TD 2 : Formes bilinéaires symétriques, orthogonalité

Exercice 1 (**Orthogonalité et somme**)**.** Soient E un espace vectoriel de dimension finie et φ une forme bilinéaire symétrique sur E. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et que $F^\perp + G^\perp \subset (F\cap G)^\perp$.
2. Montrer qu'on a $F^\perp + G^\perp = (F\cap G)^\perp$ si φ est non dégénérée.
3. Donner un exemple pour E, f, F et G où l'on ait $F^\perp + G^\perp \neq (F\cap G)^\perp$.
4. Montrer que $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$ avec égalité si φ est non dégénérée. Donner un exemple où l'égalité n'a pas lieu.

Exercice 2. On note e_1, e_2, e_3 les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est A.

1. Donner l'expresssion de la forme bilinéaire φ.
2. La forme bilinéaire φ est-elle symétrique ? Non dégénérée ?
3. Trouver $e_3' \in \mathbb{R}^3$ tel que $\{e_1, e_2, e_3'\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ qui est orthogonale pour φ. Donner la matrice de φ dans cette base.

Exercice 3. On note e_1, e_2, e_3, e_4 les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit φ la forme bilinéaire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est A. On note que φ est une forme bilinéaire symétrique.

1. La forme bilinéaire φ est-elle non dégénérée ?
2. On note $V = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$. Soit $\psi_1 : V \times V \to \mathbb{R}, (v, v') \mapsto \varphi(v, v')$. La forme bilinéaire ψ est-elle non dégénérée ?
3. On note $W = \mathrm{Vect}(e_3, e_4)$. Soit $\psi : W \times W \to \mathbb{R}, (v, v') \mapsto \varphi(v, v')$.
   (a) La forme bilinéaire ψ est-elle non dégénérée ?
   (b) Trouver $w \in W$ tel que $\psi(e_3, w) = 1$ et $\psi(w, w) = 0$.
   (c) Trouver une base de l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(e_3, w)$ pour φ. On note u, v cette base.
   (d) Montrer que $\mathrm{Vect}(u, v, e_3, w)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
   (e) Trouver $e_1', e_2' \in \mathbb{R}^4$ tels que $\{e_1', e_2', e_3, w\}$ soit une base de $\mathbb{R}^4$ et tels que la matrice de φ dans la base $\{e_1', e_2', e_3, w\}$ soit égale à la matrice
   $$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 (**Orthogonalité et hyperplan**)**.** Soient E un espace vectoriel de dimension finie, f une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E et H un sous-espace vectoriel de E tel que $\dim(H) = \dim(E) - 1$. Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $H = (\mathbb{R}x)^\perp$.

Exercice 5. Soient E un espace vectoriel de dimension finie, f une forme bilinéaire symétrique sur E et a un vecteur non isotrope. Montrer que $E = D \oplus D^\perp$ où $D = \mathbb{R}a$.

Exercice 6. On note e_1, e_2, e_3 les fonctions suivantes :

$$e_1 : x \mapsto \cos(x), \quad e_2 : x \mapsto \sin(x) \quad \text{et} \quad e_3 : x \mapsto 1.$$

Soit E le sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ engendré par $\{e_1, e_2, e_3\}$. On considère la fonction $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad \varphi(f, g) = \int_0^\pi f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique de E.
2. Montrer que $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de E, et calculer la matrice de φ dans cette base.
3. Déterminer l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(e_1, e_3)$ pour φ. En déduire une base orthogonale de E orthogonale pour φ.

Exercice 7. Soit $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On définit

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X, Y) & \longmapsto & \mathrm{Tr}(XY). \end{array} \right.$$

1. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.
2. Montrer que φ est non dégénérée.
3. On note $\mathscr{A}$ (resp. $\mathscr{S}$) le sous-espace vectoriel de E constitué des matrices antisymétriques (resp. symétriques). Montrer que l'orthogonal de $\mathscr{A}$ pour φ est $\mathscr{S}$ et réciproquement.

Exercice 8 (**formes bilinéaires sur un espace de dimension** 2)**.** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, et soit φ une forme bilinéaire non dégénérée sur E.

1. On suppose qu'il existe un vecteur non nul v de E tel que $\varphi(v, v) = 0$. Montrer qu'il existe une base de E telle que la matrice de φ dans cette base soit $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une base de E telle que la matrice de φ dans cette base soit $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. On suppose que pour tout vecteur v de E on a $\varphi(v, v) > 0$. Montrer qu'il existe une base de E telle que la matrice de φ dans cette base soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.