Iniettività in logica lineare

Raffaele Di Donna

25 ottobre 2022

Università Roma Tre

Piano della presentazione

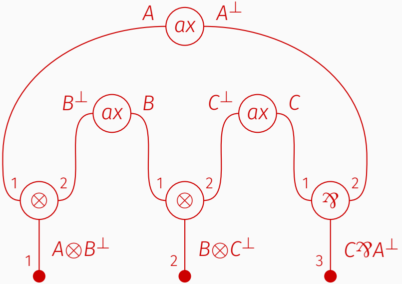
Introduzione

Cos'è una dimostrazione?

Gentzen

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash A, A^\perp} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash B, B^\perp} \qquad \dfrac{}{\vdash C, C^\perp}}{\vdash B^\perp, B \otimes C^\perp, C}}{\vdash A \otimes B^\perp, B \otimes C^\perp, C, A^\perp}}{\vdash A \otimes B^\perp, B \otimes C^\perp, C \parr A^\perp}$$

Girard




Semantica
Osservazionale
Equivalenza
Iniettività
Separabilità
Sintattica

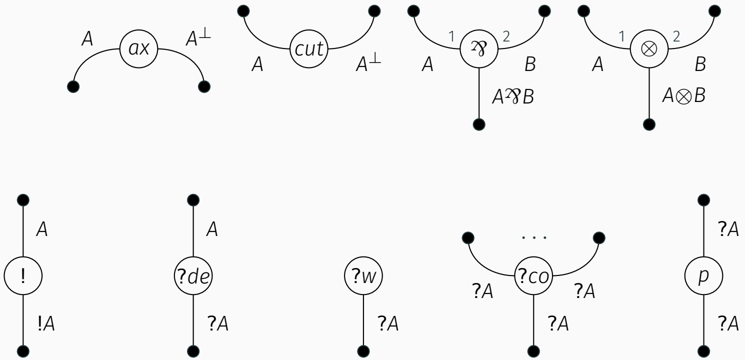
Tecniche recenti

Espansione di Taylor

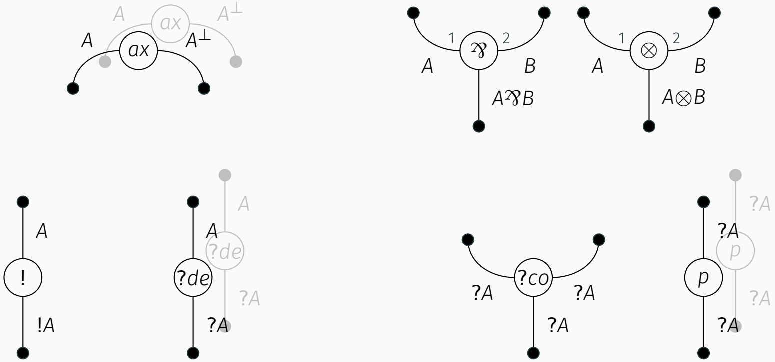
Esperienze ossessive

Iniettività e ossessività

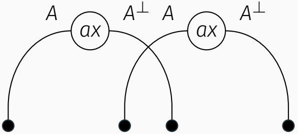
Come si costruisce una rete di prova?



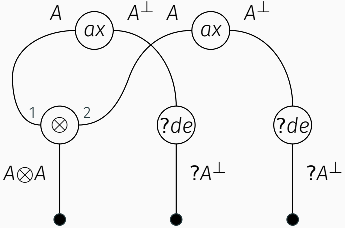
Come si costruisce una rete di prova?



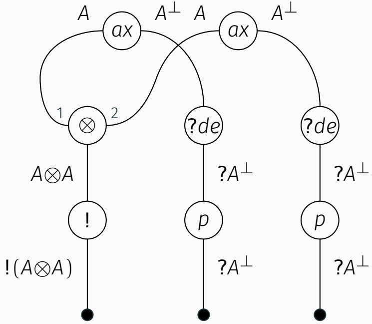
Pseudo struttura di prova



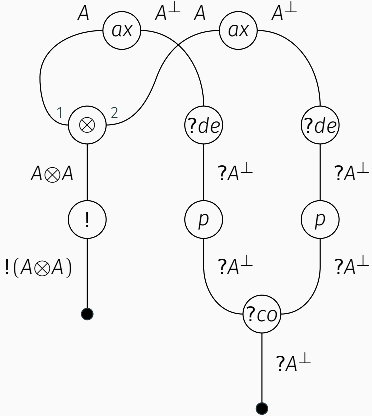
Pseudo struttura di prova



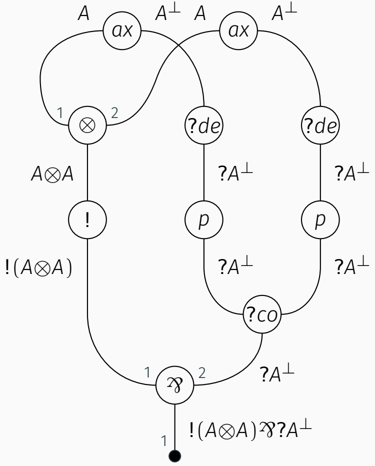
Pseudo struttura di prova



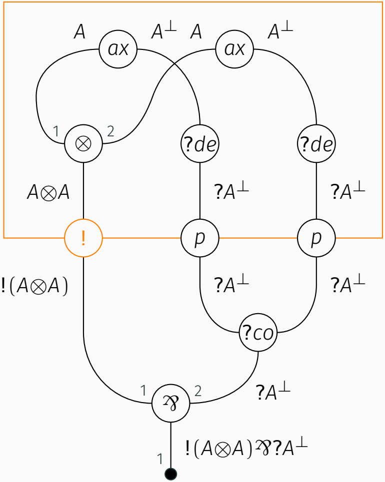
Pseudo struttura di prova



Pseudo struttura di prova



Struttura di prova



Rete di prova *AC*

Tutti i grafi di correttezza sono aciclici

Rete di prova *ACC*

Tutti i grafi di correttezza sono aciclici e connessi

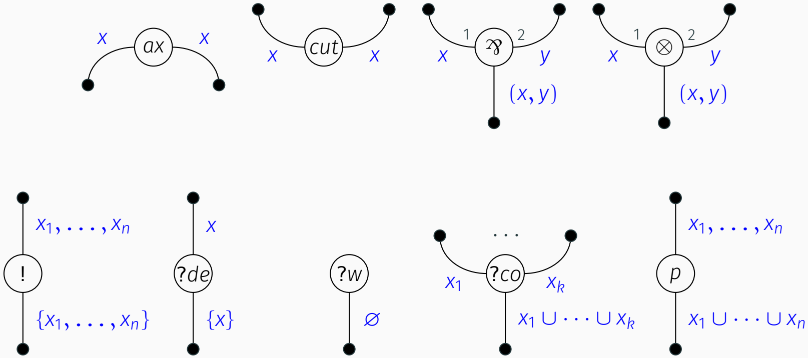
Struttura di prova standard

Non vi sono legami taglio, le conclusioni dei legami assioma hanno tipi atomici e le conclusioni dei legami indebolimento e contrazione non sono premesse di legami pax o contrazione.

Spazio coerente

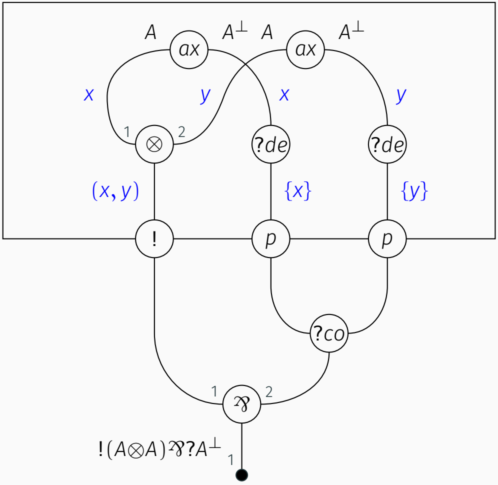
Grafo indiretto $\mathcal{A} = (|\mathcal{A}|, \frown)$ associato a una formula A. L'insieme $|\mathcal{A}|$ è chiamato trama, la relazione binaria $\frown$ sulla trama è chiamata coerenza.

Esperienza

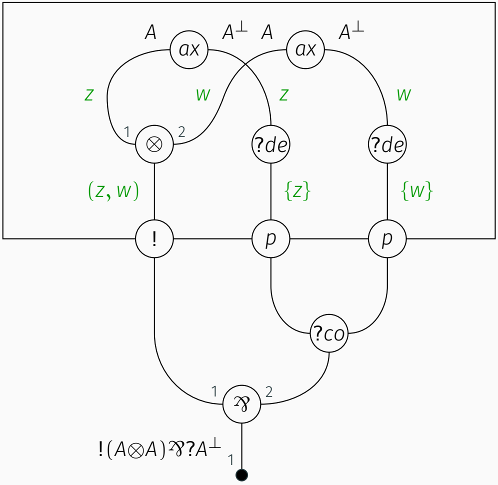


ax
x
x
cut
x
x
⅋
1
2
x
y
(x, y)
⊗
1
2
x
y
(x, y)
!
$x_1, \ldots, x_n$
$\{x_1, \ldots, x_n\}$
?de
x
{x}
?w
∅
?co
. . .
x_1
x_k
$x_1 \cup \cdots \cup x_k$
p
$x_1, \ldots, x_n$
$x_1 \cup \cdots \cup x_n$

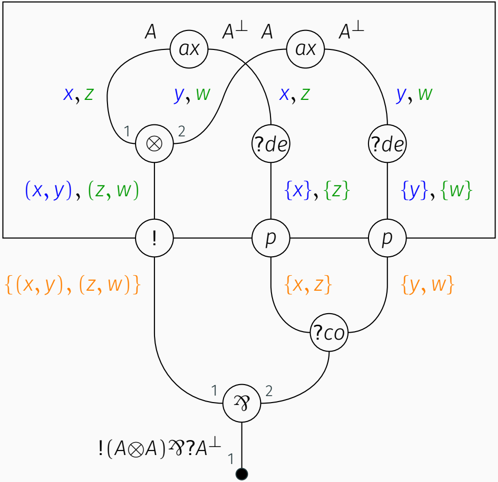
Costruzione di un'esperienza.



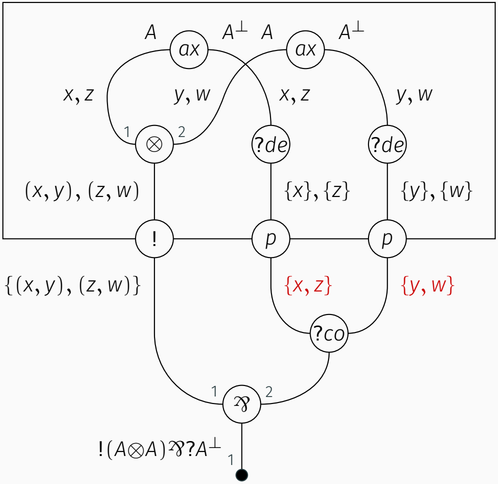
Costruzione di un'esperienza.



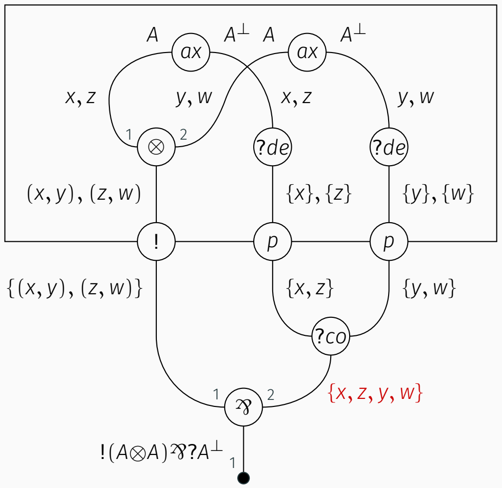
Costruzione di un'esperienza.



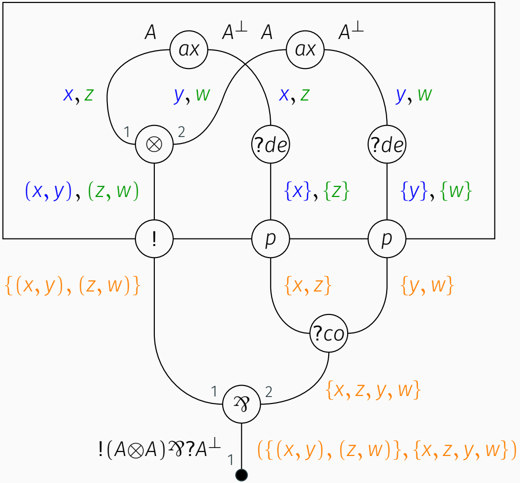
Costruzione di un'esperienza.



Costruzione di un'esperienza.



Costruzione di un'esperienza.



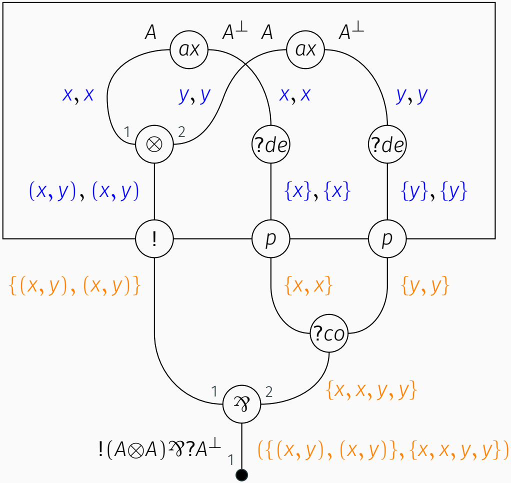
Esperienza n-ossessiva

- Due etichette di un arco con tipo atomico sono uguali.
- Il multinsieme delle etichette associato alla conclusione di un qualunque legame "certamente" è non vuoto e ciascuno dei suoi elementi ha cardinalità n.

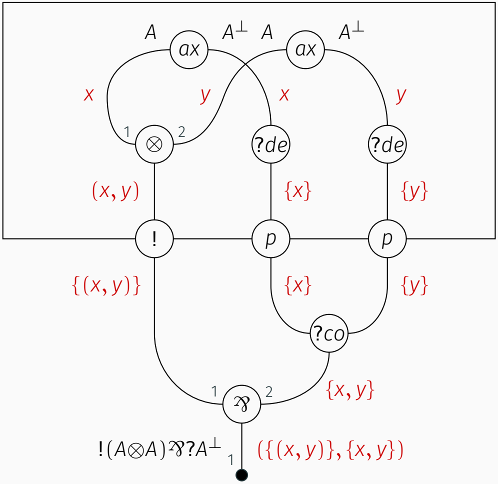
1-esperienza

- Due etichette di un arco con tipo atomico sono uguali.
- Il multinsieme delle etichette associato alla conclusione di un qualunque legame “certamente” è non vuoto e ciascuno dei suoi elementi ha cardinalità 1.

Esempio: esperienza 2-ossessiva.



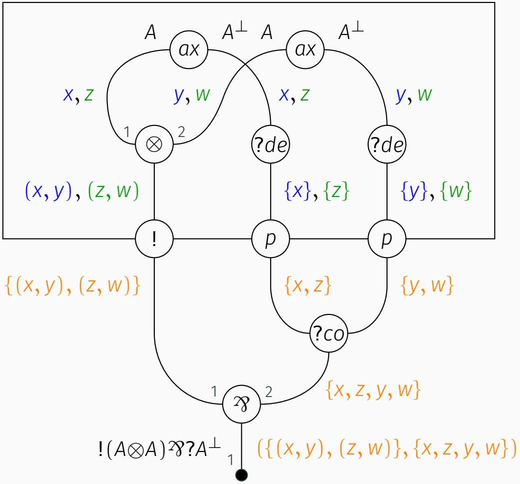
Esempio: 1-esperienza.



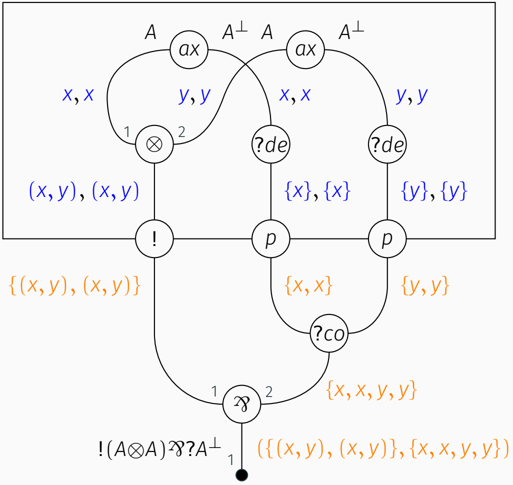
Esperienza iniettiva

Multinsiemi di etichette associati ad archi distinti con lo stesso tipo atomico sono distinti.

Esempio: esperienza iniettiva quando $\{x, z\} \neq \{y, w\}$.



Esempio: esperienza iniettiva quando $x \neq y$.



Sia $[\![R]\!]$ l'insieme dei risultati di tutte le esperienze di R, una rete di prova AC. Sia F un insieme di reti di prova AC e assumiamo che $R \in F$.

Sia $[\![R]\!]$ l'insieme dei risultati di tutte le esperienze di R, una rete di prova AC. Sia F un insieme di reti di prova AC e assumiamo che $R \in F$.

Iniettività locale per F in R

Per ogni $R' \in F$ con le stesse conclusioni di R e $[\![R]\!] = [\![R']\!]$, abbiamo $R = R'$.

Sia $[\![R]\!]$ l'insieme dei risultati di tutte le esperienze di R, una rete di prova AC. Sia F un insieme di reti di prova AC e assumiamo che $R \in F$.

Iniettività locale per F in R

Per ogni $R' \in F$ con le stesse conclusioni di R e $[\![R]\!] = [\![R']\!]$, abbiamo $R = R'$.

Iniettività per F

Per ogni $R \in F$, iniettività locale per F in R.

Sia F l'insieme delle reti di prova ACC. Se $R \in F$ e se esiste una 1-esperienza iniettiva di R, abbiamo iniettività locale per F in R.

Possiamo trovare, per qualsiasi $R \in F$, un'esperienza di R il cui risultato è in $[\![R]\!]$ ma non in $[\![R']\!]$ per ogni altra $R' \in F$?

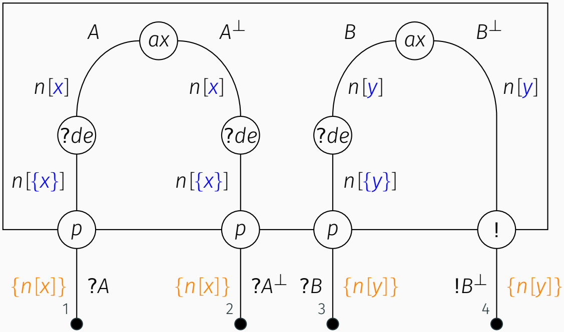
Possiamo trovare, per qualsiasi $R \in F$, un'esperienza di R il cui risultato è in $[\![R]\!]$ ma non in $[\![R']\!]$ per ogni altra $R' \in F$?

F	Risposta

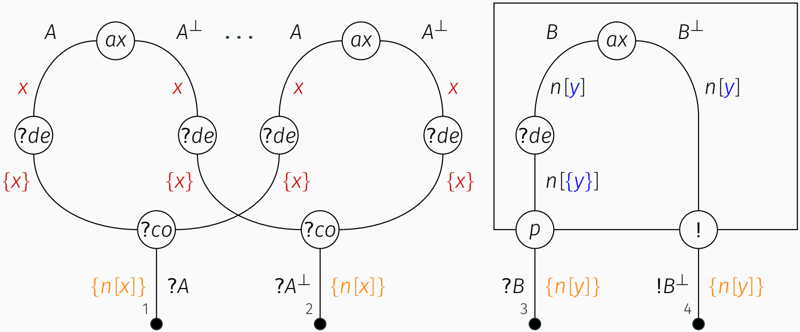
Possiamo trovare, per qualsiasi $R \in F$, un'esperienza di R il cui risultato è in $[\![R]\!]$ ma non in $[\![R']\!]$ per ogni altra $R' \in F$?

F	Risposta
$MELL$	NO

Controesempio: una *R* particolare e una qualsiasi esperienza di *R*.



Una R' particolare e un'esperienza di R' con lo stesso risultato.



Possiamo trovare, per qualsiasi $R \in F$, un'esperienza di R il cui risultato è in $[\![R]\!]$ ma non in $[\![R']\!]$ per ogni altra $R' \in F$?

F	Risposta
$MELL$	NO

Possiamo trovare, per qualsiasi $R \in F$, un'esperienza di R il cui risultato è in $[\![R]\!]$ ma non in $[\![R']\!]$ per ogni altra $R' \in F$?

F	Risposta
$MELL$	NO
MLL	SÌ

Possiamo trovare, per qualsiasi $R \in F$, un'esperienza di R il cui risultato è in $[\![R]\!]$ ma non in $[\![R']\!]$ per ogni altra $R' \in F$?

F	Risposta
MELL	NO
λ-termini	SÌ
MLL	SÌ

Possiamo trovare, per qualsiasi $R \in F$, un'esperienza di R il cui risultato è in $[\![R]\!]$ ma non in $[\![R']\!]$ per ogni altra $R' \in F$?

F	Risposta
MELL	NO
Reti di prova *ACC*	
λ-termini	SÌ
MLL	SÌ

Possiamo trovare, per qualsiasi $R \in F$, un'esperienza di R il cui risultato è in $[\![R]\!]$ ma non in $[\![R']\!]$ per ogni altra $R' \in F$?

F	Risposta
MELL	NO
Reti di prova *ACC*	**?**
λ-termini	SÌ
MLL	SÌ

Espansione di Taylor di λ-termini

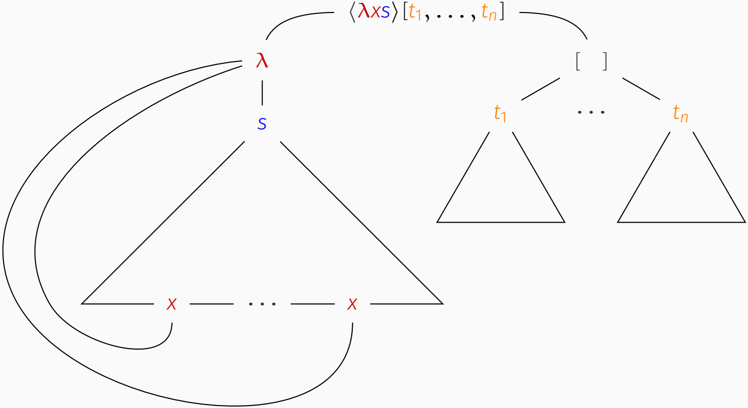
Termini con risorse

Un insieme Δ definito induttivamente:

- Se x è una variabile, allora $x \in \Delta$.
- Se x è una variabile e $s \in \Delta$, allora $\lambda x s \in \Delta$.
- Se $n \geqslant 0$ e $s, t_1, \ldots, t_n \in \Delta$, allora $\langle s \rangle [t_1, \ldots, t_n] \in \Delta$.

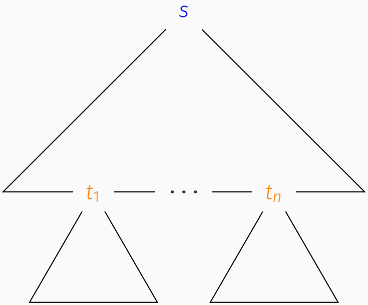
La stringa $[t_1, \ldots, t_n]$ è chiamata monomio con risorse.

Computazione intuitivamente



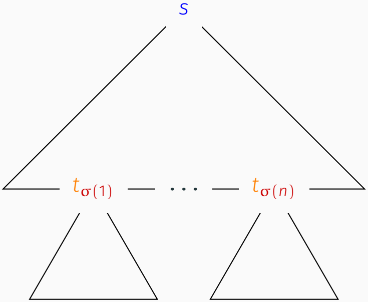
Computazione intuitivamente

$s(t_1, \ldots, t_n/x)$



Computazione intuitivamente

$s(t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(n)}/x)$



Sostituzione multilineare

Definiamo $\partial_x s \cdot [t_1, \ldots, t_n]$ come l'insieme:

$$\{s(t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(n)}/x) : \sigma \text{ permutazione su } 1, \ldots, n\}$$

Riduzione con risorse

Il caso base è $\langle \lambda x s \rangle [t_1, \dots, t_n] \to_\partial \partial_x s \cdot [t_1, \dots, t_n]$ e questo si estende ai contesti come nel lambda calcolo usuale. Inoltre, quando abbiamo $s_0, \dots, s_n \in \Delta$ e $S_0, \dots, S_n \subseteq \Delta$ tali che $s_0 \to_\partial S_0$ e $s_i \to_\partial^? S_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$, abbiamo anche $\{s_0, \dots, s_n\} \to_\partial S_0 \cup \dots \cup S_n$.

Proprietà

- La riduzione con risorse normalizza debolmente.
- La relazione $\rightarrow_{\partial}{}^{*}$ soddisfa la proprietà del diamante.

Proprietà

- La riduzione con risorse normalizza debolmente.
- La relazione $\to_\partial{}^*$ soddisfa la proprietà del diamante.

$\implies$ Ogni $S \subseteq \Delta$ ha un'unica forma normale **NF**(S).

Supporto di Taylor

Sia $S^!$ l'insieme dei monomi con risorse della forma $[s_1, \ldots, s_n]$ per qualche $n \geqslant 0$, $s_1, \ldots, s_n \in S$. Definiamo induttivamente sui lambda termini il seguente insieme di termini con risorse:

$$\mathbf{T}(x) := \{x\}$$
$$\mathbf{T}(\lambda x M) := \lambda x \mathbf{T}(M)$$
$$\mathbf{T}(MN) := \langle \mathbf{T}(M) \rangle \mathbf{T}(N)^!$$

Riduzione di testa

Se **H** è la funzione di riduzione di testa sui lambda termini o sui termini con risorse allora, per tutti i lambda termini M:

$$\mathbf{H}(\mathbf{T}(M)) = \mathbf{T}(\mathbf{H}(M))$$

Corollario

- Se $\mathbf{NF}(s)$ è non vuoto per qualche $s \in \mathbf{T}(M)$, allora esiste $k \geqslant 0$ tale che $\mathbf{H}^k(M)$ sia una forma normale di testa.
- Se M è β-equivalente a una forma normale di testa, allora $\mathbf{NF}(s)$ è non vuoto per qualche $s \in \mathbf{T}(M)$.

Corollario

- Se $\mathbf{NF}(s)$ è non vuoto per qualche $s \in \mathbf{T}(M)$, allora esiste $k \geqslant 0$ tale che $\mathbf{H}^k(M)$ sia una forma normale di testa.
- Se M è β-equivalente a una forma normale di testa, allora $\mathbf{NF}(s)$ è non vuoto per qualche $s \in \mathbf{T}(M)$.

  $\Longrightarrow$ Se M è β-equivalente a una forma normale di testa, esiste $k \geqslant 0$ tale che $\mathbf{H}^k(M)$ sia una forma normale di testa.

- Olivier Laurent e Lorenzo Tortora de Falco. «Slicing polarized additive normalization». In: *Linear Logic in Computer Science*. A cura di Thomas Ehrhard et al. Vol. 316. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, nov. 2004, pp. 247–282.
- Michele Pagani. «Proofs, denotational semantics and observational equivalences in multiplicative linear logic». In: *Mathematical Structures in Computer Science* 17.2 (2007), pp. 341–359.
- Lorenzo Tortora de Falco. «Obsessional experiments for linear logic proof-nets». In: *Mathematical Structures in Computer Science* 13.6 (2003), pp. 799–855.
- Lionel Vaux Auclair. «Normalizing the Taylor expansion of non-deterministic λ-terms, via parallel reduction of resource vectors». In: *Logical Methods in Computer Science* 15 (2019).