M2 LMFI – Cours Fondamental de logique
Théorie de la Démonstration
Déduction naturelle pour le calcul des prédicats (version préliminaire)

Alexis Saurin

Cours des 22 et 29 octobre 2021

Contents

1 Introduction à la déduction naturelle pour le calcul des prédicats.

Dans la présente partie du cours, on introduit un nouveau système de déduction, la ***déduction naturelle***, qui sera au cœur de la seconde partie du cours à la fois du point de vue preuve-théorique que du point de vue calculatoire. Déduction naturelle et calcul des séquents ont été introduits par Gerhard Gentzen dans son article *Recherches sur la déduction logique* (titre original: *Untersuchungen über das logische schließen*) paru en 1935.

L'un des objectifs de Gentzen en introduisant la déduction naturelle était de disposer d'un formalisme proche de raisonnement mathématique usuel: *« we wish to set up a formalism that respects as accurately as possible the actual logical reasoning involved in mathematical proofs. »* On va donc introduire la déduction naturelle en étudiant la forme des arguments mathématiques et la manière donc on les enchaîne.

1.1 Quelques remarques sur la structure des raisonnements mathématiques

- Même si un texte mathématique est écrit de manière linéaire, de larges parties des résultats qui y sont établis sont indépendants les uns des autres: un texte mathématique ou logique est ainsi partiellement ordonné plutôt que totalement ordonné.
  On reflètera cette propriété dans la structure des déductions naturelles qui auront une structure aborescente.

- Une caractéristique essentielle du raisonnement mathématique est de permettre de pos(tul)er des hypothèses temporaires (ou intermédiaires, ou locales), qui seront déchargées plus tard dans le raisonnement, sous certaines conditions spécifiques et en se conformant à des règles bien spécifiques: c'est la forme classique des raisonnements débutant par «*Supposons que ...*». Par exemple:

- Démonstration d'une implication: Pour prouver que A implique B, on commence souvent par supposer A et essayer d'établir B sous cette hypothèse supplémentaire. Si on y parvient, on peut alors déduire que A implique B (sans plus avoir à supposer A). On dit qu'on a ***déchargé*** l'hypothèse A.
- Démonstration par analyse de cas: Si l'on a établi "A ou B" et qu'on veut établir un énoncé C, on peut raisonner en faisant une analyse de cas, c'est-à-dire premièrement tenter d'établir C sous l'hypothèse A, puis établir C sous l'hypothèse B et finalement en déduire C, l'analyse de cas étant complète (sans plus supposer ni A ni B).
- Raisonnement par l'absurde: Pour prouver A par l'absurde, on commence par supposer sa négation, $\neg A$, de manière à en déduire une contradiction. Si une contradiction peut en effet être déduite, on peut alors décharger l'hypothèse $\neg A$ et déduire A.

Contrairement aux systèmes de Hilbert, la déduction naturelle permettra de modifier l'ensemble des hypothèses courantes d'un raisonnement en permettant d'une part de postuler une hypothèse et d'autre part en offrant un mécanisme de déchargement d'hypothèses qu'on étudiera sous peu.

- Un raisonnement n'est pas seulement un enchaînement d'arguments selon un ordre partiel des hypothèses vers la conclusion. Un raisonnement procède en général à la fois en avant et en arrière:
En arrière, à partir de la conclusion à établir, en trouvant des prémisses suffisantes:

  - pour prouver A *et* B (ie $A \wedge B$), il est suffisant de prouver A d'une part et B d'autre part, par exemple.
  - pour prouver A *ou* B (ie $A \vee B$), il est suffisant de prouver A, par exemple.
  - pour prouver qu'*il existe x tel que A(x)* (ie $\exists x.A$), il est suffisant de prouver $A(t)$, c'est-à-dire A dans lequel x est remplacé par un certain terme t, où t est un terme mathématique dénotant un objet du domaine d'étude (un nombre, une fonction, un ensemble, une figure géométrique, etc...)
  - pour prouver que *A(x), pour tout x* (ie $\forall x.A$), on prend un x quelconque, générique (c'est-à-dire un x sur lequel on ne sait rien pour le moment) et on prouve $A(x)$

  En avant, en tirant à partir d'un énoncé déjà établi, des conséquences nécessaires:

  - si on a établi A *et* B, alors on peut en déduire A d'une part, et B, d'autre part;
  - si on a établi *A(x), pour tout x*, alors on peut en déduire $A(t)$ pour n'importe quel terme t qui dénote un objet du domande d'étude.
  - si on a établi que A *implique* B et si par ailleurs on a établi le lemme A, alors on peut en déduire B (c'est le ***modus ponens***);
  - si on a établi qu'*il existe x tel que* $A(x)$ alors, si en prenant un c qui dénote un objet générique du domaine d'étude (c'est-à-dire un objet quelconque sur lequel on ne fait aucune hypothèse) on peut démontrer un énoncé C à partir de $A(c)$, alors on peut en déduire C.

  $\Longrightarrow$ Le raisonnement en arrière indique comment prouver une formule tandis que le raisonnement en avant indique comment utiliser une formule dans la preuve.

  La déduction naturelle sera structurée de manière à ce que, pour chaque connecteur logique, ces deux formes de raisonnements – en avant et en arrière – soient présents au moyen, respectivement, de **règles d'élimination** *et de* **règles d'introduction**.

  Les règles d'introduction spécifiront, pour chaque connecteur logique, la manière canonique d'établir un énoncé constitué de ce connecteur.

Les règles d'élimination spécifiront, pour chaque connecteur logique, la manière canonique d'utiliser un énoncé constitué de ce connecteur, dans un raisonnement.

1.2 Un détour du côté du calcul des séquents

Dans la première partie du cours, on a étudié le calcul des séquents et établi le théorème de complétude de Gödel pour le calcul des prédicats. Cela signifie que tous les énoncés valides peuvent être dérivés en calcul des séquents et qu'il n'est pas nécessaire d'introduire d'autres formes de raisonnement: on ne peut pas espérer prouver plus que ce que nous permet de dériver LK.

On peut pourtant souhaiter prouver *différemment*, au moyen d'autres formes de déductions: on peut ainsi introduire de nouvelles règles d'inférence et se demander comment elles sont liées aux inférences du calcul des séquents. Pour cela, on va introduire les notions de ***règle admissible*** et de ***règle dérivable***.

Définition 1.1 (*Règle dérivable, règle admissible*)

On suppose donné un calcul des séquent S. Considérons une règle d'inférence r de la forme suivante: $\dfrac{\mathcal{P}_1 \quad \ldots \quad \mathcal{P}_k}{\mathcal{C}}\, r$ *avec $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k, \mathcal{C}$ des séquents.*

r est dite **dérivable** *dans S si on peut définir un enchaînement correct d'inférences de S qui relie les séquents prémisses $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k$ de la règle à sa conclusion $\mathcal{C}$.*

r est dite **admissible** *dans S si $\mathcal{C}$ est dérivable dans S dès que ses prémisses $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k$ sont dérivables dans S.*

Il est évident que toute règle dérivable est admissible. La réciproque n'est pas vraie en général comme les exemples suivants l'illustrent.

Exemple 1.2

Dans la première partie du cours (voir les Sections 2.1 et 2.3 des notes de Thierry Joly), on a étudié plusieurs versions de LK. Il y est montré que les règles d'inférence de l'implication du calcul des séquents LK de la Section 2.1 (page 27 des notes de TJ) sont **dérivables** *dans le calcul des séquents ascendant (de la Section 2.3).*

Le théorème d'élimination des coupures montre que la coupure est **admissible** *dans le calcul des séquents sans coupure. La coupure n'est par contre* **pas dérivable** *dans le calcul des séquents sans coupure puisque toutes les règles du calcul des séquents sans coupure satisfont la propriété de la sous-formule ce dont on déduit immédiatement que toute règles dérivable dans le calcul des séquents sans coupure satisfait aussi la propriété de la sous-formule. Comme la coupure ne satifait pas cette propriété, elle n'est pas dérivable.*

Remarque 1.3

La notion de règle dérivable est stable par extension d'un système de preuve alors que la notion d'admissibilité ne l'est pas forcément. Savoir qu'une règle r est dérivable dans un calcul des séquents S donne donc plus d'information que le fait de n'avoir que son admissibilité puisqu'on sait alors que r est dérivable et admissible dans S **et dans toutes ses extensions**.

Dans la suite de cette section, on va considérer quelques règles dérivables dans LK.

Proposition 1.4

Les règles suivantes sont dérivables dans LK:

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Delta \vdash A}{\Gamma, \Delta \vdash B}\ (\Rightarrow \mathsf{elim}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A_1 \wedge A_2}{\Gamma \vdash A_i}\ (\wedge \mathsf{elim_i}) \quad i \in \{1, 2\}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Delta, A \vdash C \quad \Sigma, B \vdash C}{\Gamma, \Delta, \Sigma \vdash C}\ (\vee \mathsf{elim})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Delta \vdash A}{\Gamma, \Delta \vdash \bot}\ (\neg \mathsf{elim}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ (\bot \mathsf{elim}) \qquad \frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ (\bot_{\mathsf{c}})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x. A}{\Gamma \vdash A[x := t]}\ (\forall \mathsf{elim}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x. A \quad \Delta, A[x := c] \vdash C}{\Gamma, \Delta \vdash C}\ (\exists \mathsf{elim}) \quad \textit{(si c n'a pas d'occurrence dans Γ, A, C)}$$

Remarque 1.5

On notera que les dérivations fournies pour les règles d'élimination de la proposition précédente sont toutes des dérivations de LJ *à l'exception de la dérivation correspondant à la règles* $(\bot_\mathsf{c})$ *qui est une dérivation de* LK.

1.3 Des règles pour l'égalité

Alors que dans le calcul des séquents, l'égalité a été traitée de manière axiomatique, on peut en faire un connecteur logique en déduction naturelle, auquel on associe des règles d'introduction et d'élimination:

$$\frac{}{t = t}\ (= \mathsf{intro}) \qquad \frac{\begin{array}{cc} \vdots & \vdots \\ t_1 = t_2 & A[x := t_j] \end{array}}{A[x := t_{3-j}]}\ (= \mathsf{elim_j}) \quad j \in \{1, 2\}$$

Remarque 1.6

On peut en fait dériver $(= \mathsf{elim_2})$ *à partir de* $(= \mathsf{elim_1})$.

2 Définition de la déduction naturelle

Définition 2.1 (*Preuves de la déduction naturelle, hypothèses libres et déchargées*)

Une preuve de la déduction naturelle est un arbre de formules dont la relation de parenté est spécifiée par un ensemble de règles logiques dépendant du système en considération. Les feuilles des arbres de preuves sont des hypothèses de la preuve et peuvent être de deux sortes:

- *des* **hypothèses libres** *(on parlera parfois d'hypothèses non déchargées): notée simplement* $A, B, C, \ldots$
- *des* **hypothèses déchargées** *qui correspondent à des hypothèses auxiliaires qui ont été postulées temporairement mais qu'une étape du raisonnement a permis de décharger de l'ensemble courant d'hypothèse. Ces hypothèses seront notées entre crochet:* $[A]$ *et de plus chaque hypothèse déchargée devra être associée à un noeud de l'arbre de preuve, la règle qui justifie de son déchargement. Pour cela on utilisera deux systèmes équivalents: (i) un système d'étiquettes ou labels et (ii) un système de pointeurs.*

Remarque 2.2

La définition précédente ne nous dit pas encore ce que sont les preuves de la déduction naturelle car il faut encore définir comment on construit les arbres à partir de la donnée des règles logiques, ce qu'on va faire dans les prochaines paragraphes.

La définition précédente indique à la fois qu'une preuve est un arbre de formules et que les hypothèses non déchargées pointent vers des noeuds qui sont des règles justifiant le déchargement. Cette apparente incohérence est facilement résolue de la manière suivante (qu'on négligera souvent dans la suite):

- *On peut en fait considérer que l'arbre de preuve est un arbre dont les noeuds sont étiquetés par des paires d'une formule et d'une règle d'inférence: la règle dont on déduit la formule.*
- *La donnée de l'arbre de formules est presque, mais pas tout à fait, suffisante pour reconstruire les règles d'inférences et donc la structure complète de la déduction: elle ne suffisent cependant pas à représenter les déductions de manière univoque. Elles sont en revanche suffisante pour vérifier que les déchargements d'hypothèses satisfont les conditions du système logique, c'est-à-dire à garantir qu'il existe bien une déduction correcte de la conclusion sous les hypothèses non déchargées. En particulier, la règle d'introduction de la disjonction pose problème lorsqu'elle est utilisée pour déduire* $A \vee A$, *ce qui aura une conséquence lorsqu'on souhaitera donner un contenu calculatoire aux preuves.*

- *Dans la pratique, quand il n'y aura pas de confusion possible, on s'autorisera parfois à ne représenter que l'arbre de formule sans nommer les inférences.*

Pour pouvoir précisément définir les preuves d'un système de déduction naturelle, on introduit ci-dessous quelques notations:

$$\begin{array}{c} \vdots\ \pi \\ C \end{array}$$

désigne une déduction naturelle π de conclusion C (possiblement sous certaines hypothèses non explicitées).

$$\begin{array}{c} H \\ \vdots\ \pi \\ C \end{array}$$

désigne une déduction naturelle π de conclusion C dans laquelle on pointe certaines hypothèses libre de π, H, en nombre arbitraires: on peut ainsi désigner 0, 1 ou plusieurs feuilles de l'arbre de preuve. Étant donné des déductions

$$\begin{array}{c} H_k \\ \vdots\ \pi_k \\ P_k \end{array}$$

de conclusion P_k, pour $1 \leq k \leq n$,

$$\dfrac{\begin{array}{c} [H_1]^\alpha \\ \vdots\ \pi_1 \\ P_1 \end{array} \qquad \dots \qquad \begin{array}{c} [H_n]^\alpha \\ \vdots\ \pi_n \\ P_n \end{array}}{C}\ r, \alpha$$

désigne une déduction naturelle de conclusion C obtenue à partir des déductions π_k précédentes avec pour dernière règle r étiquetée par α qui décharge les hypothèses H_k pointées dans les déductions π_k, pour $1 \leq k \leq n$. (Le label α ne doit pas apparaître dans les déduction π_k.)

On utilisera aussi une notation évitant l'usage des étiquettes en utilisant une notation avec des pointeurs comme suit:

$$\dfrac{\begin{array}{c} [H_1] \\ \vdots\ \pi_1 \\ P_1 \end{array} \qquad \dots \qquad \begin{array}{c} [H_n] \\ \vdots\ \pi_n \\ P_n \end{array}}{C}\ r$$

Définition 2.3 (*Preuves de la déduction naturelle*)

Les preuves de la déduction naturelle classique du premier ordre sont définies inductivement à partir des inférences présentées en figure 1

Remarque 2.4

La définition précédente signifie notamment que:

- *L'arbre réduit à une feuille A est une preuve de la déduction naturelle, déduction de A sous l'hypothèse A.*

- *Si $\begin{array}{c} A \\ \vdots\ \pi \\ B \end{array}$ est une preuve de conclusion B dont certaines hypothèses libres A ont été distinguées, $\dfrac{\begin{array}{c} [A] \\ \vdots\ \pi \\ B \end{array}}{A \Rightarrow B}\ (\Rightarrow \text{intro})$ est une preuve de conclusion $A \Rightarrow B$ (sous les mêmes hypothèses que π sauf ses hypothèses distinguées qui ont été déchargées).*

- *Si* $\begin{array}{c}\vdots\ \pi\\ A[x:=t]\end{array}$ *est une preuve de conclusion* $A[x:=t]$, *alors* $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi\\ A[x:=t]\end{array}}{\exists x.A}\ {\scriptstyle(\exists\text{intro})}$ *est une preuve de conclusion* $\exists x.A$ *sous les mêmes hypothèses que* π.

- *Si* $\begin{array}{c}\vdots\ \pi_1\\ \exists x.A\end{array}$ *et* $\begin{array}{c}A\\ \vdots\ \pi_2\\ C\end{array}$ *sont respectivement des preuves de conclusion* $\exists x.A$ *et* C *et que* y *ne soit libre ni dans* $\exists x.A$, *ni dans* C, *ni dans les hypothèses non déchargées de* π_2, *hormis dans les occurrences distinguées de* $A[x:=y]$, *alors* $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_1\\ \exists x.A\end{array}\qquad \begin{array}{c}[A[x:=y]]\\ \vdots\ \pi_2\\ C\end{array}}{C}\ {\scriptstyle(\exists\text{elim})}$ *est une preuve en déduction naturelle de* C *(sous les hypothèses libres de* π_1 *et* π_2 *hormis les hypothèses distinguées de* π_2 *qui ont été déchargées).*

- ...

Remarque 2.5

Les restrictions sur les règles (∀intro) *et* (∃elim) *sont nécessaires à la correction logique de ces deux règles. Ainsi, sans ces conditions, on pourrait dériver des preuves de* $\exists x.(x=0) \Rightarrow \forall x.(x=0)$ *et de* $\exists x.A \wedge \exists x.B \Rightarrow \exists x.(A \wedge B)$ *(exercice.)*

Notation 2.6

On notera $\Gamma \vdash A$ *s'il existe une déduction naturelle de* **conclusion** A *dont les* **hypothèses non déchargées** *sont parmi l'ensemble* Γ.

On va commencer par se familiariser avec les objets de la déduction naturelle et on verra par la suite les propriétés de ce système.

2.1 Au sujet des variables libres et liées

On travaillera avec des formules qui sont des classes d'équivalence modulo renommage des variables liées (les lieurs sont $\forall$ et $\exists$): les variables liées désignent juste des positions dans des formules, permettant l'instantiation par un terme, mais n'ont pas d'individualité propre, leur nom n'importe pas, elles sont muettes.

On pourra donc toujours supposer qu'on choisit une représentation qu'on choisit des représentants qui satisfont les conditions suivantes:

- les ensembles de variables libres et liées d'une formule sont disjoints;
- deux variables liées par des quantificateurs distincts ont des noms différents (ou encore: chaque variable apparaît au plus une fois juste après un quantificateur).

En particulier, $\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash A[x:=y]}}{\Gamma \vdash \forall x.A}\ {\scriptstyle(\forall\text{intro})}$, si y n'a pas d'occurrence libre dans $\Gamma, \forall x.A$ est une instance des règles ($\forall_{\mathsf{R}}$) (resp. (∀intro)).

Cette hypothèse peut être relevée au niveau des preuves du calcul des séquents ou, comme on le verra ci-après, aux déductions naturelles. Cela permettra de manipuler légèrement différemment les règles de quantification par rapport à ce qui a été étudié précédemment en calcul des séquents (utilisant un ensemble infini de constantes), mais est essentiellement équivalent:

Définition 2.7 (*Eigenvariable*)

On appelle **eigenvariable** *dans une déduction une variable* y *qui est généralisée dans une règle* (∀intro) *ou une variable* y *qui est utilisée de manière générique dans une règle* (∃elim)*:*

$$\frac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash A[x := y]}}{\Gamma \vdash \forall x.A}\ (\forall\text{intro}) \qquad \frac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma \vdash \exists x.A} \quad \dfrac{\pi_2}{\Delta, A[x := y] \vdash C}}{\Gamma, \Delta \vdash C}\ (\exists\text{elim})$$

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi' \\ A[x := y]\end{array}}{\forall x.A}\ (\forall\text{intro}) \qquad \frac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_1' \\ \exists x.A\end{array} \quad \begin{array}{c}[A[x := y]] \\ \vdots\ \pi_2' \\ C\end{array}}{C}\ (\exists\text{elim})$$

Dans ce cas, y est dite **eigenvariable** *pour les règles* (∀intro) *(resp.* (∃elim)*) dans π, π' (resp. π_2, π_2').*

Définition 2.8 (*Forme normale pour les variables libres*)

Une déduction π est dite en **forme normale pour les variables libres** *(nfvl ou fvnf) si:*

- *aucune variable libre de ses conclusions ou ses hypothèses non déchargées n'est utilisée comme eigenvariable, et*
- *toutes les autres variables libres apparaissant dans π sont utilisées* **exactement** *une fois comme eigenvariable et apparaissent dans π seulement dans des séquents au-dessus de l'inférence qui les introduit comme eignevariable.*

  C'est-à-dire que y n'a d'occurrence libre que dans π et π_2 respectivement dans les schémas de preuve suivants:

$$\frac{\dots \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi \\ A[x := y]\end{array}}{\forall x.A}\ (\forall\text{intro}) \qquad \dots}{E} \qquad \frac{\dots \qquad \begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi_1 \\ \exists x.A\end{array} \quad \begin{array}{c}[A[x := y]] \\ \vdots\ \pi_2 \\ C\end{array}}{C}\ (\exists\text{elim}) \\ \vdots \\ D_i\end{array} \qquad \dots}{E}$$

On identifiera deux déductions qui ne diffèrent que par le renommage de leurs variables liées et de leurs eigenvariables.

Proposition 2.9

Pour tout Γ, A et toute déduction de A à partir des hypothèses Γ, il est possible de choisir un représentant de π en forme normale pour les variables libres.

Les propriétés suivantes seront utiles pour nous permettre de réaliser certaines transformations sur les déductions:

Lemme 2.10

Si π est une déduction de A dont les hypothèses non déchargées sont parmi Γ. Il existe une déduction π' de A sous les mêmes hypothèses non déchargées telle que les constantes utilisées dans les règles (∀intro) *et* (∃elim) *sont deux à deux distinctes.*

Lemme 2.11

Soit t un terme du premier ordre et π une déduction de A dont les hypothèses non déchargées sont parmi Γ (en forme normale pour les variables libres). Soit x une variable libre (qui n'est donc pas une eigenvariable, ie pas impliquée dans une règle (∀intro) *ou* (∃elim)*). Supposons de plus qu'aucune des variables libres de t n'est une eigenvariable dans π. Alors en remplaçant toutes les formules F de π par $F[x := t]$, on obtient un arbre $\pi[x := t]$ qui est une dérivation de la déduction naturelle de conclusion $A[x := t]$ et dont les hypothèses non déchargées sont parmi $\Gamma[x := t]$.*

2.2 Règles dérivables en déduction naturelle

Il est naturel de commencer par comparer ce qu'on peut prouver dans les deux systèmes de déduction dont on dispose:

Exercice 2.1

Donner une dérivation en déduction naturelle pour chaque axiome des systèmes à la Hilbert du calcul des prédicats.

Exercice 2.2

Montrer l'équivalence de la prouvabilité en calcul des séquent et en déduction naturelle:
$\Gamma \vdash_{\mathsf{LK}} A$ *si, et seulement si, il existe une déduction de* A *sous les hypothèses* Γ*.*

La déduction naturelle est donc plus *naturelle* dans le sens où elle suit de manière plus fidèle la forme du raisonnement mathématique usuel que système de Hilbert ou calcul des séquents.

En fait, dans les textes mathématiques, on a recours à beaucoup plus de formes de raisonnement que ce que propose la figure 1. Il est donc naturel de se demander si la déduction naturelle permet de dériver tous les énoncés qu'on peut prouver par une démonstration mathématique: le résultat ci-dessus permet de conclure immédiatement à la complétude de la déduction naturelle classique.

Au-delà de la complétude, on peut être intéressé à la forme que prennent ces déductions et considéré une notion de déribabilité similaire à celle qu'on a introduite plus haut pour le calcul des séquents:

Définition 2.12 (*Dérivabilité d'une inférence en déduction naturelle*)

On dit qu'une règle d'inférence est **dérivable** *en déduction naturelle si on peut définir un enchaînement correct de règles de la déduction naturelle qui relie les prémisses de la règle à ses conclusions et qui décharge les mêmes hypothèses.*

Exemple 2.13

Ainsi, l'exercice 2.1 établit-il par exemple que les axiomes des systèmes de Hilbert sont dérivables en déduction naturelle.

Exercice 2.3

Montrer que les règles suivantes sont dérivables en déduction naturelle:

- $$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B\end{array} \qquad A}{B}\;(\mathsf{Cut})$$
- $$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \vdots \\ A\end{array}}{A}\;(\mathsf{Peirce})$$

Le raisonnement dit *classique*, en particulier, prend de nombreuses formes: tiers exclus, raisonnement par l'absurde, élimination de la double négation, etc...

Exercice 2.4

Démontrer les énoncés suivants en déduction naturelle:

- $A \vee \neg A$;
- $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$;
- $\neg\neg A \Rightarrow A$.

2.3 Démonstrations informelles et preuves formelles

Exercice 2.5

Pour chacun des énoncés suivants, (i) donner une démonstration mathématique, (ii) formaliser l'énoncé en calcul des prédicats et (iii) en donner une déduction naturelle:

1. *Toute involution est une bijection.*
2. *Deux injections à support disjoint commutent.*
3. *Si $f \circ g$ est injective et g est surjective, alors f est injective.*
4. *Si $f \circ g$ est surjective et g est injective, alors f est surjective.*
5. *La composée de deux bijections est une bijection.*

   Dans la suite, on se donne un ensemble fini E.

6. *Soit f une fonction de $\mathbb{N}$ dans E, alors l'image inverse d'au moins un des éléments de E est infinie.*
7. *Soit f une fonction de E dans E, f est une injection si, et seulement si, c'est une surjection.*

Exercice 2.6

Démontrer que l'égalité est une relation d'équivalence.

2.4 Arithmétique de Peano

On se place dans le langage de l'arithmétique de Peano (avec les symboles de constantes et de fonctions 0, S, $+$ et $\times$) et on note PA_0 la théorie constituée des formules suivantes:

A_1	$\forall x.S(x) \neq 0$
A_2	$\forall x.(x = 0 \vee \exists y.x = S(y))$
A_3	$\forall x.\forall y.(S(x) = S(y) \Rightarrow x = y)$
A_4	$\forall x.(x + 0 = x)$
A_5	$\forall x.\forall y.(x + S(y) = S(x + y))$
A_6	$\forall x.(x \times 0 = 0)$
A_7	$\forall y.\forall y.(x \times S(y) = (x \times y) + x)$

Et on considère par ailleurs le schéma d'axiomes de récurrence $\mathsf{Rec} = (\mathsf{Rec}_F)_{F \in \mathsf{Form}}$ dont les formules Rec_F sont les clôtures universelles des

$$(F[x := 0] \wedge (\forall n.F[x := n] \Rightarrow F[x := Sn])) \Rightarrow \forall x.F.$$

On note PA la théorie obtenue en étendant PA_0 avec le schéma de récurrence.

Exercice 2.7

Montrer que PA *est consistante et que tous les modèles de* PA *sont infinis.*

Exercice 2.8

Dans cet exercice, on s'intéresse à la commutativité de l'addition:

- *Montrer que* $\mathsf{PA}_0 \nvdash \forall x.\forall y.(x + y = y + x)$.
- *Montrer que* $\mathsf{PA} \vdash \forall y.(0 + y = y)$.
- *Montrer que* $\mathsf{PA} \vdash \forall x.\forall y.(S(x) + y = S(x + y))$.
- *En déduire* $\mathsf{PA} \vdash \forall x.\forall y.(x + y = y + x)$.

Exercice 2.9

Montrer que $\mathsf{PA} \setminus \{A_2\} \vdash A_2$.

Hypothèse	A	
Connecteurs prop.		
Implication	$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \Rightarrow B}$ ($\Rightarrow$ intro)	$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A \Rightarrow B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ A\end{matrix}}{B}$ ($\Rightarrow$ elim)
Conjonction	$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A_1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ A_2\end{matrix}}{A_1 \wedge A_2}$ ($\wedge$intro)	$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A_1 \wedge A_2\end{matrix}}{A_i}$ ($\wedge$elim$_i$) $, i \in \{1,2\}$
Disjonction	$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A_i\end{matrix}}{A_1 \vee A_2}$ ($\vee$intro$_i$) $, i \in \{1,2\}$	$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A \vee B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}$ ($\vee$elim)
Négation	$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg A}$ ($\neg$intro)	$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \neg A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ A\end{matrix}}{\bot}$ ($\neg$elim)
Absurdité		$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \bot\end{matrix}}{A}$ ($\bot$elim) $\qquad \dfrac{\begin{matrix}[\neg A]\\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{A}$ ($\bot_c$)
Quantificateurs		
Quantificateur universel	$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A[x := y]\end{matrix}}{\forall x.A}$ ($\forall$intro) $(\star)$	$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \forall x.A\end{matrix}}{A[x := t]}$ ($\forall$elim)
Quantificateur existentiel	$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A[x := t]\end{matrix}}{\exists x.A}$ ($\exists$intro)	$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \exists x.A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[A[x := y]]\\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}$ ($\exists$elim) $(\star\star)$
Égalité	$\dfrac{}{t = t}$ (= intro)	$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ t_1 = t_2\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ A[x := t_j]\end{matrix}}{A[x := t_{3-j}]}$ (= elim$_j$) $\quad j \in \{1,2\}$

$(\star)$ y n'est pas libre dans les hypothèses (non déchargées) de la dérivation de A, ni dans $\forall x.A$.
$(\star\star)$ y n'est pas libre dans les hypothèses (non déchargées) de la dérivation de C, ni dans C ou $\exists x.A$ elles-mêmes.

Figure 1: Déduction naturelle de Gentzen