà (1) e sono globalmente switching, dunque sono localmente switching per il fatto 3.
Dunque P è un $\parr$ di correttezza per T. $\square$



Esistenza di nodi sequenzializzanti

Teorema. Ogni proof net π ha un nodo sequenzializzante.

Teorema. Ogni proof net π ha un nodo sequenzializzante.

Dimostrazione. Sia A un nodo *ax* di π.

Teorema. Ogni proof net π ha un nodo sequenzializzante.

Dimostrazione. Sia A un nodo *ax* di π. Se A è terminale, allora è l'unico nodo di π e dunque è sequenzializzante.

Teorema. Ogni proof net π ha un nodo sequenzializzante.

Dimostrazione. Sia A un nodo *ax* di π. Se A è terminale, allora è l'unico nodo di π e dunque è sequenzializzante. Altrimenti, esiste una conclusione a di A tale che $\delta(a)$ sia non vuoto.

Teorema. Ogni proof net π ha un nodo sequenzializzante.

Dimostrazione. Sia A un nodo *ax* di π. Se A è terminale, allora è l'unico nodo di π e dunque è sequenzializzante. Altrimenti, esiste una conclusione a di A tale che $\delta(a)$ sia non vuoto. Sia $N := t(\delta(a))$.

Teorema. Ogni proof net π ha un nodo sequenzializzante.

Dimostrazione. Sia A un nodo *ax* di π. Se A è terminale, allora è l'unico nodo di π e dunque è sequenzializzante. Altrimenti, esiste una conclusione a di A tale che $\delta(a)$ sia non vuoto. Sia $N := t(\delta(a))$. Allora N è terminale, per definizione.

Teorema. Ogni proof net π ha un nodo sequenzializzante.

Dimostrazione. Consideriamo adesso la seguente procedura.

SEQUENZIALIZZANTE(N)
    se N è un nodo $\parr$ **allora**
        restituisci N
    se N è un nodo $\otimes$ **allora**
        se N è sequenzializzante **allora**
            restituisci N
        altrimenti
            sia N' un nodo $\parr$ di correttezza per N
            sia N'' l'ultimo nodo di $\delta(N')$
            restituisci SEQUENZIALIZZANTE(N'')

Teorema. Ogni proof net π ha un nodo sequenzializzante.

Dimostrazione. Se la procedura termina abbiamo finito, perciò supponiamo per assurdo che non termini.

Teorema. Ogni proof net π ha un nodo sequenzializzante.

Dimostrazione. Se la procedura termina abbiamo finito, perciò supponiamo per assurdo che non termini. In tal caso, per ogni $m \in \mathbb{N}$, esistono dei cammini $\kappa_1, \ldots, \kappa_m$, $\kappa'_1, \ldots, \kappa'_m$ e $\delta_1, \ldots, \delta_m$ tali che, per ogni $i = 1, \ldots, m$, se $N_i := s(\kappa_i)$ e $N'_i := t(\kappa_i)$, allora:

Teorema. Ogni proof net π ha un nodo sequenzializzante.

Dimostrazione. Se la procedura termina abbiamo finito, perciò supponiamo per assurdo che non termini. In tal caso, per ogni $m \in \mathbb{N}$, esistono dei cammini $\kappa_1, \ldots, \kappa_m$, $\kappa'_1, \ldots, \kappa'_m$ e $\delta_1, \ldots, \delta_m$ tali che, per ogni $i = 1, \ldots, m$, se $N_i := s(\kappa_i)$ e $N'_i := t(\kappa_i)$, allora:

- N_i è un nodo $\otimes$.

Teorema. Ogni proof net π ha un nodo sequenzializzante.

Dimostrazione. Se la procedura termina abbiamo finito, perciò supponiamo per assurdo che non termini. In tal caso, per ogni $m \in \mathbb{N}$, esistono dei cammini $\kappa_1, \dots, \kappa_m$, $\kappa'_1, \dots, \kappa'_m$ e $\delta_1, \dots, \delta_m$ tali che, per ogni $i = 1, \dots, m$, se $N_i := s(\kappa_i)$ e $N'_i := t(\kappa_i)$, allora:

- N_i è un nodo $\otimes$.
- N'_i è un nodo $⅋$.

Teorema. Ogni proof net π ha un nodo sequenzializzante.

Dimostrazione. Se la procedura termina abbiamo finito, perciò supponiamo per assurdo che non termini. In tal caso, per ogni $m \in \mathbb{N}$, esistono dei cammini $\kappa_1, \ldots, \kappa_m$, $\kappa'_1, \ldots, \kappa'_m$ e $\delta_1, \ldots, \delta_m$ tali che, per ogni $i = 1, \ldots, m$, se $N_i := s(\kappa_i)$ e $N'_i := t(\kappa_i)$, allora:

- N_i è un nodo $\otimes$.
- N'_i è un nodo $\parr$.
- $(\kappa_i, \kappa'_i, N'_i)$ è una tripla di correttezza per N_i.

Teorema. Ogni proof net π ha un nodo sequenzializzante.

Dimostrazione. Se la procedura termina abbiamo finito, perciò supponiamo per assurdo che non termini. In tal caso, per ogni $m \in \mathbb{N}$, esistono dei cammini $\kappa_1, \ldots, \kappa_m$, $\kappa'_1, \ldots, \kappa'_m$ e $\delta_1, \ldots, \delta_m$ tali che, per ogni $i = 1, \ldots, m$, se $N_i := s(\kappa_i)$ e $N'_i := t(\kappa_i)$, allora:

- N_i è un nodo $\otimes$.
- N'_i è un nodo $⅋$.
- $(\kappa_i, \kappa'_i, N'_i)$ è una tripla di correttezza per N_i.
- $\delta_i = \delta(N'_i)$ e, se $i \neq m$, allora $t(\delta_i) = N_{i+1}$.

Teorema. Ogni proof net π ha un nodo sequenzializzante.

Dimostrazione. Poiché π è un grafo finito, per $m \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande il cammino seguente deve visitare qualche nodo più di una volta:

$$\mu := \kappa_1 \cdot \delta_1 \cdot \kappa_2 \cdot \delta_2 \cdots \kappa_m \cdot \delta_m$$

Teorema. Ogni proof net π ha un nodo sequenzializzante.

Dimostrazione. Poiché π è un grafo finito, per $m \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande il cammino seguente deve visitare qualche nodo più di una volta:

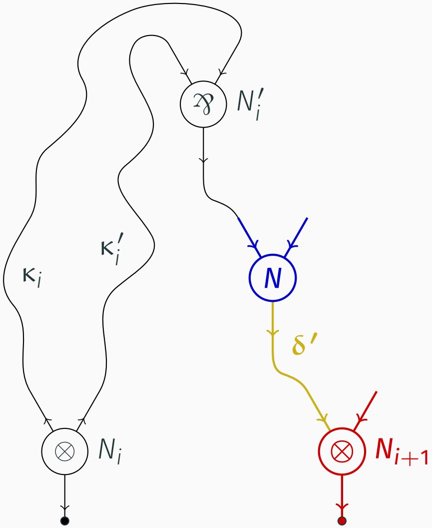
$$\mu := \kappa_1 \cdot \delta_1 \cdot \kappa_2 \cdot \delta_2 \cdots \kappa_m \cdot \delta_m$$

Esistono allora un nodo N di μ e due indici $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ con $i \leqslant j$ tali che N sia il primo nodo di μ che occorre in uno dei cammini κ_i, κ_i', δ_i e ha un'altra occorrenza in uno tra κ_j e δ_j.

Teorema. Ogni proof net π ha un nodo sequenzializzante.

Dimostrazione.

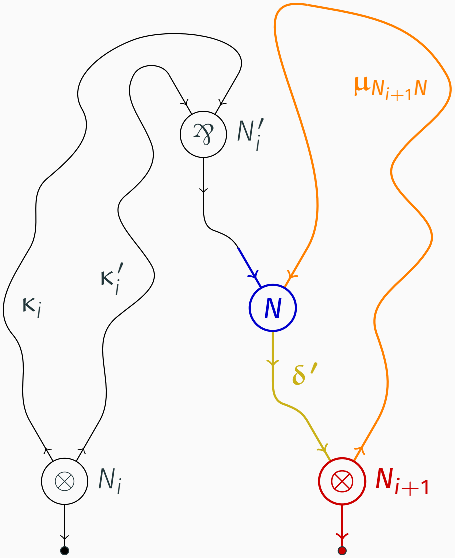
Supponiamo che il nodo N occorra internamente a δ_i e denotiamo δ' il sottocammino di δ_i tra i nodi N e N_{i+1}.



Teorema. Ogni proof net π ha un nodo sequenzializzante.

Dimostrazione.

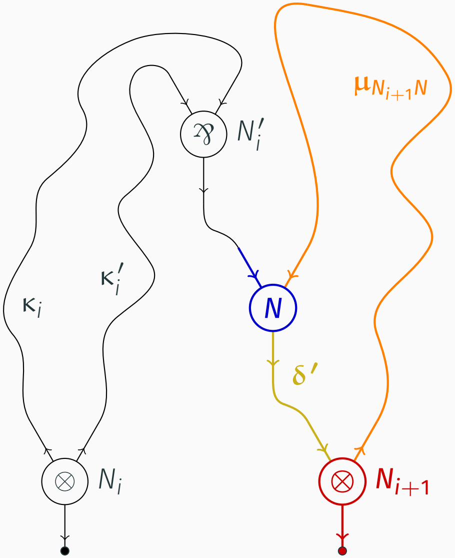
Allora abbiamo che $\delta' \cdot \mu_{N_{i+1}N}$ è un ciclo localmente switching per i fatti 2 e 4.



Teorema. Ogni proof net π ha un nodo sequenzializzante.

Dimostrazione.

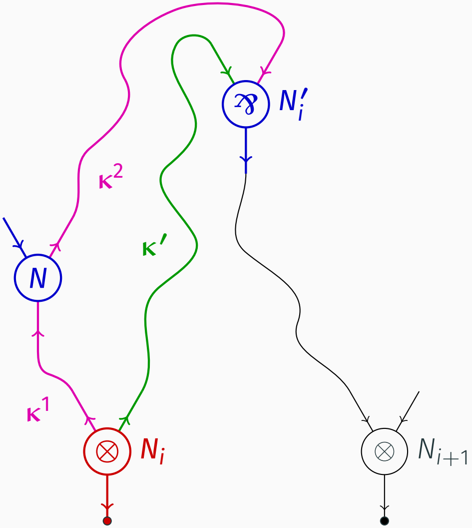
Allora abbiamo che $\delta' \cdot \mu_{N_{i+1}N}$ è un ciclo localmente switching per i fatti 2 e 4. Per il lemma 1, è un ciclo globalmente switching, contro il fatto 1.



Teorema. Ogni proof net π ha un nodo sequenzializzante.

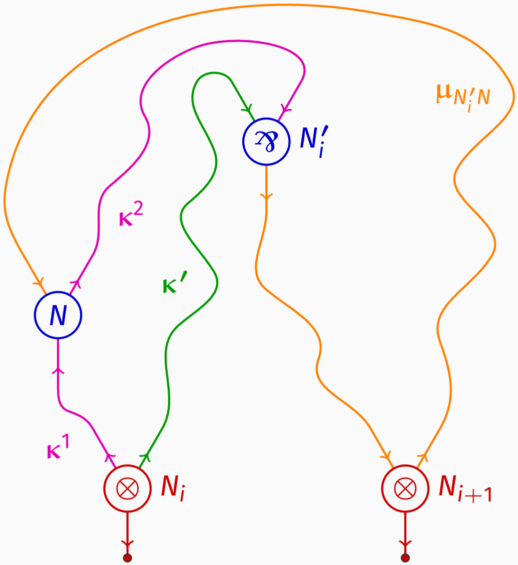
Dimostrazione.

Se N non occorre in δ_i, allora appare in un cammino $\kappa \in \{\kappa_i, \kappa_i'\}$. Siano κ' l'altro cammino, κ^1 il sottocammino di κ da N_i a N, κ^2 il sottocammino di κ da N a N_i'.



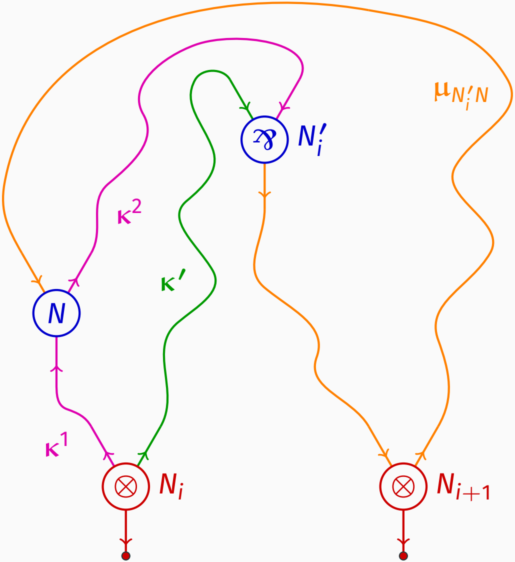
Teorema. Ogni proof net π ha un nodo sequenzializzante.

Dimostrazione.
Se N non è un nodo $\parr$ (possibilmente $N = N_i$), allora $\kappa^2 \cdot \mu_{N_i'N}$ è un ciclo localmente switching per i fatti 2 e 4.



Teorema. Ogni proof net π ha un nodo sequenzializzante.

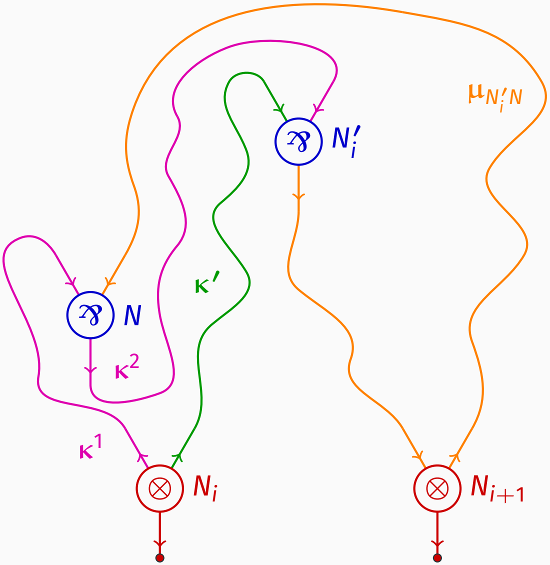
Dimostrazione.
Ma allora,
di nuovo
per il lemma 1,
è un ciclo
globalmente
switching
e, come
prima, questo
contraddice
il fatto 1.



Teorema. Ogni proof net π ha un nodo sequenzializzante.

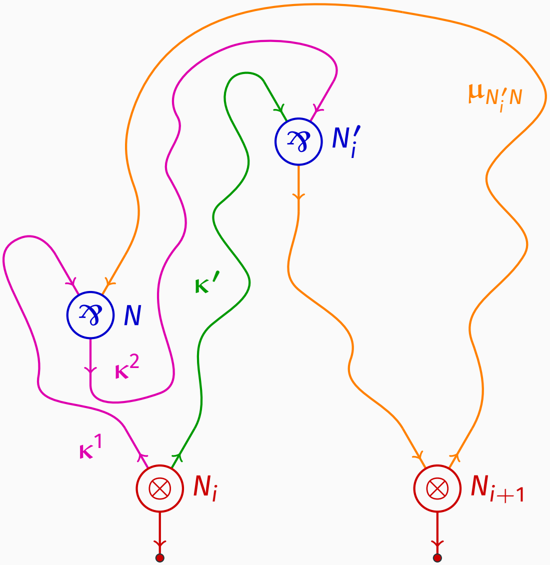
Dimostrazione.

Possiamo concludere allo stesso modo quando N è un nodo $\parr$ (possibilmente $N = N_i'$) e l'ultimo arco di κ^1 è premessa di N.



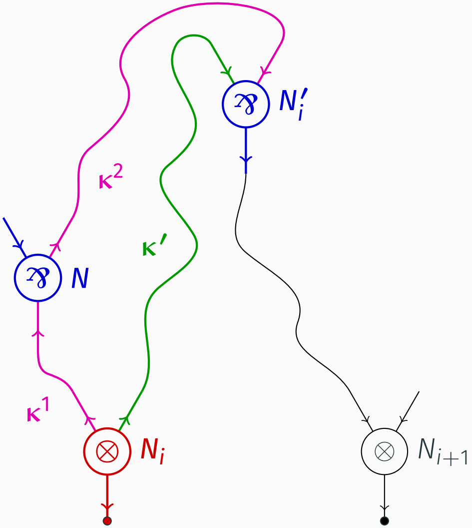
Teorema. Ogni proof net π ha un nodo sequenzializzante.

Dimostrazione.
In questo caso, il primo arco di κ^2 è la conclusione di N, altrimenti κ non sarebbe un cammino localmente switching e avremmo dunque un assurdo.



Teorema. Ogni proof net π ha un nodo sequenzializzante.

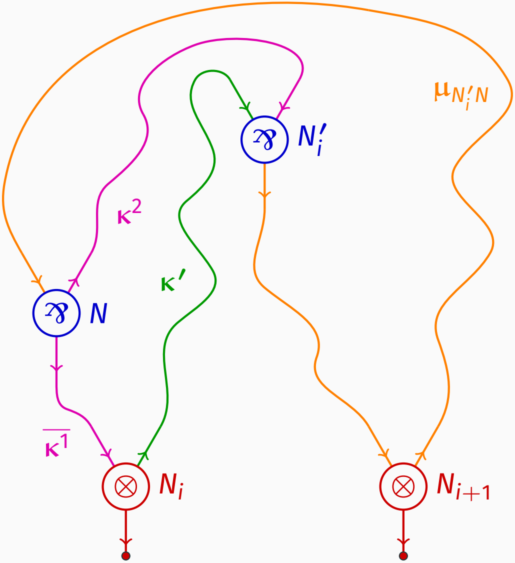
Dimostrazione.
Supponiamo infine che N sia un nodo $\parr$ e che l'ultimo arco di κ^1 sia la conclusione di N, nel qual caso il primo arco di κ^2 è una premessa di N.



Teorema. Ogni proof net π ha un nodo sequenzializzante.

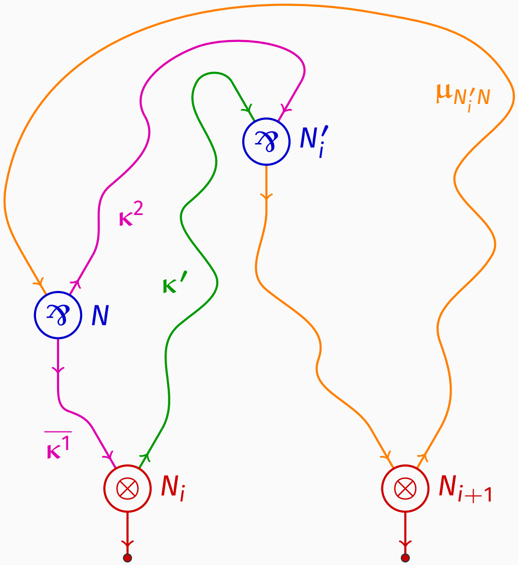
Dimostrazione.

In tal caso, abbiamo che $\kappa' \cdot \mu_{N_i'N} \cdot \overline{\kappa^1}$ è un ciclo localmente switching, per i fatti 2 e 4.



Teorema. Ogni proof net π ha un nodo sequenzializzante.

Dimostrazione.
In tal caso, abbiamo che $\kappa' \cdot \mu_{N_i' N} \cdot \overline{\kappa^1}$ è un ciclo localmente switching, per i fatti 2 e 4. Per il lemma 1, è un ciclo globalmente switching, assurdo. $\square$



Olivier Laurent.
Sequentialization of multiplicative proof nets.
2013.