# LM430

## TEORIE LOGICHE 2

RAFFAELE DI DONNA

NOTE INTEGRATIVE AL CORSO

Le note faranno riferimento al libro *Logica: Volume 2 - Incompletezza, teoria assiomatica degli insiemi* del prof. Vito Michele Abrusci e del prof. Lorenzo Tortora de Falco.

**Pagina 217, riga 3.** Se $p = 2$, per esempio, dal fatto che $p$ divide $3^n - 2^n$ segue che $p$ divide $3^n$, assurdo. Infatti $p$ divide ovviamente $2^n$ e quindi divide anche $(3^n - 2^n) + 2^n$.

**Pagina 219, riga 41.** Questo principio ha come conseguenza che ogni ente della matematica può essere definito come un insieme.

**Pagina 220, riga 3.** Questo assioma ha uno statuto particolare in quanto, come vedremo, è indipendente dagli altri. Di conseguenza, si possono studiare teorie degli insiemi con assioma di scelta o senza assioma di scelta.

**Pagina 224, riga 3.** Usando la funzione tangente, si vede facilmente che $\mathbb{R}$ è in corrispondenza biunivoca con qualunque intervallo aperto e, in particolare, con $(0, 1)$. Basterà perciò dimostrare che $(0, 1)$ e $[0, 1]$ sono equipotenti. Proprio come nell'esempio dell'albergo di Hilbert, l'idea è quella di "fare spazio" nell'intervallo aperto $(0, 1)$ in modo da potervi aggiungere i due estremi. Più precisamente, sia $(x_n)_{n\geq 2}$ una successione in $(0, 1)$ di elementi tutti distinti e sia $X := \{x_n : n \geq 2\}$. Siano inoltre $x_0 := 0$ e $x_1 := 1$. Allora, ragionando come nella dimostrazione del teorema di Cantor-Bernstein a pagina 221, si verifica facilmente che la funzione $f : [0, 1] \to (0, 1)$ data dalle condizioni $f(x_n) := x_{n+2}$ per ogni $n \geq 0$ e $f(x) := x$ per ogni $x \in (0, 1) \setminus X$ è ben definita e biiettiva.

**Pagina 225, riga 24.** Un'applicazione iniettiva da $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ in $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ è definita mandando una coppia $(A, B)$ di sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ nella loro unione disgiunta, vale a dire nell'insieme $(\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B)$.

**Pagina 246, riga 29.** Si osservi che $\{a\}$ e $\{a, a\}$ denotano lo stesso insieme per l'assioma di estensionalità.

**Pagina 253, riga 6.** Per quanto abbiamo appena osservato, esiste un insieme $a$ in $\mathcal{U}$. Per l'assioma 6 di isolamento, esiste allora l'insieme $\{x : x \in a \land x \neq x\}$.

**Pagina 260, riga 24.** Si può osservare che la funzione (in senso intuitivo) corrispondente alla relazione funzionale considerata è l'identità.

**Pagina 261, riga 4.** In effetti, le funzioni (in senso intuitivo) associano a ogni elemento di un insieme al più un elemento del codominio.

**Pagina 265, riga 17.** Il principio di induzione si manifesta sotto due forme. La prima è la dimostrazione per induzione mentre la seconda, forse ancora più potente, è la definizione per induzione.

**Pagina 270, riga 7.** In generale, non vale il viceversa. Sappiamo infatti, almeno in senso intuitivo, che la relazione $\leq$ usuale su $\mathbb{R}$ è un ordine totale ma non un buon ordine, poiché per esempio il sottoinsieme $(0, 1)$ di $\mathbb{R}$ non ammette un primo elemento.

**Pagina 270, riga 21.** Questo risultato diventa falso se si rimuove l'ipotesi che $A$ esprima una relazione di buon ordine su $a$. Un controesempio si può ottenere considerando un albero radicato con almeno due rami, come in figura 1.

**Pagina 270, riga 39.** L'asserzione che $c \notin a \setminus b$ è facilmente giustificabile passando alla contronominale.

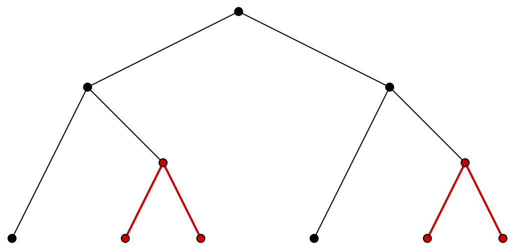

**Figura 1:** Controesempio alla proposizione 63 con ipotesi indebolite.

**Pagina 277, riga 12.** Dalla definizione segue facilmente che $\mathcal{P}(\varnothing)$ e $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))$, ossia $\{\varnothing\}$ e $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, sono ordinali. Questo potrebbe indurci a pensare che, se $\alpha$ è un ordinale, allora $\mathcal{P}(\alpha)$ è un ordinale. Questo però è falso, perché $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)))$, ossia $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, non è un ordinale. Infatti, la formula $x \in y$ non esprime una relazione transitiva su questo insieme: abbiamo $\varnothing \in \{\varnothing\} \in \{\{\varnothing\}\}$, ma $\varnothing \notin \{\{\varnothing\}\}$. Possiamo però osservare che, se $\alpha$ è un insieme transitivo, allora anche $\mathcal{P}(\alpha)$ è transitivo cioè, fissato $x \in \mathcal{P}(\alpha)$ qualsiasi, vale che $x \subseteq \mathcal{P}(\alpha)$. Per definizione di inclusione, basta mostrare che ogni elemento di $x$ è un elemento di $\mathcal{P}(\alpha)$. Ciò discende dalle seguenti implicazioni:

$$\begin{aligned} y \in x &\implies y \in \alpha && \text{(perché } x \subseteq \alpha) \\ &\implies y \subseteq \alpha && \text{(perché } \alpha \text{ è transitivo)} \\ &\implies y \in \mathcal{P}(\alpha) && \text{(definizione di insieme delle parti)} \end{aligned}$$

Altrettanto facilmente si può verificare che, se $\alpha$ è un insieme transitivo, allora $\alpha \cup \{\alpha\}$ e $\bigcup \alpha$ sono transitivi. Dimostriamolo per $\alpha \cup \{\alpha\}$ ossia vediamo che, se $\beta \in \alpha \cup \{\alpha\}$, allora $\beta \subseteq \alpha \cup \{\alpha\}$. Basta distinguere le due possibilità:

- Se $\beta \in \alpha$, allora $\beta \subseteq \alpha \subseteq \alpha \cup \{\alpha\}$, perché $\alpha$ è transitivo.
- Se $\beta = \alpha$, allora $\beta = \alpha \subseteq \alpha \cup \{\alpha\}$.

**Pagina 277, riga 14.** Il viceversa è falso, in generale. Infatti, l'insieme $\{\{\varnothing\}\}$ è un insieme di ordinali, ma non è un ordinale dal momento che non è nemmeno transitivo: il suo elemento $\{\varnothing\}$ non è un suo sottoinsieme.

**Pagina 278, riga 4.** Qui stiamo usando il fatto che $\gamma$ è un ordinale e, in particolare, un insieme transitivo.

**Pagina 279, riga 11.** Se non si assume che $\alpha$ sia un ordinale, abbiamo il seguente controesempio: vale che $\{\{\varnothing\}\} \subsetneq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, ma $\{\{\varnothing\}\} \notin \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

**Pagina 282, riga 6.** Intuitivamente, un ordinale limite non è raggiungibile con operazioni di successore.

**Pagina 282, riga 12.** Se $\alpha$ è un ordinale finito e $\beta \in \alpha$ non lo fosse, avremmo le due seguenti possibilità:

- Vale che $\beta$ non è vuoto né successore. Allora $\alpha$ ha tra i suoi elementi un ordinale che non è vuoto né successore, contro l'ipotesi che $\alpha$ sia un ordinale finito.
- Abbiamo che $\beta$ ha tra i suoi elementi un ordinale $\gamma$ che non è vuoto né successore. Poiché $\gamma \in \beta \in \alpha$ implica $\gamma \in \alpha$, si ha ancora una contraddizione con il fatto che $\alpha$ è un ordinale finito.

**Pagina 284, riga 3.** Per il viceversa ragioniamo sulla contronominale. Se $\alpha$ non è un ordinale successore, allora è l'insieme vuoto oppure è un ordinale limite. Vogliamo affermare che, per ogni $\beta \in \alpha$, si ha $\beta + 1 \in \alpha$. Questo è ovviamente vero se $\alpha = \varnothing$. Se invece $\alpha$ è un ordinale limite, la conclusione è garantita dal lemma 6.1.

**Pagina 289, riga 12.** Si noti che $c \notin S_c(a)$.

**Pagina 289, riga 21.** Per quanto già visto nella dimostrazione del punto (iii) della proposizione 70, si ha infatti la condizione $\xi = S_\xi(\eta)$.

**Pagina 290, riga 1.** Ricordiamo che $\langle a, \in_a \rangle$ è un insieme bene ordinato, perciò ogni suo sottoinsieme non vuoto ammette minimo.

**Pagina 291, riga 21.** Ricordiamo che $A$ esprime una relazione di buon ordine su $S_c(A)$. Di conseguenza, ogni suo segmento iniziale proprio è del tipo $S_d(S_c(A)) = S_d(A)$ per un opportuno $d \in S_c(A)$, in virtù della proposizione 63.