

TEOREMI DI RAMSEY

Raffaele Di Donna

9 aprile 2021

Università degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Matematica e Fisica

PIANO DELLA PRESENTAZIONE

Introduzione

Teoria dei grafi e teoremi di Ramsey

Teorema di Ramsey numerabile

Nozioni di logica del primo ordine

Teorema di Ramsey finito

INTRODUZIONE

Sia A una struttura (per esempio, un grafo o un gruppo) per cui esista una nozione adeguata di sottostruttura (un sottografo o un sottogruppo). Sia P una proprietà di strutture dello stesso tipo di A .

Compattezza. Se ogni sottostruttura *finita* di A gode della proprietà P , allora A gode della proprietà P .

Un metodo generale per dimostrare diversi risultati.

Teorema di Hall infinito. Sia $G = G[X, Y]$ un grafo bipartito infinito tale che ogni vertice di X abbia grado **finito**. Allora G ha un *matching* che copre ogni vertice di X se e solo se $|N(S)| \geq |S|$ per ogni sottoinsieme finito S di X .

Teorema di De Bruijn–Erdős. Un grafo infinito G è k -colorabile se e solo se ogni sottografo **finito** di G è k -colorabile.

- In particolare, se il **teorema dei quattro colori** vale per grafi planari finiti, allora vale per grafi planari infiniti.

Teoremi di Ramsey.

- **Numerabile.** Ogni coloramento in due colori dei lati di un grafo completo **numerabile** induce una cricca **numerabile** monocromatica.
- **Finito.** Ogni coloramento in due colori dei lati di un grafo completo **finito** abbastanza grande induce una cricca **finita** monocromatica di cardinalità fissata.

TEORIA DEI GRAFI E TEOREMI DI RAMSEY



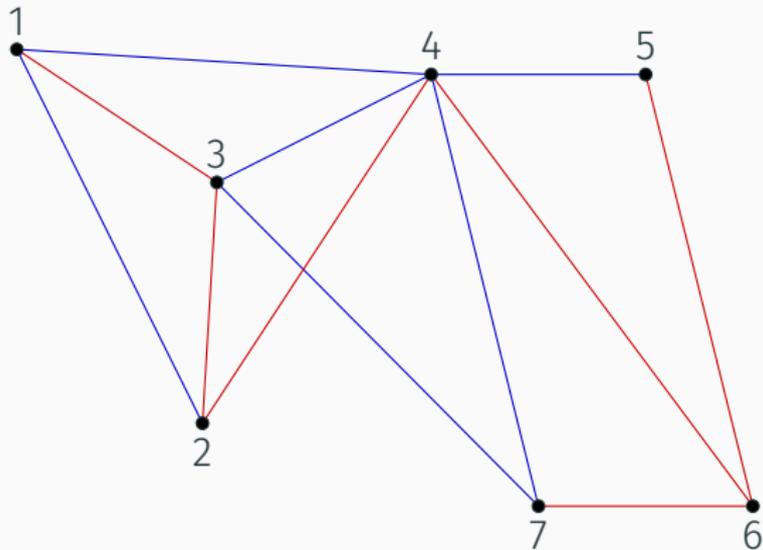
Definizione.

Un **coloramento** di un grafo G in k colori è una partizione di $E(G)$ in k classi, che prendono il nome di **colori**.

Un sottoinsieme $X \subseteq V(G)$ è detto **monocromatico** se i lati del sottografo indotto $G[X]$ hanno tutti lo stesso colore.

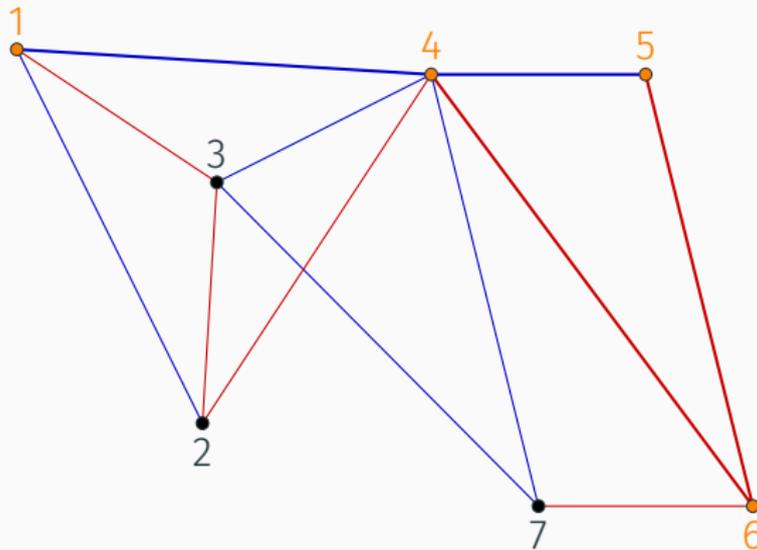
Esempio.

Coloramento di un grafo.



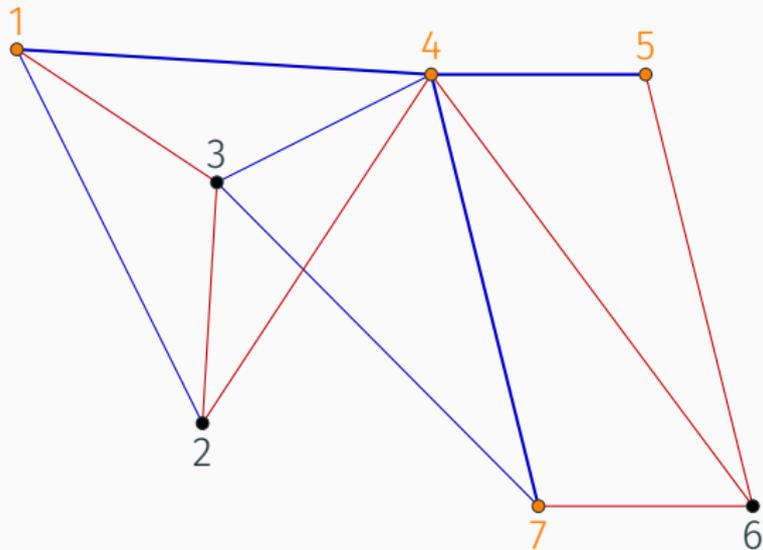
Esempio.

$\{1, 4, 5, 6\}$ è un insieme di vertici non monocromatico.



Esempio.

$\{1, 4, 5, 7\}$ è un insieme di vertici monocromatico.



Nel seguito assumeremo sempre che G sia un grafo semplice. In questo modo, le nozioni che introdurremo saranno l'una la duale dell'altra rispetto al grafo complementare.

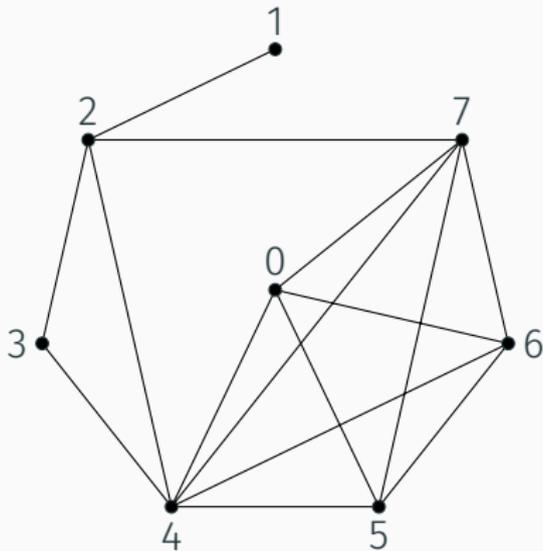
Definizione.

Una **cricca** di un grafo G è un sottoinsieme $K \subseteq V(G)$ tale che il sottografo indotto $G[K]$ sia completo, cioè con vertici a due a due adiacenti.

Un **insieme indipendente** di un grafo G è un sottoinsieme $I \subseteq V(G)$ tale che i vertici del sottografo indotto $G[I]$ siano a due a due non adiacenti.

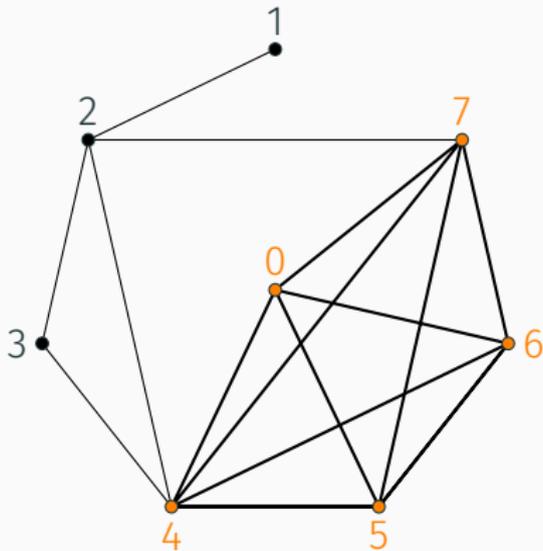
Esempio.

Consideriamo il seguente grafo.



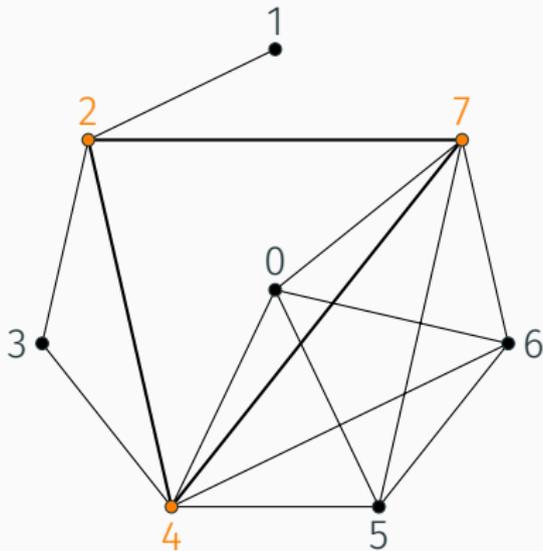
Esempio.

$\{0, 4, 5, 6, 7\}$ è una cricca.



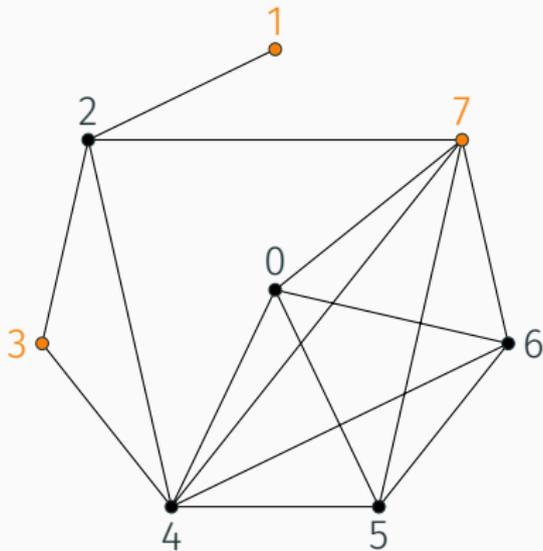
Esempio.

$\{2, 4, 7\}$ è una cricca.



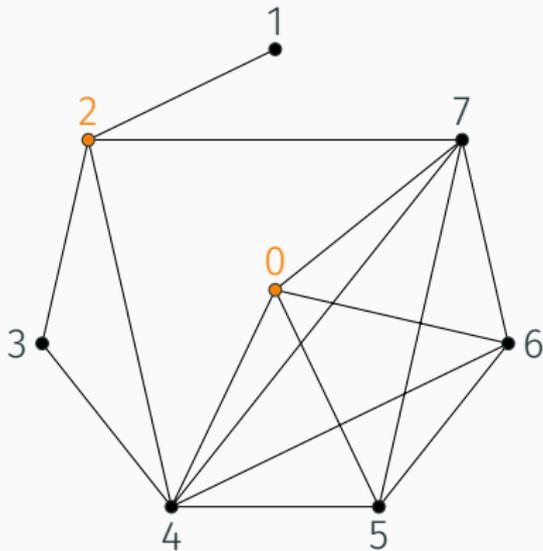
Esempio.

$\{1, 3, 7\}$ è un insieme indipendente.



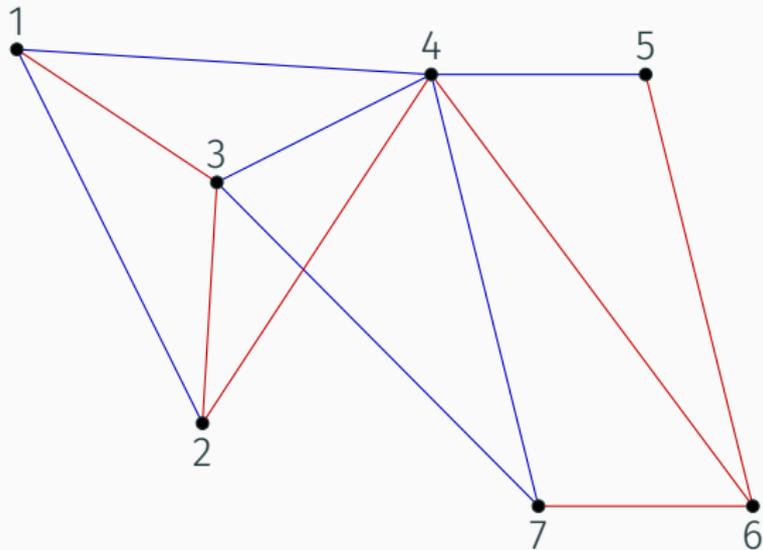
Esempio.

$\{0, 2\}$ è un insieme indipendente.



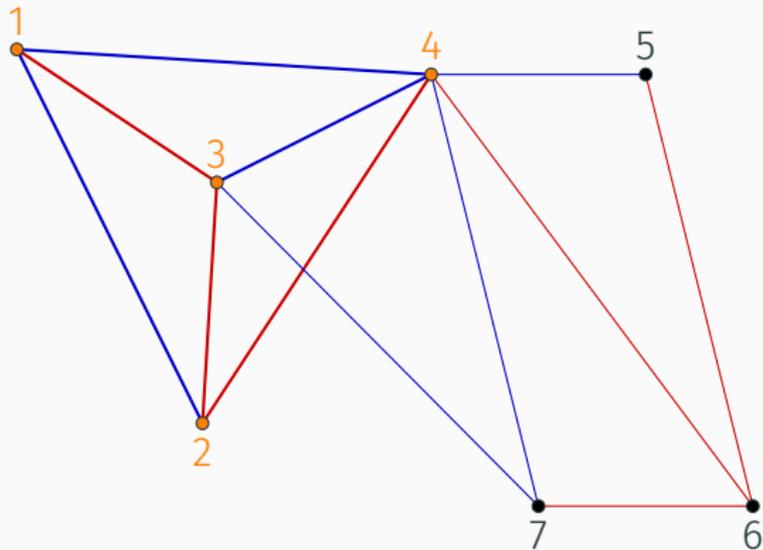
Esempio.

Coloramento di un grafo.



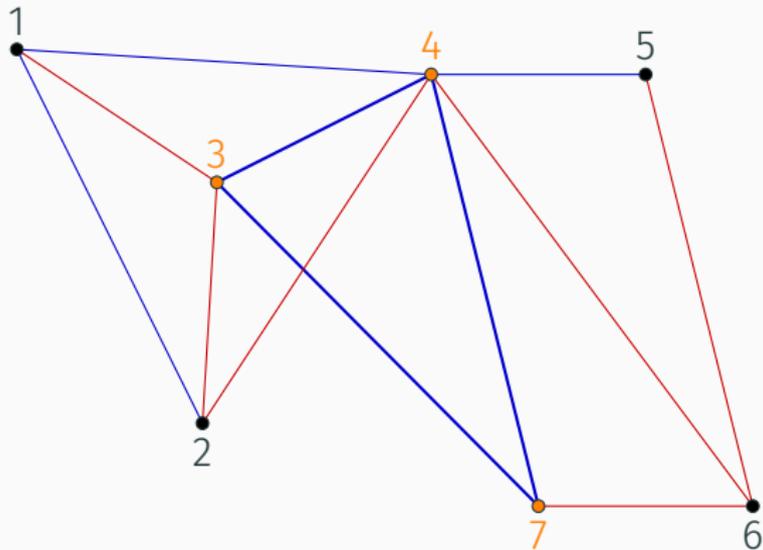
Esempio.

$\{1, 2, 3, 4\}$ è una cricca non monocromatica.



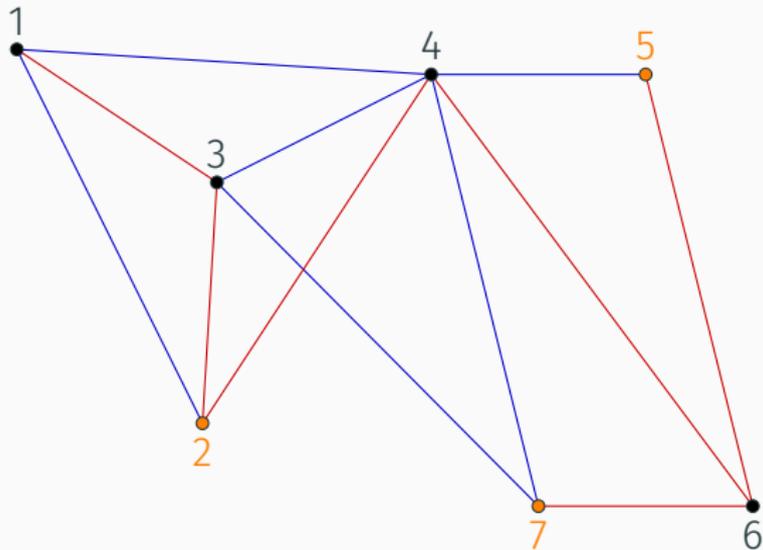
Esempio.

$\{3, 4, 7\}$ è una cricca monocromatica.



Esempio.

$\{2, 5, 7\}$ è un insieme indipendente.



Formulazione 1 del teorema di Ramsey numerabile.

Ogni coloramento in due colori dei lati di un grafo completo numerabile induce una **cricca** numerabile **monocromatica**.

Formulazione 2 del teorema di Ramsey numerabile.

Ogni grafo numerabile ammette una **cricca** numerabile oppure un **insieme indipendente** numerabile.

Formulazione 1 del teorema di Ramsey finito.

Ogni coloramento in due colori dei lati di un grafo completo finito abbastanza grande induce una **cricca** finita **monocromatica** di cardinalità fissata.

Formulazione 2 del teorema di Ramsey finito.

Ogni grafo finito abbastanza grande ammette una **cricca** finita oppure un **insieme indipendente** finito, entrambi di cardinalità fissata.

Formulazione 1 del teorema di Ramsey finito.

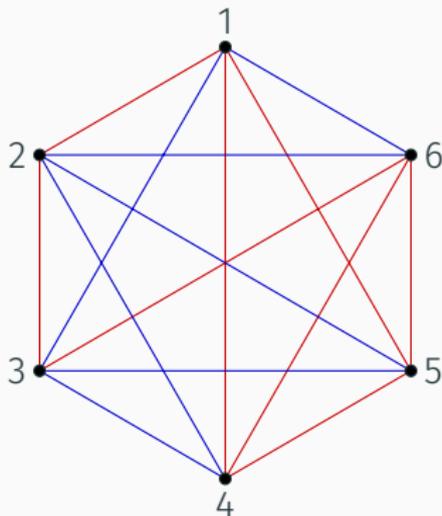
Per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che ogni coloramento in due colori dei lati di K_n induca una **cricca monocromatica** con m vertici.

Formulazione 2 del teorema di Ramsey finito.

Per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che ogni grafo con n vertici ammetta una **cricca** con m vertici oppure un **insieme indipendente** con m vertici.

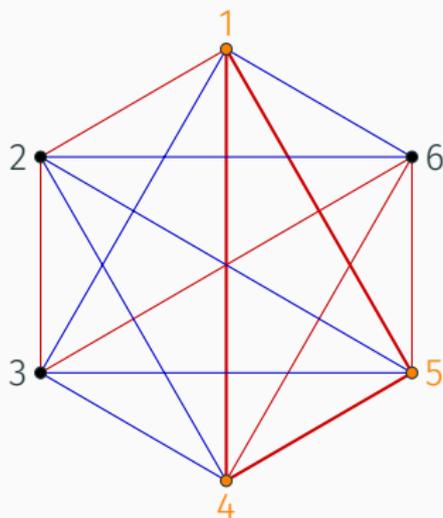
Formulazione 1 del teorema di Ramsey finito. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che ogni coloramento in due colori dei lati di K_n induca una cricca monocromatica con m vertici.

Esempio ($m = 3, n = 6$).



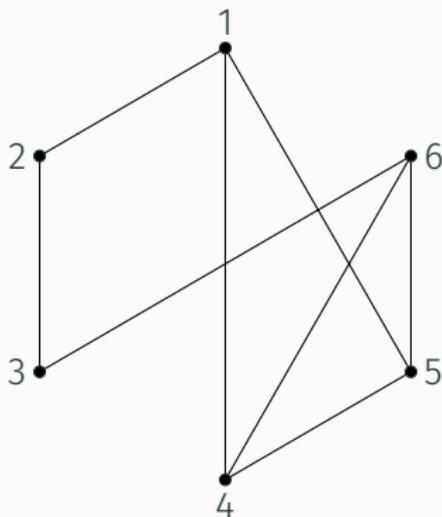
Formulazione 1 del teorema di Ramsey finito. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che ogni coloramento in due colori dei lati di K_n induca una cricca monocromatica con m vertici.

Esempio ($m = 3, n = 6$).



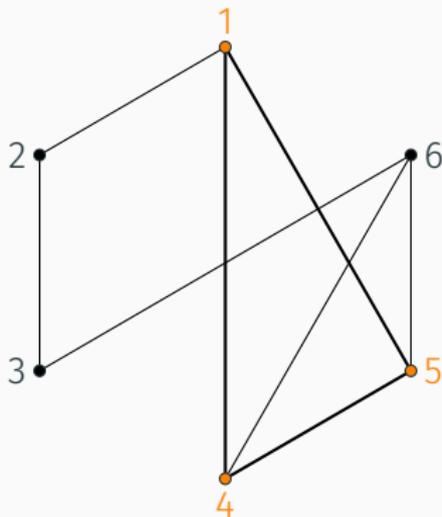
Formulazione 2 del teorema di Ramsey finito. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che ogni grafo con n vertici ammetta una cricca con m vertici oppure un insieme indipendente con m vertici.

Esempio ($m = 3, n = 6$).



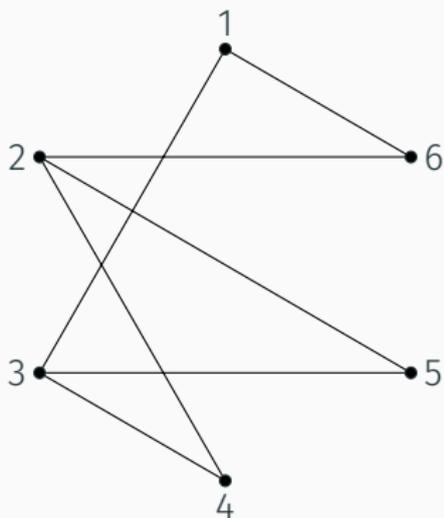
Formulazione 2 del teorema di Ramsey finito. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che ogni grafo con n vertici ammetta una cricca con m vertici oppure un insieme indipendente con m vertici.

Esempio ($m = 3, n = 6$).



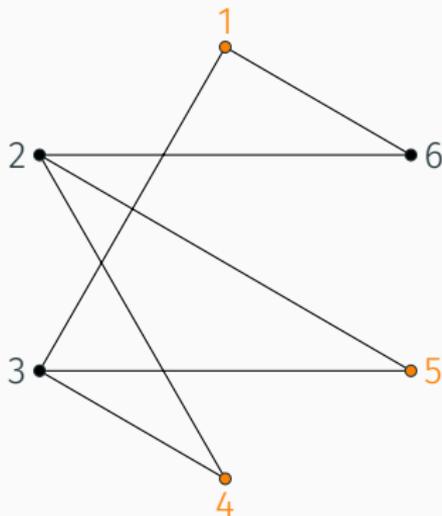
Formulazione 2 del teorema di Ramsey finito. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che ogni grafo con n vertici ammetta una cricca con m vertici oppure un insieme indipendente con m vertici.

Esempio ($m = 3, n = 6$).



Formulazione 2 del teorema di Ramsey finito. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che ogni grafo con n vertici ammetta una cricca con m vertici oppure un insieme indipendente con m vertici.

Esempio ($m = 3, n = 6$).



Dato un insieme S , denotiamo $[S]^2$ la famiglia dei sottoinsiemi di S formati da due elementi. Denotiamo poi 2 l'insieme $\{0, 1\}$.

Definizione.

Un **coloramento** di $[S]^2$ in due colori è una mappa $f: [S]^2 \rightarrow 2$.

Formulazione 3 del teorema di Ramsey numerabile.

Per ogni coloramento $f: [\mathbb{N}]^2 \rightarrow 2$ esiste un sottoinsieme infinito $H \subseteq \mathbb{N}$ tale che f ristretta a $[H]^2$ sia costante.

Formulazione 3 del teorema di Ramsey finito.

Per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni coloramento $f: [\{1, \dots, n\}]^2 \rightarrow 2$, esista un sottoinsieme $H \subseteq \{1, \dots, n\}$ di cardinalità m tale che f ristretta a $[H]^2$ sia costante.

TEOREMA DI RAMSEY NUMERABILE



Teorema di Ramsey numerabile.

Per ogni coloramento $f: [\mathbb{N}]^2 \rightarrow 2$ esiste un sottoinsieme infinito $H \subseteq \mathbb{N}$ tale che f ristretta a $[H]^2$ sia costante.

Dimostrazione.

Poniamo $x_0 := 0$. Partizioniamo $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ definendo:

$$X = \{x \in \mathbb{N} : x > x_0 \text{ e } f(\{x_0, x\}) = 0\}$$

$$Y = \{x \in \mathbb{N} : x > x_0 \text{ e } f(\{x_0, x\}) = 1\}$$

Poiché $X \cup Y$ è infinito, almeno uno tra X e Y è infinito.

Scegliamo un tale insieme e chiamiamolo A_1 . Osserviamo che è ben definito $c_0 := f(\{x_0, x\})$ per qualunque $x \in A_1$.

Teorema di Ramsey numerabile. Per ogni coloramento $f: [\mathbb{N}]^2 \rightarrow 2$ esiste $H \subseteq \mathbb{N}$ infinito tale che f ristretta a $[H]^2$ sia costante.

Dimostrazione.

Sia x_1 il minimo di A_1 . Partizioniamo $A_1 \setminus \{x_1\}$ definendo:

$$X = \{x \in A_1 : x > x_1 \text{ e } f(\{x_1, x\}) = 0\}$$

$$Y = \{x \in A_1 : x > x_1 \text{ e } f(\{x_1, x\}) = 1\}$$

Di nuovo, almeno uno tra X e Y deve essere infinito. Scegliamo un tale insieme, chiamiamolo A_2 e indichiamo con x_2 il suo minimo. Definiamo inoltre $c_1 := f(\{x_1, x\})$ per qualche $x \in A_2$.

Teorema di Ramsey numerabile. Per ogni coloramento $f: [\mathbb{N}]^2 \rightarrow 2$ esiste $H \subseteq \mathbb{N}$ infinito tale che f ristretta a $[H]^2$ sia costante.

Dimostrazione.

Sia x_i il minimo di A_i . Partizioniamo $A_i \setminus \{x_i\}$ definendo:

$$X = \{x \in A_i: x > x_i \text{ e } f(\{x_i, x\}) = 0\}$$

$$Y = \{x \in A_i: x > x_i \text{ e } f(\{x_i, x\}) = 1\}$$

Di nuovo, almeno uno tra X e Y deve essere infinito. Scegliamo un tale insieme, chiamiamolo A_{i+1} e indichiamo con x_{i+1} il suo minimo. Definiamo inoltre $c_i := f(\{x_i, x\})$ per qualche $x \in A_{i+1}$.

Teorema di Ramsey numerabile. Per ogni coloramento $f: [\mathbb{N}]^2 \rightarrow 2$ esiste $H \subseteq \mathbb{N}$ infinito tale che f ristretta a $[H]^2$ sia costante.

Dimostrazione.

Otteniamo una successione discendente infinita:

$$\mathbb{N} \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$$

A questa corrisponde una successione ascendente infinita:

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots$$

Inoltre, esiste $c \in \{0, 1\}$ tale che $c_i = c$ per infiniti $i \in \mathbb{N}$.

Teorema di Ramsey numerabile. Per ogni coloramento $f: [\mathbb{N}]^2 \rightarrow 2$ esiste $H \subseteq \mathbb{N}$ infinito tale che f ristretta a $[H]^2$ sia costante.

Dimostrazione.

Definiamo:

$$H := \{x_i : c_i = c\}$$

Per ogni $x_h, x_i, x_j, x_k \in H$ con $h < i < j < k$ si ha:

$$f(\{x_h, x_k\}) = c_h = c = c_i = f(\{x_i, x_j\})$$

□

NOZIONI DI LOGICA DEL PRIMO ORDINE



Un **grafo** si può presentare come una coppia ordinata $G = (V, E)$ dove V è un insieme non vuoto, $E \subseteq V \times V$ è una relazione binaria su V .

Un **gruppo** si può presentare come una tripla ordinata $G = (X, \oplus, e)$, specificando un insieme non vuoto X , un'operazione binaria $\oplus: X \times X \rightarrow X$ e l'identità $e \in X$.

Definizione.

Una **struttura** \mathfrak{A} consiste delle seguenti componenti:

- Un insieme non vuoto A , detto dominio.
- Relazioni su A di arietà qualsiasi.
- Funzioni su A di arietà qualsiasi.
- Costanti, cioè elementi di A .

Esempio.

$\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \times, 0, 1)$ denota la struttura dei numeri naturali con l'ordinamento e le operazioni usuali, con le costanti 0 e 1.

Vogliamo esprimere formalmente proprietà come:

- Avere almeno n elementi.
- Avere esattamente n elementi.
- Essere un grafo semplice.
- Essere un grafo indiretto.
- Essere un grafo completo.

Definizione.

Un **linguaggio del primo ordine** è una collezione \mathcal{L} di simboli dei seguenti tipi.

- Un insieme numerabile di variabili x, y, z, v_1, v_2, \dots
- Un insieme finito o numerabile di simboli di relazione R, S, T_1, U_3, \dots ciascuno con la propria arietà.
- Un insieme finito o numerabile di simboli di funzione f, g, h, p_4, s_5, \dots ciascuno con la propria arietà.
- Un insieme finito o numerabile di simboli di costante a, b, c_7, d_{22}, \dots

Esempio.

Un linguaggio adatto all'aritmetica è $\mathcal{L}_a = \{<, +, \times, 0, 1\}$, dove:

- $<$ è un simbolo di relazione binaria.
- $+$ e \times sono simboli di funzione di due argomenti.
- 0 e 1 sono simboli di costante.

Un linguaggio adatto alla teoria dei grafi è $\mathcal{L}_g = \{E\}$, dove E è un simbolo di relazione binaria che rappresenta la relazione di adiacenza tra vertici.

Nel seguito lavoreremo con linguaggi **puramente relazionali**, cioè senza simboli di funzione o di costante.

Definizione.

Le **formule** di un linguaggio puramente relazionale \mathcal{L} sono definite induttivamente.

- *Base.* Se x e y sono variabili, allora $(x = y)$ è una formula. Se R è un simbolo di relazione di arietà k e x_1, \dots, x_k sono variabili, allora $R(x_1, \dots, x_k)$ è una formula.
- *Passo.* Se x è una variabile, F e G sono formule, allora $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(\neg F)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$, $\forall xF$, $\exists xF$ sono formule.

Esempio.

In \mathcal{L}_g sono formule: $\exists xE(x, x)$, $\forall x((\neg E(x, y)) \rightarrow (y = v_7))$.

Definizione

Una formula F è detta un **enunciato** se ogni occorrenza di variabile x in F è vincolata, cioè appare in una stringa del tipo $\forall xG$ oppure $\exists xG$ contenuta in F .

Esempio

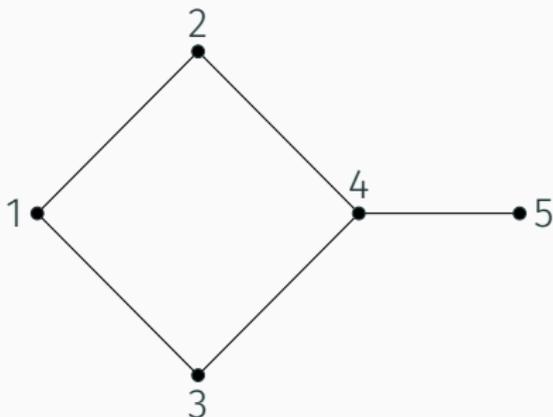
La formula $\forall x\exists yE(x,y)$ in \mathcal{L}_g è un enunciato.

Diciamo che una struttura \mathfrak{A} **soddisfa** una formula F con variabili x_1, \dots, x_n di un linguaggio puramente relazionale \mathcal{L} a parametri $a_1, \dots, a_n \in A$ se, “interpretando” R con una relazione $R^{\mathfrak{A}}$ su A per ogni simbolo di relazione R in \mathcal{L} e x_i con a_i per ogni $i = 1, \dots, n$, la formula F risulta “vera” in \mathfrak{A} .

In tal caso, scriveremo $\mathfrak{A} \models F[a_1, \dots, a_n]$.

Esempio.

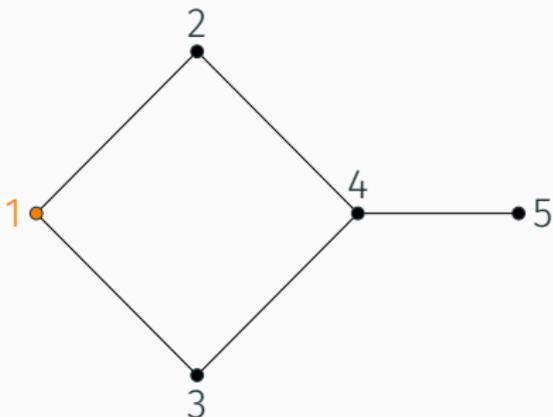
Sia \mathfrak{A} il grafo in figura. Allora $\mathfrak{A} \models F[i]$ per $i = 1, 2, 3, 4$ ma $\mathfrak{A} \not\models F[5]$ se $F(x)$ è la formula $\exists y \exists z (\neg(y = z) \wedge E(x, y) \wedge E(x, z))$.



$$\exists y \exists z (\neg(y = z) \wedge E(x, y) \wedge E(x, z))$$

Esempio.

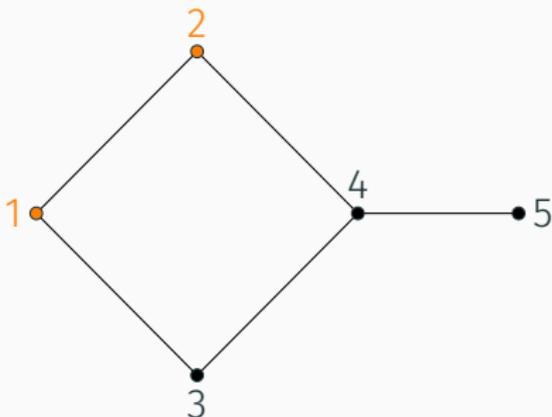
Sia \mathfrak{A} il grafo in figura. Allora $\mathfrak{A} \models F[i]$ per $i = 1, 2, 3, 4$ ma $\mathfrak{A} \not\models F[5]$ se $F(x)$ è la formula $\exists y \exists z (\neg(y = z) \wedge E(x, y) \wedge E(x, z))$.



$$\exists y \exists z (\neg(y = z) \wedge E(1, y) \wedge E(1, z))$$

Esempio.

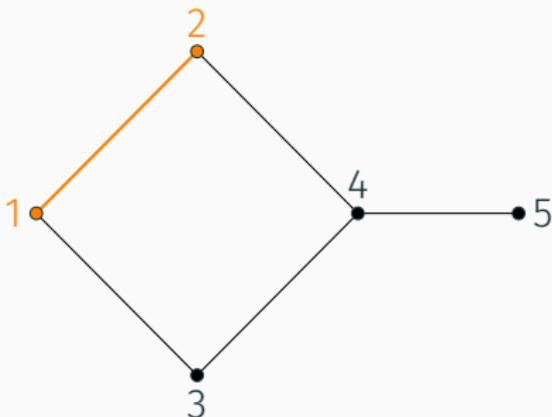
Sia \mathfrak{A} il grafo in figura. Allora $\mathfrak{A} \models F[i]$ per $i = 1, 2, 3, 4$ ma $\mathfrak{A} \not\models F[5]$ se $F(x)$ è la formula $\exists y \exists z (\neg(y = z) \wedge E(x, y) \wedge E(x, z))$.



$$\exists y \exists z (\neg(y = z) \wedge E(1, y) \wedge E(1, z))$$

Esempio.

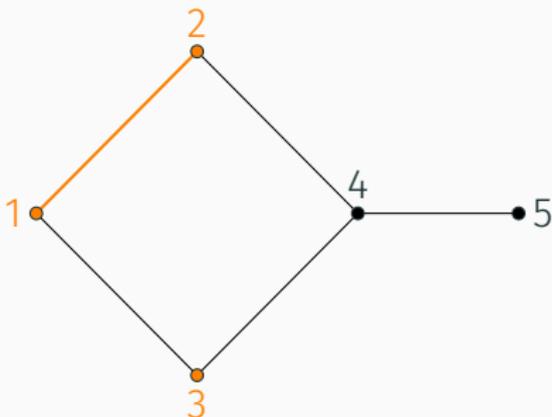
Sia \mathfrak{A} il grafo in figura. Allora $\mathfrak{A} \models F[i]$ per $i = 1, 2, 3, 4$ ma $\mathfrak{A} \not\models F[5]$ se $F(x)$ è la formula $\exists y \exists z (\neg(y = z) \wedge E(x, y) \wedge E(x, z))$.



$$\exists z (\neg(2 = z) \wedge E(1, 2) \wedge E(1, z))$$

Esempio.

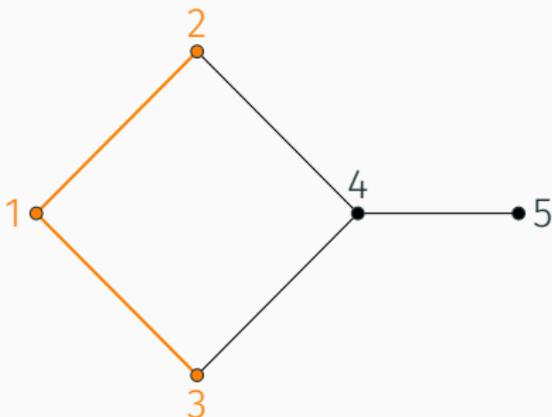
Sia \mathfrak{A} il grafo in figura. Allora $\mathfrak{A} \models F[i]$ per $i = 1, 2, 3, 4$ ma $\mathfrak{A} \not\models F[5]$ se $F(x)$ è la formula $\exists y \exists z (\neg(y = z) \wedge E(x, y) \wedge E(x, z))$.



$$\exists z (\neg(2 = z) \wedge E(1, 2) \wedge E(1, z))$$

Esempio.

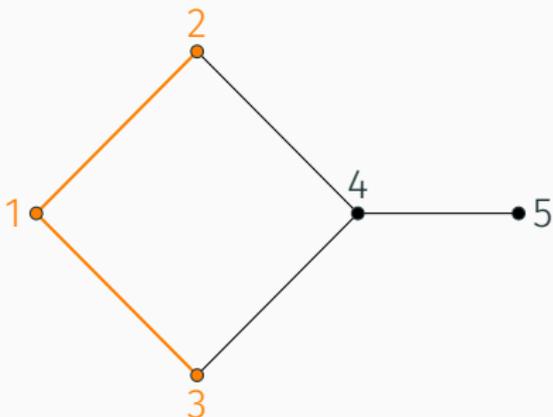
Sia \mathfrak{A} il grafo in figura. Allora $\mathfrak{A} \models F[i]$ per $i = 1, 2, 3, 4$ ma $\mathfrak{A} \not\models F[5]$ se $F(x)$ è la formula $\exists y \exists z (\neg(y = z) \wedge E(x, y) \wedge E(x, z))$.



$$\neg(2 = 3) \wedge E(1, 2) \wedge E(1, 3)$$

Esempio.

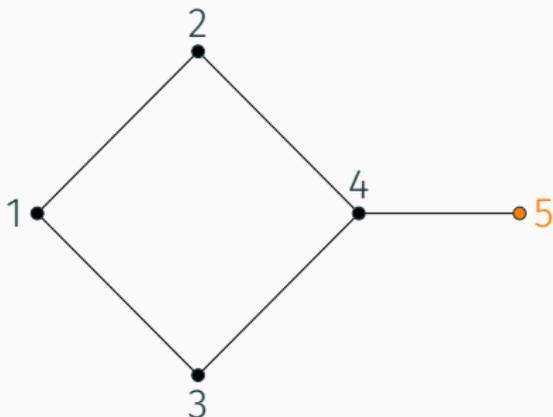
Sia \mathfrak{A} il grafo in figura. Allora $\mathfrak{A} \models F[i]$ per $i = 1, 2, 3, 4$ ma $\mathfrak{A} \not\models F[5]$ se $F(x)$ è la formula $\exists y \exists z (\neg(y = z) \wedge E(x, y) \wedge E(x, z))$.



$$\neg(2 = 3) \wedge E(1, 2) \wedge E(1, 3)$$

Esempio.

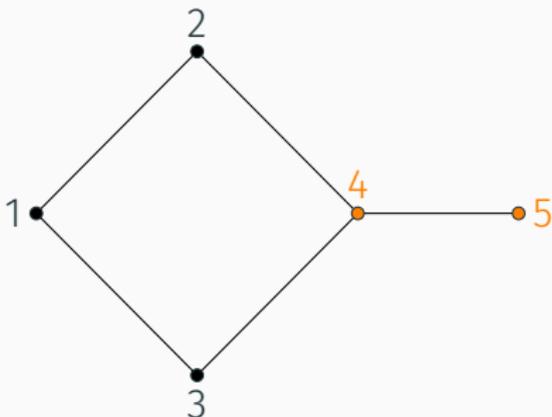
Sia \mathfrak{A} il grafo in figura. Allora $\mathfrak{A} \models F[i]$ per $i = 1, 2, 3, 4$ ma $\mathfrak{A} \not\models F[5]$ se $F(x)$ è la formula $\exists y \exists z (\neg(y = z) \wedge E(x, y) \wedge E(x, z))$.



$$\exists y \exists z (\neg(y = z) \wedge E(5, y) \wedge E(5, z))$$

Esempio.

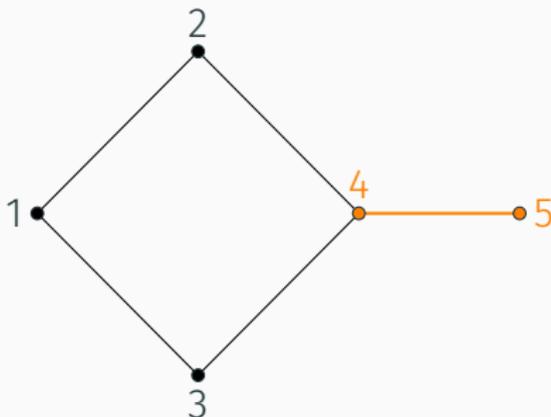
Sia \mathfrak{A} il grafo in figura. Allora $\mathfrak{A} \models F[i]$ per $i = 1, 2, 3, 4$ ma $\mathfrak{A} \not\models F[5]$ se $F(x)$ è la formula $\exists y \exists z (\neg(y = z) \wedge E(x, y) \wedge E(x, z))$.



$$\exists y \exists z (\neg(y = z) \wedge E(5, y) \wedge E(5, z))$$

Esempio.

Sia \mathfrak{A} il grafo in figura. Allora $\mathfrak{A} \models F[i]$ per $i = 1, 2, 3, 4$ ma $\mathfrak{A} \not\models F[5]$ se $F(x)$ è la formula $\exists y \exists z (\neg(y = z) \wedge E(x, y) \wedge E(x, z))$.

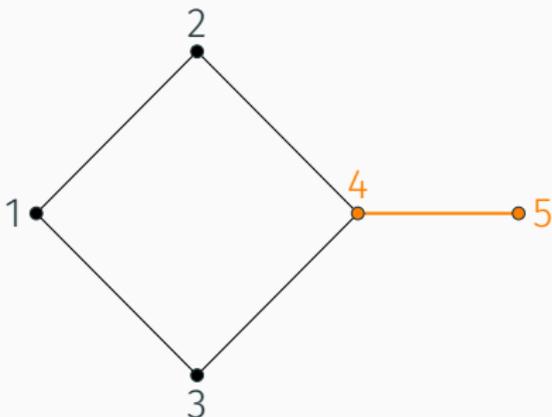


$$\exists z (\neg(4 = z) \wedge E(5, 4) \wedge E(5, z))$$

Esempio.

Sia \mathfrak{A} il grafo in figura. Allora $\mathfrak{A} \models F[i]$ per $i = 1, 2, 3, 4$ ma

$\mathfrak{A} \not\models F[5]$ se $F(x)$ è la formula $\exists y \exists z (\neg(y = z) \wedge E(x, y) \wedge E(x, z))$.



$$\exists z (\neg(4 = z) \wedge E(5, 4) \wedge E(5, z))$$

Definizione.

Sia \mathcal{L} un linguaggio del primo ordine. Una **teoria** in \mathcal{L} è un insieme di enunciati di \mathcal{L} .

Una teoria T in \mathcal{L} si dice **soddisfacibile** se esiste una struttura \mathfrak{A} tale che $\mathfrak{A} \models S$ per ogni formula S di T . In tal caso diremo che \mathfrak{A} è un **modello** di T e scriveremo $\mathfrak{A} \models T$.

Una teoria T in \mathcal{L} si dice **finitamente soddisfacibile** se ogni suo sottoinsieme finito è soddisfacibile.

TEOREMA DI COMPATTEZZA.

SIA \mathcal{L} UN LINGUAGGIO DEL PRIMO ORDINE E SIA T
UNA TEORIA IN \mathcal{L} .

ALLORA T È SODDISFACIBILE SE E SOLO SE È
FINITAMENTE SODDISFACIBILE.

ASSIOMATIZZARE PROPRIETÀ

Sia \mathcal{L} un linguaggio puramente relazionale e sia P una proprietà di strutture. Cerchiamo una teoria T in \mathcal{L} tale che, per ogni struttura \mathfrak{A} , valga che:

\mathfrak{A} ha la proprietà P se e solo se $\mathfrak{A} \models T$

Esempio

Se P è la proprietà di avere almeno n elementi, allora prendiamo T costituita dalla sola formula F_n seguente:

$$\exists x_1 \dots \exists x_n \left(\bigwedge_{i=1}^n \bigwedge_{j=i+1}^n \neg(x_i = x_j) \right)$$

ASSIOMATIZZARE PROPRIETÀ

Sia \mathcal{L} un linguaggio puramente relazionale e sia P una proprietà di strutture. Cerchiamo una teoria T in \mathcal{L} tale che, per ogni struttura \mathfrak{A} , valga che:

\mathfrak{A} ha la proprietà P se e solo se $\mathfrak{A} \models T$

Esempio

Se P è la proprietà di avere esattamente n elementi, allora prendiamo T costituita dalla sola formula F_n seguente:

$$\exists x_1 \dots \exists x_n \left(\bigwedge_{i=1}^n \bigwedge_{j=i+1}^n \neg(x_i = x_j) \wedge \forall y \bigvee_{i=1}^n (y = x_i) \right)$$

TEOREMA DI RAMSEY FINITO

Teorema di Ramsey finito.

Per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni coloramento $f: [\{1, \dots, n\}]^2 \rightarrow 2$, esista un sottoinsieme $H \subseteq \{1, \dots, n\}$ di cardinalità m tale che f ristretta a $[H]^2$ sia costante.

Dimostrazione.

Supponiamo per assurdo che esista $m \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'asserzione del teorema sia falsa. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste un coloramento $f_n: [\{1, \dots, n\}]^2 \rightarrow 2$ non costante su $[H]^2$ per nessun sottoinsieme $H \subseteq \{1, \dots, n\}$ di cardinalità m .

Usando la **compattezza**, mostreremo che le f_n possono essere “incollate” per ottenere un controesempio alla validità del teorema di Ramsey numerabile, cioè una contraddizione.

Ipotesi di assurdo. Esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esista $f_n: \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow 2$ non costante su $[H]^2$ per nessun $H \subseteq \{1, \dots, n\}$ di cardinalità m .

Dimostrazione.

Sia \mathcal{L} il linguaggio costituito da due simboli di relazione binaria R e B . Il significato intuitivo di $R(x, y)$ è che $\{x, y\}$ ha il colore 1 , che immaginiamo **rosso**, mentre il significato intuitivo di $B(x, y)$ è che $\{x, y\}$ ha il colore 0 , che immaginiamo **blu**. Definiremo una teoria T di \mathcal{L} in modo che, preso un modello \mathfrak{A} di T , sia ben definito il coloramento $f_{\mathfrak{A}}: [A]^2 \rightarrow 2$ dato da:

$$f_{\mathfrak{A}}(\{p, q\}) := \begin{cases} 1 & \text{se } (p, q) \in R^{\mathfrak{A}} \\ 0 & \text{se } (p, q) \in B^{\mathfrak{A}} \end{cases}$$

Ipotesi di assurdo. Esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esista $f_n: \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow 2$ non costante su $[H]^2$ per nessun $H \subseteq \{1, \dots, n\}$ di cardinalità m .

Dimostrazione.

Assiomatizziamo le seguenti proprietà:

- La mappa $f_{\mathfrak{A}}$ è ben definita.

$$\forall x \forall y ((x = y) \rightarrow (\neg R(x, y) \wedge \neg B(x, y)))$$

$$\forall x \forall y (\neg(x = y) \rightarrow (R(x, y) \leftrightarrow R(y, x)))$$

$$\forall x \forall y (\neg(x = y) \rightarrow (B(x, y) \leftrightarrow B(y, x)))$$

$$\forall x \forall y (\neg(x = y) \rightarrow (R(x, y) \vee B(x, y)))$$

$$\forall x \forall y (\neg(x = y) \rightarrow (R(x, y) \leftrightarrow \neg B(x, y)))$$

Ipotesi di assurdo. Esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esista $f_n: [\{1, \dots, n\}]^2 \rightarrow 2$ non costante su $[H]^2$ per nessun $H \subseteq \{1, \dots, n\}$ di cardinalità m .

Dimostrazione.

- Non vi sono sottoinsiemi monocromatici di cardinalità m .

$$\begin{aligned} \forall x_1 \dots \forall x_m \left(\bigwedge_{i=1}^m \bigwedge_{j=i+1}^m \neg(x_i = x_j) \right. \\ \left. \rightarrow \left(\bigvee_{i=1}^m \bigvee_{j=i+1}^m R(x_i, x_j) \wedge \bigvee_{i=1}^m \bigvee_{j=i+1}^m B(x_i, x_j) \right) \right) \end{aligned}$$

Ipotesi di assurdo. Esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esista $f_n: [\{1, \dots, n\}]^2 \rightarrow 2$ non costante su $[H]^2$ per nessun $H \subseteq \{1, \dots, n\}$ di cardinalità m .

Dimostrazione.

- Vi sono infiniti elementi, cioè almeno n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Al variare di $n \in \mathbb{N}$, $\exists x_1 \dots \exists x_n \left(\bigwedge_{i=1}^n \bigwedge_{j=i+1}^n \neg(x_i = x_j) \right)$

Asserzione: la teoria T formata dalle formule precedenti è finitamente soddisfacibile.

Ipotesi di assurdo. Esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esista $f_n: \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow 2$ non costante su $[H]^2$ per nessun $H \subseteq \{1, \dots, n\}$ di cardinalità m .

Dimostrazione.

Sia T_0 un sottoinsieme finito di T e sia n_0 il massimo intero n tale che F_n appaia in T_0 . Definiamo un modello \mathfrak{A}_0 di T_0 :

- Il dominio è $A_0 := \{1, \dots, n_0\}$.
- Per ogni $p, q \in A_0$ poniamo $(p, q) \in R^{\mathfrak{A}_0}$ se $f_{n_0}(\{p, q\}) = 1$.
Per ogni $p, q \in A_0$ poniamo $(p, q) \in B^{\mathfrak{A}_0}$ se $f_{n_0}(\{p, q\}) = 0$.

Dunque T_0 è soddisfacibile.

Questo dimostra che T è **finitamente soddisfacibile**.

Teorema di Ramsey numerabile. Per ogni coloramento $f: [\mathbb{N}]^2 \rightarrow 2$ esiste un sottoinsieme infinito $H \subseteq \mathbb{N}$ tale che f ristretta a $[H]^2$ sia costante.

Dimostrazione.

Ma allora T è **soddisfacibile**, per il **teorema di compattezza**. Esiste cioè un modello \mathfrak{A} di T . In particolare, abbiamo che \mathfrak{A} è infinito, ma a meno di restringere il dominio possiamo assumere che A sia numerabile e identificare $A = \mathbb{N}$.

Inoltre, è ben definito il coloramento $f_{\mathfrak{A}}: [\mathbb{N}]^2 \rightarrow 2$. Se esistesse un sottoinsieme infinito $H \subseteq \mathbb{N}$ tale che $f_{\mathfrak{A}}$ sia costante su $[H]^2$, allora $f_{\mathfrak{A}}$ sarebbe costante, per n_0 sufficientemente grande, su $[X]^2$ per qualche $X \subseteq \{1, \dots, n_0\}$ di cardinalità m . Ma questo contraddice il fatto che $\mathfrak{A} \models T$.

Teorema di Ramsey numerabile. Per ogni coloramento $f: [\mathbb{N}]^2 \rightarrow 2$ esiste un sottoinsieme infinito $H \subseteq \mathbb{N}$ tale che f ristretta a $[H]^2$ sia costante.

Dimostrazione.

Ma allora ogni sottoinsieme infinito $H \subseteq \mathbb{N}$ è tale che $f|_H$ ristretta a $[H]^2$ sia non costante.

In altre parole, il coloramento $f|_H$ è un controesempio al teorema di Ramsey numerabile, **assurdo**. □

-  Lorenzo Carlucci.
Mathematical logic for computer science, handouts, 2021.
-  Lorenzo Tortora de Falco and Vito Michele Abrusci.
Logica: Dimostrazioni e modelli al primo ordine.
Springer, 2014.
-  USR Murty and Adrian Bondy.
Graph theory (graduate texts in mathematics 244), 2008.