Algebre di Boole e teorema di rappresentazione di Stone

Raffaele Di Donna

Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica

14 luglio 2020

Piano della presentazione

Che cos'è un'algebra di Boole?

Definizione

Un'algebra di Boole è un anello unitario $\langle A, +, \times, 0, 1 \rangle$, con $1 \neq 0$, tale che $x^2 = x$ per ogni $x \in A$.

Esempio

$\langle \{0,1\}, +, \times, 0, 1 \rangle$ con $+$ e $\times$ usuali a meno di $1 + 1 = 0$.

Esempio

$\langle \mathcal{P}(E), \triangle, \cap, \varnothing, E \rangle$ con E insieme non vuoto.

Che cos'è un'algebra di Boole?

Definizione

Un'algebra di Boole è un anello unitario $\langle A, +, \times, 0, 1 \rangle$, con $1 \neq 0$, tale che $x^2 = x$ per ogni $x \in A$.

Esempio

$\langle \{0, 1\}, +, \times, 0, 1 \rangle$ con $+$ e $\times$ usuali a meno di $1 + 1 = 0$.

Esempio

$\langle \mathcal{P}(E), \triangle, \cap, \varnothing, E \rangle$ con E insieme non vuoto.

Che cos'è un'algebra di Boole?

Definizione

Un'algebra di Boole è un anello unitario $\langle A, +, \times, 0, 1 \rangle$, con $1 \neq 0$, tale che $x^2 = x$ per ogni $x \in A$.

Esempio

$\langle \{0, 1\}, +, \times, 0, 1 \rangle$ con $+$ e $\times$ usuali a meno di $1 + 1 = 0$.

Esempio

$\langle \mathcal{P}(E), \triangle, \cap, \varnothing, E \rangle$ con E insieme non vuoto.

Che cos'è un'algebra di Boole?

Definizione

Un'algebra di Boole è un anello unitario $\langle A, +, \times, 0, 1\rangle$, con $1 \neq 0$, tale che $x^2 = x$ per ogni $x \in A$.

Esempio

$\langle \{0,1\}, +, \times, 0, 1\rangle$ con $+$ e $\times$ usuali a meno di $1 + 1 = 0$.

Esempio

$\langle \mathcal{P}(E), \triangle, \cap, \varnothing, E\rangle$ con E insieme non vuoto.

Che cos'è un'algebra di Boole?

Proprietà:

- Anello commutativo.
- $x + x = 0$ per ogni $x \in A$.

Per ogni $x, y \in A$ poniamo $x \leq y$ se vale $xy = x$.

Esempio

Per ogni $X, Y \in \mathcal{P}(E)$ si ha:

$$
\begin{aligned}
& X \leq Y \\
\iff & X \cap Y = X \\
\iff & X \subseteq Y
\end{aligned}
$$

Che cos'è un'algebra di Boole?

Proprietà:

- Anello commutativo.
- $x + x = 0$ per ogni $x \in A$.

Per ogni $x, y \in A$ poniamo $x \leq y$ se vale $xy = x$.

Esempio

Per ogni $X, Y \in \mathcal{P}(E)$ si ha:

$$\begin{aligned} X &\leq Y \\ &\iff X \cap Y = X \\ &\iff X \subseteq Y \end{aligned}$$

Un altro punto di vista

Definizione

Un reticolo distributivo e complementare è un insieme ordinato $\langle A, \leq \rangle$ tale che:

a. Esistono il minimo (0) e il massimo (1) di A.
b. Per ogni $x, y \in A$, esistono gli estremi inferiore ($x \frown y$) e superiore ($x \smile y$).
c. Le operazioni $\frown$ e $\smile$ sono distributive l'una rispetto all'altra.
d. Per ogni $x \in A$ esiste un elemento $x^c \in A$ tale che $x \smile x^c = 1$ e $x \frown x^c = 0$.

Un altro punto di vista

Definizione

Un reticolo distributivo e complementare è un insieme ordinato $\langle A, \leq \rangle$ tale che:

a. Esistono il minimo (0) e il massimo (1) di A.
b. Per ogni $x, y \in A$, esistono gli estremi inferiore ($x \frown y$) e superiore ($x \smile y$).
c. Le operazioni $\frown$ e $\smile$ sono distributive l'una rispetto all'altra.
d. Per ogni $x \in A$ esiste un elemento $x^c \in A$ tale che $x \smile x^c = 1$ e $x \frown x^c = 0$.

Un altro punto di vista

Definizione

Un reticolo distributivo e complementare è un insieme ordinato $\langle A, \leq \rangle$ tale che:

a. Esistono il minimo (0) e il massimo (1) di A.
b. Per ogni $x, y \in A$, esistono gli estremi inferiore ($x \frown y$) e superiore ($x \smile y$).
c. Le operazioni $\frown$ e $\smile$ sono distributive l'una rispetto all'altra.
d. Per ogni $x \in A$ esiste un elemento $x^{\mathbf{c}} \in A$ tale che $x \smile x^{\mathbf{c}} = 1$ e $x \frown x^{\mathbf{c}} = 0$.

Un altro punto di vista

Definizione

Un reticolo distributivo e complementare è un insieme ordinato $\langle A, \leq \rangle$ tale che:

a. Esistono il minimo (0) e il massimo (1) di A.
b. Per ogni $x, y \in A$, esistono gli estremi inferiore ($x \frown y$) e superiore ($x \smile y$).
c. Le operazioni $\frown$ e $\smile$ sono distributive l'una rispetto all'altra.
d. Per ogni $x \in A$ esiste un elemento $x^{\mathsf{c}} \in A$ tale che $x \smile x^{\mathsf{c}} = 1$ e $x \frown x^{\mathsf{c}} = 0$.

Un altro punto di vista

Definizione

Un reticolo distributivo e complementare è un insieme ordinato $\langle A, \leq \rangle$ tale che:

a. Esistono il minimo (0) e il massimo (1) di A.
b. Per ogni $x, y \in A$, esistono gli estremi inferiore ($x \frown y$) e superiore ($x \smile y$).
c. Le operazioni $\frown$ e $\smile$ sono distributive l'una rispetto all'altra.
d. Per ogni $x \in A$ esiste un elemento $x^{\mathbf{c}} \in A$ tale che $x \smile x^{\mathbf{c}} = 1$ e $x \frown x^{\mathbf{c}} = 0$.

Un altro punto di vista

Teorema

Un reticolo distributivo e complementare $\langle A, \leq \rangle$ acquista una struttura di algebra di Boole $\langle A, +, \times, 0, 1 \rangle$ in modo tale che valga $x \leq y$ se e solo se $xy = x$.

Dimostrazione (Cenno)

Definiamo prodotto e somma come segue:

$$x \times y = x \frown y$$
$$x + y = (x \frown y^{\mathbf{c}}) \smile (x^{\mathbf{c}} \frown y)$$

$\square$

Un altro punto di vista

Teorema

Un reticolo distributivo e complementare $\langle A, \leq \rangle$ acquista una struttura di algebra di Boole $\langle A, +, \times, 0, 1 \rangle$ in modo tale che valga $x \leq y$ se e solo se $xy = x$.

Dimostrazione (Cenno)

Definiamo prodotto e somma come segue:

$$x \times y = x \frown y$$
$$x + y = (x \frown y^{\mathbf{c}}) \smile (x^{\mathbf{c}} \frown y) \qquad \square$$

Omomorfismi e isomorfismi

Definizione

- Un omomorfismo di algebre di Boole è un omomorfismo di anelli unitari tra algebre di Boole.
- Un isomorfismo di algebre di Boole è un omomorfismo di algebre di Boole biiettivo.
- Due algebre di Boole $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ si dicono isomorfe ($\mathcal{A} \cong \mathcal{A}'$) se esiste un isomorfismo di algebre di Boole da $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}'$.
- Lo spazio di Stone di $\mathcal{A}$, denotato $S(\mathcal{A})$, è l'insieme degli omomorfismi di algebre di Boole da $\mathcal{A}$ in $\{0, 1\}$.

Definizione

- Un omomorfismo di algebre di Boole è un omomorfismo di anelli unitari tra algebre di Boole.
- Un isomorfismo di algebre di Boole è un omomorfismo di algebre di Boole biiettivo.
- Due algebre di Boole $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ si dicono isomorfe ($\mathcal{A} \cong \mathcal{A}'$) se esiste un isomorfismo di algebre di Boole da $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}'$.
- Lo spazio di Stone di $\mathcal{A}$, denotato $S(\mathcal{A})$, è l'insieme degli omomorfismi di algebre di Boole da $\mathcal{A}$ in $\{0, 1\}$.

Omomorfismi e isomorfismi

Definizione

- Un omomorfismo di algebre di Boole è un omomorfismo di anelli unitari tra algebre di Boole.
- Un isomorfismo di algebre di Boole è un omomorfismo di algebre di Boole biiettivo.
- Due algebre di Boole $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ si dicono isomorfe ($\mathcal{A} \cong \mathcal{A}'$) se esiste un isomorfismo di algebre di Boole da $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}'$.
- Lo spazio di Stone di $\mathcal{A}$, denotato $S(\mathcal{A})$, è l'insieme degli omomorfismi di algebre di Boole da $\mathcal{A}$ in $\{0, 1\}$.

Omomorfismi e isomorfismi

Definizione

- Un omomorfismo di algebre di Boole è un omomorfismo di anelli unitari tra algebre di Boole.
- Un isomorfismo di algebre di Boole è un omomorfismo di algebre di Boole biiettivo.
- Due algebre di Boole $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ si dicono isomorfe ($\mathcal{A} \cong \mathcal{A}'$) se esiste un isomorfismo di algebre di Boole da $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}'$.
- Lo spazio di Stone di $\mathcal{A}$, denotato $S(\mathcal{A})$, è l'insieme degli omomorfismi di algebre di Boole da $\mathcal{A}$ in $\{0, 1\}$.

Omomorfismi e isomorfismi

Definizione

- Un omomorfismo di algebre di Boole è un omomorfismo di anelli unitari tra algebre di Boole.
- Un isomorfismo di algebre di Boole è un omomorfismo di algebre di Boole biiettivo.
- Due algebre di Boole $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ si dicono isomorfe ($\mathcal{A} \cong \mathcal{A}'$) se esiste un isomorfismo di algebre di Boole da $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}'$.
- Lo spazio di Stone di $\mathcal{A}$, denotato $S(\mathcal{A})$, è l'insieme degli omomorfismi di algebre di Boole da $\mathcal{A}$ in $\{0, 1\}$.

Omomorfismi e isomorfismi

Teorema

Siano $\mathcal{A} = \langle A, \leq, 0, 1\rangle$, $\mathcal{A}' = \langle A', \leq, 0, 1\rangle$ algebre di Boole. Una mappa suriettiva h da A in A' è un isomorfismo se e solo se, per ogni $x, y \in A$, vale $x \leq y$ se e solo se $h(x) \leq h(y)$.

Dimostrazione ($\Longrightarrow$)

Se h è un omomorfismo, allora:

$$\begin{aligned} x \leq y &\iff xy = x \\ &\Longrightarrow h(xy) = h(x) \\ &\iff h(x)h(y) = h(x) \\ &\iff h(x) \leq h(y) \end{aligned}$$

$\square$

Omomorfismi e isomorfismi

Teorema

Siano $\mathcal{A} = \langle A, \leq, 0, 1 \rangle$, $\mathcal{A}' = \langle A', \leq, 0, 1 \rangle$ algebre di Boole. Una mappa suriettiva h da A in A' è un isomorfismo se e solo se, per ogni $x, y \in A$, vale $x \leq y$ se e solo se $h(x) \leq h(y)$.

Dimostrazione ($\Longrightarrow$)

Se h è un omomorfismo, allora:

$$\begin{aligned} x \leq y &\iff xy = x \\ &\Longrightarrow h(xy) = h(x) \\ &\iff h(x)h(y) = h(x) \\ &\iff h(x) \leq h(y) \end{aligned}$$

$\square$

Omomorfismi e isomorfismi

Teorema

Siano $\mathcal{A} = \langle A, \leq, 0, 1 \rangle$, $\mathcal{A}' = \langle A', \leq, 0, 1 \rangle$ algebre di Boole. Una mappa suriettiva h da A in A' è un isomorfismo se e solo se, per ogni $x, y \in A$, vale $x \leq y$ se e solo se $h(x) \leq h(y)$.

Dimostrazione ($\Longrightarrow$)

Se h è un isomorfismo, allora:

$$\begin{aligned} x \leq y &\iff xy = x \\ &\iff h(xy) = h(x) \\ &\iff h(x)h(y) = h(x) \\ &\iff h(x) \leq h(y) \end{aligned}$$

$\square$

Ideali e ideali massimali

Un ideale sarà per noi un "ideale proprio".
Un ideale massimale sarà dunque un elemento massimale nell'insieme degli ideali.

Esempio

Sia $\mathcal{A}$ un'algebra di Boole e sia $a \in A$ con $a \neq 1$. Chiamiamo ideale principale generato da a l'ideale $I_a = \{x \in A \colon x \leq a\}$.

Ideali e ideali massimali

Un ideale sarà per noi un "ideale proprio".
Un ideale massimale sarà dunque un elemento massimale nell'insieme degli ideali.

Esempio

Sia $\mathcal{A}$ un'algebra di Boole e sia $a \in A$ con $a \neq 1$. Chiamiamo ideale principale generato da a l'ideale $I_a = \{x \in A \colon x \leq a\}$.

Filtri

Sia $\mathcal{A} = \langle A, +, \times, 0, 1\rangle$ un'algebra di Boole.

Definizione

Un sottoinsieme F di A tale che $\{x \in A\colon x^{\mathsf{c}} \in F\}$ sia un ideale di $\mathcal{A}$ viene detto un filtro di $\mathcal{A}$.

Diremo che $\{x \in A\colon x^{\mathsf{c}} \in F\}$ è l'ideale duale di F.
Qualsiasi ideale I di $\mathcal{A}$ è l'ideale duale di $F = \{x \in A\colon x^{\mathsf{c}} \in I\}$, quindi F si dice il filtro duale di I.

Esempio

Sia $a \in A$ con $a \neq 0$. Chiamiamo filtro principale generato da a il filtro $F_a = \{x \in A\colon a \leq x\}$.

Sia $\mathcal{A} = \langle A, +, \times, 0, 1\rangle$ un'algebra di Boole.

Definizione

Un sottoinsieme F di A tale che $\{x \in A \colon x^{\mathbf{c}} \in F\}$ sia un ideale di $\mathcal{A}$ viene detto un filtro di $\mathcal{A}$.

Diremo che $\{x \in A \colon x^{\mathbf{c}} \in F\}$ è l'ideale duale di F.
Qualsiasi ideale I di $\mathcal{A}$ è l'ideale duale di $F = \{x \in A \colon x^{\mathbf{c}} \in I\}$, quindi F si dice il filtro duale di I.

Esempio

Sia $a \in A$ con $a \neq 0$. Chiamiamo filtro principale generato da a il filtro $F_a = \{x \in A \colon a \leq x\}$.

Filtri

Sia $\mathcal{A} = \langle A, +, \times, 0, 1 \rangle$ un'algebra di Boole.

Definizione

Un sottoinsieme F di A tale che $\{x \in A \colon x^{\mathbf{c}} \in F\}$ sia un ideale di $\mathcal{A}$ viene detto un filtro di $\mathcal{A}$.

Diremo che $\{x \in A \colon x^{\mathbf{c}} \in F\}$ è l'ideale duale di F.
Qualsiasi ideale I di $\mathcal{A}$ è l'ideale duale di $F = \{x \in A \colon x^{\mathbf{c}} \in I\}$, quindi F si dice il filtro duale di I.

Esempio

Sia $a \in A$ con $a \neq 0$. Chiamiamo filtro principale generato da a il filtro $F_a = \{x \in A \colon a \leq x\}$.

Filtri

Sia $\mathcal{A} = \langle A, +, \times, 0, 1 \rangle$ un'algebra di Boole.

Definizione

Un sottoinsieme F di A tale che $\{x \in A\colon x^{\mathbf{c}} \in F\}$ sia un ideale di $\mathcal{A}$ viene detto un filtro di $\mathcal{A}$.

Diremo che $\{x \in A\colon x^{\mathbf{c}} \in F\}$ è l'ideale duale di F.
Qualsiasi ideale I di $\mathcal{A}$ è l'ideale duale di $F = \{x \in A\colon x^{\mathbf{c}} \in I\}$, quindi F si dice il filtro duale di I.

Esempio

Sia $a \in A$ con $a \neq 0$. Chiamiamo filtro principale generato da a il filtro $F_a = \{x \in A\colon a \leq x\}$.

Ultrafiltri

Definizione

Un ultrafiltro di $\mathcal{A}$ è un elemento massimale nell'insieme dei filtri di $\mathcal{A}$.

Se I è l'ideale duale di un ultrafiltro F di $\mathcal{A}$, allora I e F sono:

- L'uno il complementare dell'altro.
- L'uno l'insieme dei complementi degli elementi dell'altro.

Ultrafiltri

Definizione

Un ultrafiltro di $\mathcal{A}$ è un elemento massimale nell'insieme dei filtri di $\mathcal{A}$.

Se I è l'ideale duale di un ultrafiltro F di $\mathcal{A}$, allora I e F sono:

- L'uno il complementare dell'altro.
- L'uno l'insieme dei complementi degli elementi dell'altro.

Ultrafiltri

Denotiamo h_I l'omomorfismo da $\mathcal{A}$ in $\{0,1\}$ avente per nucleo l'ideale massimale I.

$$
\begin{array}{ccccc}
\{\text{Ideali massimali di } \mathcal{A}\} & \longleftrightarrow & \{\text{Ultrafiltri di } \mathcal{A}\} & \longleftrightarrow & S(\mathcal{A}) \\
I & \longmapsto & A \setminus I & & \\
A \setminus F & \longleftarrow\!\shortmid & F & \longmapsto & h_{A \setminus F} \\
 & & \{x \in A \colon h(x) = 1\} & \longleftarrow\!\shortmid & h \\
I & & \longmapsto & & h_I \\
\{x \in A \colon h(x) = 0\} & & \longleftarrow\!\shortmid & & h
\end{array}
$$

Ultrafiltri

Denotiamo h_I l'omomorfismo da $\mathcal{A}$ in $\{0, 1\}$ avente per nucleo l'ideale massimale I.

$$
\begin{array}{ccccc}
\{\text{Ideali massimali di } \mathcal{A}\} & \longleftrightarrow & \{\text{Ultrafiltri di } \mathcal{A}\} & \longleftrightarrow & S(\mathcal{A}) \\
I & \longmapsto & A \setminus I & & \\
A \setminus F & \longleftarrow\!\shortmid & F & \longmapsto & h_{A \setminus F} \\
 & & \{x \in A \colon h(x) = 1\} & \longleftarrow\!\shortmid & h \\
I & & \longmapsto & & h_I \\
\{x \in A \colon h(x) = 0\} & & \longleftarrow\!\shortmid & & h
\end{array}
$$

Ultrafiltri

Denotiamo h_I l'omomorfismo da $\mathcal{A}$ in $\{0,1\}$ avente per nucleo l'ideale massimale I.

$$
\begin{array}{cccccc}
\{\text{Ideali massimali di } \mathcal{A}\} & \longleftrightarrow & \{\text{Ultrafiltri di } \mathcal{A}\} & \longleftrightarrow & S(\mathcal{A}) \\
I & \longmapsto & A \setminus I & & \\
A \setminus F & \longleftarrow & F & \longmapsto & h_{A \setminus F} \\
 & & \{x \in A \colon h(x) = 1\} & \longleftarrow & h \\
I & & \longmapsto & & h_I \\
\{x \in A \colon h(x) = 0\} & & \longleftarrow & & h
\end{array}
$$

Ultrafiltri

Denotiamo h_I l'omomorfismo da $\mathcal{A}$ in $\{0,1\}$ avente per nucleo l'ideale massimale I.

$$
\begin{array}{ccccc}
\{\text{Ideali massimali di } \mathcal{A}\} & \longleftrightarrow & \{\text{Ultrafiltri di } \mathcal{A}\} & \longleftrightarrow & S(\mathcal{A}) \\
I & \longmapsto & A \setminus I & & \\
A \setminus F & \longleftarrow & F & \longmapsto & h_{A\setminus F} \\
 & & \{x \in A \colon h(x) = 1\} & \longleftarrow & h \\
I & & \longmapsto & & h_I \\
\{x \in A \colon h(x) = 0\} & & \longleftarrow & & h
\end{array}
$$

Algebre di Boole e teorema di Stone
Raffaele Di Donna
Definizione e proprietà
Nozioni di algebra
Filtri e ultrafiltri
Nozioni di topologia
Il teorema di Stone

Ultrafiltri

Denotiamo h_I l'omomorfismo da $\mathcal{A}$ in $\{0,1\}$ avente per nucleo l'ideale massimale I.

$$
\begin{array}{ccccc}
\{\text{Ideali massimali di } \mathcal{A}\} & \longleftrightarrow & \{\text{Ultrafiltri di } \mathcal{A}\} & \longleftrightarrow & S(\mathcal{A}) \\
I & \longmapsto & A \setminus I & & \\
A \setminus F & \longleftarrow\!\shortmid & F & \longmapsto & h_{A \setminus F} \\
 & & \{x \in A \colon h(x) = 1\} & \longleftarrow\!\shortmid & h \\
I & & \longmapsto & & h_I \\
\{x \in A \colon h(x) = 0\} & & \longleftarrow\!\shortmid & & h
\end{array}
$$

Teorema dell'ultrafiltro

Teorema (di Krull)

Sia $\mathcal{R} = \langle R, +, \times, 0, 1\rangle$ un anello unitario con $1 \neq 0$. Allora ogni ideale di $\mathcal{R}$ è contenuto in un ideale massimale di $\mathcal{R}$.

È equivalente al lemma di Zorn, cioè all'assioma della scelta.

Teorema (dell'ultrafiltro)

Sia $\mathcal{A} = \langle A, +, \times, 0, 1\rangle$ un'algebra di Boole. Allora ogni filtro di $\mathcal{A}$ è contenuto in un ultrafiltro di $\mathcal{A}$.

Teorema dell'ultrafiltro

Teorema (di Krull)

Sia $\mathcal{R} = \langle R, +, \times, 0, 1 \rangle$ *un anello unitario con* $1 \neq 0$. *Allora ogni ideale di* $\mathcal{R}$ *è contenuto in un ideale massimale di* $\mathcal{R}$.

È equivalente al lemma di Zorn, cioè all'assioma della scelta.

Teorema (dell'ultrafiltro)

Sia $\mathcal{A} = \langle A, +, \times, 0, 1 \rangle$ *un'algebra di Boole. Allora ogni filtro di* $\mathcal{A}$ *è contenuto in un ultrafiltro di* $\mathcal{A}$.

Qualche richiamo di topologia

Ricordiamo le nozioni topologiche di:

- Aperto elementare.
- Chiuso-aperto.
- Spazio topologico di dimensione zero.
- Spazio di Boole.

Esempio

$\langle \mathcal{B}(X), \triangle, \cap, \varnothing, X \rangle$ è un'algebra di Boole.

Qualche richiamo di topologia

Ricordiamo le nozioni topologiche di:

- Aperto elementare.
- Chiuso-aperto.
- Spazio topologico di dimensione zero.
- Spazio di Boole.

Esempio

$\langle \mathcal{B}(X), \triangle, \cap, \varnothing, X \rangle$ è un'algebra di Boole.

Ricordiamo le nozioni topologiche di:

- Aperto elementare.
- Chiuso-aperto.
- Spazio topologico di dimensione zero.
- Spazio di Boole.

Esempio

$\langle \mathcal{B}(X), \triangle, \cap, \varnothing, X \rangle$ è un'algebra di Boole.

Qualche richiamo di topologia

Ricordiamo le nozioni topologiche di:

- Aperto elementare.
- Chiuso-aperto.
- Spazio topologico di dimensione zero.
- Spazio di Boole.

Esempio

$\langle \mathcal{B}(X), \triangle, \cap, \varnothing, X \rangle$ è un'algebra di Boole.

Qualche richiamo di topologia

Ricordiamo le nozioni topologiche di:

- Aperto elementare.
- Chiuso-aperto.
- Spazio topologico di dimensione zero.
- Spazio di Boole.

Esempio

$\langle \mathcal{B}(X), \triangle, \cap, \varnothing, X \rangle$ è un'algebra di Boole.

Qualche richiamo di topologia

Ricordiamo le nozioni topologiche di:

- Aperto elementare.
- Chiuso-aperto.
- Spazio topologico di dimensione zero.
- Spazio di Boole.

Esempio

$\langle \mathcal{B}(X), \triangle, \cap, \varnothing, X \rangle$ è un'algebra di Boole.

Teorema di Tychonoff

Teorema (di Tychonoff)

Sia $\{X_i\}$ una famiglia di spazi topologici compatti. Allora $\prod X_i$ è uno spazio topologico compatto.

Consideriamo:

- $\{0,1\}$ con la topologia discreta.
- $\{0,1\}^A$ con la topologia prodotto.
- $S(\mathcal{A})$ con la topologia indotta.

Fatto

$S(\mathcal{A})$ è uno spazio di Boole.

Teorema (di Tychonoff)

Sia $\{X_i\}$ una famiglia di spazi topologici compatti. Allora $\prod X_i$ è uno spazio topologico compatto.

Consideriamo:

- $\{0,1\}$ con la topologia discreta.
- $\{0,1\}^A$ con la topologia prodotto.
- $S(\mathcal{A})$ con la topologia indotta.

Fatto

$S(\mathcal{A})$ è uno spazio di Boole.

Teorema di Tychonoff

Teorema (di Tychonoff)

Sia $\{X_i\}$ una famiglia di spazi topologici compatti. Allora $\prod X_i$ è uno spazio topologico compatto.

Consideriamo:

- $\{0,1\}$ con la topologia discreta.
- $\{0,1\}^A$ con la topologia prodotto.
- $S(\mathcal{A})$ con la topologia indotta.

Fatto

$S(\mathcal{A})$ è uno spazio di Boole.

Teorema di rappresentazione di Stone

Teorema (di rappresentazione di Stone)

Sia $\mathcal{A}$ un'algebra di Boole. Allora $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}(S(\mathcal{A}))$.

Dimostrazione

Sia H la funzione da A in $\mathcal{B}(S(\mathcal{A}))$ che, a ogni $a \in A$, associa:

$$H(a) = \{h \in S(\mathcal{A}) \colon h(a) = 1\}$$

Allora H è una funzione di codominio $\mathcal{B}(S(\mathcal{A}))$ e suriettiva.

Teorema (di rappresentazione di Stone)

Sia $\mathcal{A}$ un'algebra di Boole. Allora $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}(S(\mathcal{A}))$.

Dimostrazione

Sia H la funzione da A in $\mathcal{B}(S(\mathcal{A}))$ che, a ogni $a \in A$, associa:

$$H(a) = \{h \in S(\mathcal{A})\colon h(a) = 1\}$$

Allora H è una funzione di codominio $\mathcal{B}(S(\mathcal{A}))$ e suriettiva.

Teorema di rappresentazione di Stone

Teorema (di rappresentazione di Stone)

Sia $\mathcal{A}$ un'algebra di Boole. Allora $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}(S(\mathcal{A}))$.

Dimostrazione

Sia H la funzione da A in $\mathcal{B}(S(\mathcal{A}))$ che, a ogni $a \in A$, associa:

$$H(a) = \{h \in S(\mathcal{A}) \colon h(a) = 1\}$$

Allora H è una funzione di codominio $\mathcal{B}(S(\mathcal{A}))$ e suriettiva.

Teorema di rappresentazione di Stone

Ciò è garantito dai due risultati seguenti:

Lemma

Un sottoinsieme Δ di $S(\mathcal{A})$ è un aperto elementare di $S(\mathcal{A})$ se e solo se esiste un elemento $a \in A$ tale che:

$$\Delta = \{h \in S(\mathcal{A}) \colon h(a) = 1\}$$

In caso affermativo, un tale elemento $a \in A$ è unico.

Lemma

L'insieme dei chiuso-aperti di $S(\mathcal{A})$ coincide con l'insieme dei suoi aperti elementari.

Teorema di rappresentazione di Stone

Ciò è garantito dai due risultati seguenti:

Lemma

Un sottoinsieme Δ di $S(\mathcal{A})$ è un aperto elementare di $S(\mathcal{A})$ se e solo se esiste un elemento $a \in A$ tale che:

$$\Delta = \{h \in S(\mathcal{A}) \colon h(a) = 1\}$$

In caso affermativo, un tale elemento $a \in A$ è unico.

Lemma

L'insieme dei chiuso-aperti di $S(\mathcal{A})$ coincide con l'insieme dei suoi aperti elementari.

Teorema di rappresentazione di Stone

Ciò è garantito dai due risultati seguenti:

Lemma

Un sottoinsieme Δ di $S(\mathcal{A})$ è un aperto elementare di $S(\mathcal{A})$ se e solo se esiste un elemento $a \in A$ tale che:

$$\Delta = \{h \in S(\mathcal{A}) \colon h(a) = 1\}$$

In caso affermativo, un tale elemento $a \in A$ è unico.

Lemma

L'insieme dei chiuso-aperti di $S(\mathcal{A})$ coincide con l'insieme dei suoi aperti elementari.

Teorema di rappresentazione di Stone

Dati $x, y \in A$, mostriamo che $x \leq y$ se e solo se $H(x) \subseteq H(y)$.

- Se $x \leq y$, allora $h(x) \leq h(y)$ per ogni $h \in S(\mathcal{A})$ e quindi, se $h(x) = 1$, allora anche $h(y) = 1$. Dunque $H(x) \subseteq H(y)$.
- Se $x \not\leq y$, abbiamo:

$$\begin{aligned} & x \not\leq y \\ \iff & xy \neq x \\ \iff & x + xy \neq 0 \\ \iff & x(1+y) \neq 0 \end{aligned}$$

Il filtro principale generato da $x(1+y)$ è ben definito.

Teorema di rappresentazione di Stone

Dati $x, y \in A$, mostriamo che $x \leq y$ se e solo se $H(x) \subseteq H(y)$.

- Se $x \leq y$, allora $h(x) \leq h(y)$ per ogni $h \in S(\mathcal{A})$ e quindi, se $h(x) = 1$, allora anche $h(y) = 1$. Dunque $H(x) \subseteq H(y)$.
- Se $x \nleq y$, abbiamo:

$$\begin{aligned} & x \nleq y \\ \iff\ & xy \neq x \\ \iff\ & x + xy \neq 0 \\ \iff\ & x(1+y) \neq 0 \end{aligned}$$

Il filtro principale generato da $x(1+y)$ è ben definito.

Teorema di rappresentazione di Stone

Dati $x, y \in A$, mostriamo che $x \leq y$ se e solo se $H(x) \subseteq H(y)$.

- Se $x \leq y$, allora $h(x) \leq h(y)$ per ogni $h \in S(\mathcal{A})$ e quindi, se $h(x) = 1$, allora anche $h(y) = 1$. Dunque $H(x) \subseteq H(y)$.
- Se $x \not\leq y$, abbiamo:

$$\begin{aligned} & x \not\leq y \\ \iff \; & xy \neq x \\ \iff \; & x + xy \neq 0 \\ \iff \; & x(1+y) \neq 0 \end{aligned}$$

Il filtro principale generato da $x(1+y)$ è ben definito.

Teorema di rappresentazione di Stone

Per il teorema dell'ultrafiltro, esiste un ultrafiltro F di $\mathcal{A}$ che lo contiene e, se $h \in S(\mathcal{A})$ è l'omomorfismo associato a F, allora:

$$
\begin{aligned}
& x(1+y) \in F \\
& \implies h(x(1+y)) = 1 \\
& \implies h(x) = 1 \text{ e } h(1+y) = 1 \\
& \implies h(x) = 1 \text{ e } h(y) = 0 \\
& \implies h \in H(x) \text{ e } h \notin H(y) \\
& \implies H(x) \nsubseteq H(y)
\end{aligned}
$$

$\square$

Conclusioni

Corollario

Sia $\mathcal{A}$ un'algebra di Boole finita. Allora $\mathcal{A}$ è isomorfa all'algebra di Boole dell'insieme delle parti di un insieme.

Teorema

Sia X uno spazio di Boole. Allora $X \approx S(\mathcal{B}(X))$.

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Algebre di Boole}\} & \longleftrightarrow & \{\text{Spazi di Boole}\} \\ \mathcal{A} & \longmapsto & S(\mathcal{A}) \\ \mathcal{B}(X) & \longleftarrow & X \end{array}$$

Conclusioni

Corollario

Sia $\mathcal{A}$ un'algebra di Boole finita. Allora $\mathcal{A}$ è isomorfa all'algebra di Boole dell'insieme delle parti di un insieme.

Teorema

Sia X uno spazio di Boole. Allora $X \approx S(\mathcal{B}(X))$.

$$\begin{array}{ccc}
\{\text{Algebre di Boole}\} & \longleftrightarrow & \{\text{Spazi di Boole}\} \\
\mathcal{A} & \longmapsto & S(\mathcal{A}) \\
\mathcal{B}(X) & \longleftarrow & X
\end{array}$$

Conclusioni

Corollario

Sia $\mathcal{A}$ un'algebra di Boole finita. Allora $\mathcal{A}$ è isomorfa all'algebra di Boole dell'insieme delle parti di un insieme.

Teorema

Sia X uno spazio di Boole. Allora $X \approx S(\mathcal{B}(X))$.

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Algebre di Boole}\} & \longleftrightarrow & \{\text{Spazi di Boole}\} \\ \mathcal{A} & \longmapsto & S(\mathcal{A}) \\ \mathcal{B}(X) & \longleftarrow\!\shortmid & X \end{array}$$

Conclusioni

Corollario

Sia $\mathcal{A}$ un'algebra di Boole finita. Allora $\mathcal{A}$ è isomorfa all'algebra di Boole dell'insieme delle parti di un insieme.

Teorema

Sia X uno spazio di Boole. Allora $X \approx S(\mathcal{B}(X))$.

$$
\begin{array}{ccc}
\{\text{Algebre di Boole}\} & \longleftrightarrow & \{\text{Spazi di Boole}\} \\
\mathcal{A} & \longmapsto & S(\mathcal{A}) \\
\mathcal{B}(X) & \longleftarrow\!\shortmid & X
\end{array}
$$