

M2 LMFI – Cours Fondamental de logique
THÉORIE DE LA DÉMONSTRATION
**Élimination des coupures et propriétés de la
sous-formule en déduction naturelle**
(version préliminaire)

Alexis Saurin

Cours du 29 octobre 2021

Table des matières

1	Coupures en déduction naturelle	2
1.1	Règles de réduction des coupures	4
1.2	Cas du fragment $\forall \wedge \neg \Rightarrow$	5
1.2.1	Propriété de la sous-formule	5
1.2.2	Quelques poids	6
1.2.3	Fragment conjonctif universel	6
1.2.4	Fragment avec négation et implication	7
1.3	Coupures commutatives en déduction naturelle	8

1 Coupures en déduction naturelle

Définition 1.1 (*Coupure*)

On appelle **coupure**, dans un système de déduction naturelle, un nœud qui est **conclusion** d'une règle d'introduction et **prémisse principale** d'une règle d'élimination.

Le nœud en question est une formule dont le connecteur principal donnera son nom à la coupure considérée : on parlera de coupure conjonctive, disjonctive, implicative, universelle...

Voici les différents cas de coupures :

1. *Coupure conjonctive* :

$$\frac{\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \pi_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \pi_2 \end{array}}{A_1 \quad A_2} (\wedge \text{intro}) \quad i \in \{1, 2\}}{\frac{A_1 \wedge A_2}{A_i} (\wedge \text{elim}_i)}$$

2. *Coupure universelle* :

$$\frac{\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \pi_A \end{array}}{A[x := y]} (\forall \text{intro})}{\frac{\forall x. A}{A[x := t]} (\forall \text{elim})}$$

3. *Coupure négative* :

$$\frac{\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ \pi_{\neg A} \end{array}}{\perp} (\neg \text{intro})}{\frac{\neg A}{\perp} (\neg \text{elim})} \quad \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \pi_A \end{array}}{A} (\Rightarrow \text{elim})$$

4. Coupure implicative :

$$\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ \pi_B \\ \hline B \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \pi_A \\ \hline A \end{array}}{B} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{(\Rightarrow \text{intro})} \\ \xrightarrow{(\Rightarrow \text{elim})} \end{array}$$

5. Coupure disjonctive :

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \pi_{A_i} \\ \hline A_i \end{array} \quad \begin{array}{c} [A_1] \quad [A_2] \\ \vdots \quad \vdots \\ \pi_B^1 \quad \pi_B^1 \\ \hline B \quad B \end{array}}{B} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{(\vee \text{intro}_i)} \\ \xrightarrow{(\vee \text{elim})} \end{array}$$

6. Coupure existentielle :

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \pi_A \\ \hline A[x := t] \end{array} \quad \begin{array}{c} [A[x := y]] \\ \vdots \\ \pi_C \\ \hline C \end{array}}{\exists x.A} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{(\exists \text{intro})} \\ \xrightarrow{(\exists \text{elim})} \end{array}$$

7. Coupure égalitaire :

$$\frac{\overline{t = t} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \pi \\ \hline A[x := t] \end{array}}{A[x := t]} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{(\text{intro})} \\ \xrightarrow{(\text{elim}_j)} \end{array} \quad j \in \{1, 2\}$$

Exercice 1.1 (Coupures dans la déduction naturelle avec séquents)

Reformuler les coupures précédentes avec les systèmes de déduction naturelle ascendante (séquents-ensembles) et de déduction naturelle descendante (séquents-listes) vus en cours.

Exercice 1.2 (Coupures de la déduction naturelles dans le calcul des séquents)

En reprenant les conditions de dérivabilité des en calcul des séquents des règles d'élimination de la déduction naturelle, exprimer les dérivations du calcul des séquents «correspondants» aux coupures ci-dessus. Que remarque-t-on quant aux coupures (du calcul des séquents) impliquées dans ces situations ?

Exercice 1.3 (Au détour d'une preuve) (★)

“La coupure est un détour dans le raisonnement.” Donner du sens à cette affirmation.

Le fait que la coupure soit un détour *superflu* du raisonnement est en fait établi par le théorème d'élimination des coupures qui affirme :

Théorème 1.2

À toute déduction π de A dont les hypothèses non déchargées sont parmi Γ , on peut associer une nouvelle déduction π' de A , toujours avec hypothèses parmi Γ , qui ne contient pas de coupure.

On va établir ce résultat progressivement pour des fragments de plus en plus grand de la déduction naturelle. Pour cela, on va procéder comme suit :

- On définira une relation sur les preuves de la déduction naturelle qui transforme des déductions contenant des coupures, en “simplifiant” les coupures, de telle sorte que toute déduction contenant une coupure est en relation avec une autre déduction “plus simple”.
- On montrera qu'on peut associer un poids aux dérivations de la déduction naturelle de telle sorte qu'il est possible d'appliquer nos transformations d'une manière qui fasse diminuer le poids des dérivations pour un ordre bien fondé, garantissant qu'il existe des suites finies de déductions en relation, telle que la dernière déduction n'est en relation avec aucune autre, c'est-à-dire qu'elle est sans coupure.

On va commencer par définir une relation de **réduction de coupure** pour chacun des cas de coupure ci-dessus. On établira ensuite le théorème d'élimination des coupures en deux parties distinctes :

- On va traiter dans un premier temps le fragment de la déduction naturelle contenant uniquement les inférences relatives aux connecteurs $\wedge, \forall, \neg, \Rightarrow$, le fragment dit réversible de la déduction naturelle. L'importance de l'élimination des coupures est justifiée par le fait qu'on verra que, dans ce fragment, toute déduction sans coupure a la propriété de la sous-formule définie ci-dessous, et donc que tout énoncé démontrable l'est par une déduction satisfaisant la propriété de la sous-formule, ce qui est une forme de **pureté des méthodes** :

Définition 1.3 (Propriété de la sous-formule)

La **relation de sous-formule** est la plus petite relation binaire entre formules qui soit transitive, et qui contienne : $\{(A_i, A_1 \square A_2), A_1, A_2 \in \text{Form}, i \in \{1, 2\}, \square \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}\} \cup \{(A, \neg A) \mid A \in \text{Form}\} \cup \{(A[x := t], Qx.A), A \in \text{Form}, t \in \text{Term}, Q \in \{\forall, \exists\}, x \in \text{Var}\}$.

Une déduction π satisfait la **propriété de la sous-formule** si toute formule apparaissant dans l'arbre de dérivation de π est sous-formule de la conclusion de π ou d'une de ses hypothèses non-déchargées.

- On étendra ensuite les résultats précédents à la déduction naturelle tout entière en remarquant d'abord que les règles de simplification définies plus tôt ne suffisent plus à garantir la propriété de la sous-formule pour les déductions sans coupure en présence des connecteurs $\vee, \exists, =$. On étendra alors la relation de réduction de coupure de manière à satisfaire la propriété de sous-formules pour les déductions sans coupures de la déduction naturelle puis on montrera comme associer un poids aux déductions qui décroît lorsqu'on applique les bonnes transformations sur les déductions.

1.1 Règles de réduction des coupures

Définition 1.4 (Règles de réduction des coupures)

1. Réduction d'une coupure conjonctive :

$$\frac{\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \pi_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \pi_2 \end{array}}{A_1 \quad A_2} (\wedge \text{intro})}{\frac{A_1 \wedge A_2}{A_i} (\wedge \text{elim}_i)} \longrightarrow \begin{array}{c} \vdots \\ \pi_i \quad i \in \{1, 2\} \\ A_i \end{array}$$

2. Coupure universelle :

$$\frac{\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \pi_A \end{array}}{A[x := y]} (\forall \text{intro})}{\frac{\forall x.A}{A[x := t]} (\forall \text{elim})} \longrightarrow \begin{array}{c} \vdots \\ \pi_A[y := t] \\ A[x := t] \end{array}$$

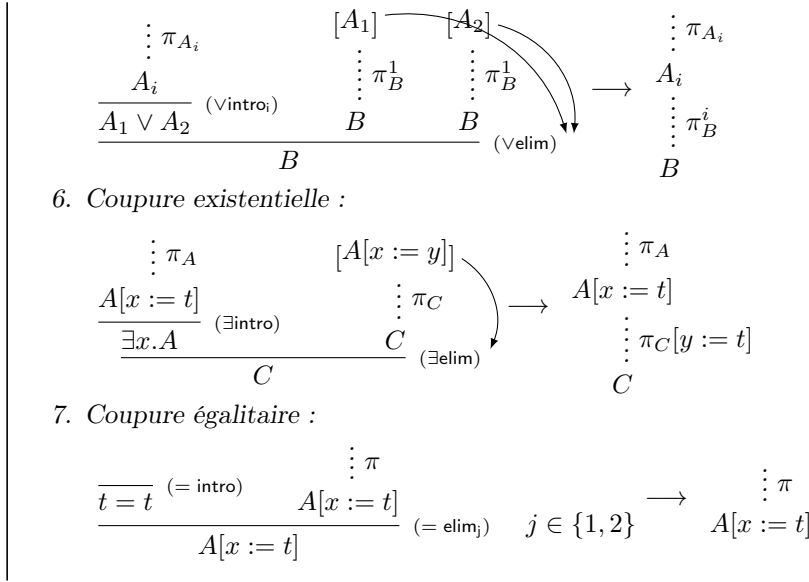
3. Coupure négative :

$$\frac{\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ \pi_{\neg A} \end{array}}{\perp} (\neg \text{intro})}{\frac{\perp}{\neg A} (\neg \text{elim})} \quad \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \pi_A \end{array}}{A} \longrightarrow \begin{array}{c} \vdots \\ \pi_A \\ A \\ \vdots \\ \pi_{\neg A} \\ \perp \end{array}$$

4. Coupure implicative :

$$\frac{\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ \pi_B \end{array}}{B} (\Rightarrow \text{intro})}{\frac{A \Rightarrow B}{B} (\Rightarrow \text{elim})} \quad \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \pi_A \end{array}}{A} \longrightarrow \begin{array}{c} \vdots \\ \pi_A \\ A \\ \vdots \\ \pi_B \\ B \end{array}$$

5. Coupure disjonctive :



Proposition 1.5

Si π est une déduction d'une formule C dont les hypothèses sont parmi Γ qui est en forme normale pour les variables libres et si π' est tel que $\pi \longrightarrow \pi'$, alors π' est une dérivation de la déduction naturelle de conclusion C dont les hypothèses non déchargées sont dans Γ .

Démonstration : Les cas 1 et 7 (conjonction et égalité) sont évidents.

Pour la coupure universelle (cas 2), il suffit d'utiliser le lemme assurant que la substitution dans une déduction π de conclusion C et dont les hypothèses non déchargées sont parmi Γ d'une variable y par un terme ne contenant aucune eigenvariable est bien une déduction de conclusion $C[y := t]$ d'hypothèses non déchargées $\Gamma[y := t]$ et de remarquer que par la condition d'application de ($\forall intro$), y n'apparaît dans aucune hypothèse non déchargée de π_A ni dans $\forall x.A$ donc que $A[x := y][y := t] = A[x := t]$ et que les hypothèses non déchargées de π_A sont invariantes par cette substitution.

Pour les coupures négatives, implicatives et disjonctives (cas 3, 4, 5), il suffit de remarquer que par l'hypothèse que la déduction π est en forme normale pour les variables libres, le fait de remplacer une hypothèse déchargée (A ou A_i selon le cas) par une déduction (π_A ou π_{A_i} selon le cas) ne casse aucune condition d'application de règles sur les quantificateurs.

Pour la coupure existentielle enfin (cas 6), on combine le raisonnement de la coupure universelle avec le cas précédent : $\pi_C[y := t]$ est une déduction correcte, de conclusion C (car $C[y := t] = C$) et d'hypothèses non déchargées identiques à celles de π_C si ce n'est pour $A[x := y]$ qui est devenue $A[x := t]$, nous permettant de conclure en remplaçant cette hypothèse par π_A , ce qui est licite par hypothèse de forme normale des variables libres. $\square$

1.2 Cas du fragment $\forall \wedge \neg \Rightarrow$

Dans cette sous-section, on se place dans le fragment $\forall \wedge \neg \Rightarrow$ de NJ pour lequel on va d'abord donner une première preuve simple de la propriété de la sous-formule pour les déductions sans coupures, avant de prouver le résultat d'élimination des coupures en plusieurs étapes. on donnera enfin une preuve plus informative de la propriété de la sous-formule.

1.2.1 Propriété de la sous-formule

Proposition 1.6

Les déductions sans coupure du fragment $\forall \wedge \neg \Rightarrow$ de la déduction naturelle intuitionniste satisfont la propriété de la sous-formule : toute formule apparaissant dans une déduction sans coupure π est sous-formule de la conclusion de π ou d'une de ses hypothèses non-déchargées.

Démonstration : Soit d une déduction sans coupure. Par l'absurde, supposons que A est une formule maximale (pour l'ordre de sous-formule) apparaissant dans d qui ne soit ni conclusion, ni hypothèse non-déchargée de d .

On remarque d'abord que A ne peut pas non plus être une hypothèse déchargée : les hypothèses déchargées sont toutes sous-formules de la conclusion de l'inférence qui les décharge et ne peuvent donc pas être maximales. A est donc à la fois prémisses et conclusion d'une inférence.

L'inférence dont A est conclusion est nécessairement une règle d'introduction (par maximalité de A), tandis que l'inférence dont A est prémisses est nécessairement une règle d'élimination dont A est prémisses principale (à nouveau par maximalité de A), c'est-à-dire que A est une formule de coupure, une contradiction : les formules maximales sont donc nécessairement parmi la conclusion ou les hypothèses non déchargées de d . □

1.2.2 Quelques poids

Définition 1.7 (*hauteur d'une formule, degré d'une coupure, degré d'une preuve*)

On définit la **hauteur** $h(F)$ d'une formule F (ou pourra aussi dire le **degré**) comme suit :

- $h(F) = 1$ si F est atomique,
- $h(\forall x.F) = h(\exists x.F) = h(\neg F) = h(F) + 1$ et
- $h(F \wedge G) = h(F \Rightarrow G) = h(F \vee G) = \max(h(F), h(G)) + 1$.

(il s'agit de la longueur d'une branche maximale dans l'arbre de la formule F .)

On définit le **degré** d'une coupure comme la hauteur de la formule de coupure (ie la formule qui est successivement introduite et éliminée) et le **degré** d'une déduction π , $\deg(\pi)$, comme le degré maximal de ses coupures.

On utilisera le degré des coupures, pour construire des mesures qui décroîtront avec les transformations de preuves qu'on va considérer maintenant, pour des fragments de plus en plus complexe de la déduction naturelle.

1.2.3 Fragment conjonctif universel

On commence par considérer le cas de déduction ne contenant que des règles conjonctives et universelles et par faire la remarque suivante :

Remarque 1.8 (*Création de coupures (premier cas)*)

Avant de commencer, étudions le cas d'une preuve contenant la portion de déduction suivante :

$$\frac{\frac{\frac{A}{A} \quad \frac{B}{B}}{A \wedge B} (\wedge \text{intro}) \quad C}{(A \wedge B) \wedge C} (\wedge \text{intro})$$

$$\frac{\frac{A \wedge B}{A} (\wedge \text{elim}_1)}{A} (\wedge \text{elim}_1)$$

Cette coupure se réduit vers une déduction contenant la portion suivante :

$$\frac{\frac{A}{A} \quad \frac{B}{B}}{A \wedge B} (\wedge \text{intro})$$

$$\frac{A \wedge B}{A} (\wedge \text{elim}_1)$$

qui contient une nouvelle coupure. Cette coupure porte cependant sur une formule **structuralement plus petite** que la précédente et la déduction elle-même est plus petite puisqu'elle contient au moins deux nœuds de moins.

$$\text{De même, la coupure universelle : } \frac{\frac{\frac{\vdots \pi_A}{A[x := y]} (\forall \text{intro})}{\forall x.A} (\forall \text{elim})}{A[x := t]} \quad \text{se réduit vers} \quad \frac{\frac{\vdots \pi_A[x := t]}{A[x := t]} (\forall \text{intro})}{A[x := t]} (\forall \text{elim})$$

Si on considère les différents cas ci-dessus, on voit que réduire une coupure conjonctive peut créer une coupure conjonctive ou universelle et qu'il en est de même pour la réduction des coupures universelles mais, dans tous les cas, on a au plus le même nombre de coupures et l'une de ces

coupures a été remplacée par une coupure sur une formule plus simple **et les preuves sont plus petites**.

On obtient donc le résultat d'élimination des coupures par une simple induction sur la taille de la preuve, sans même se préoccuper de la création de coupures.

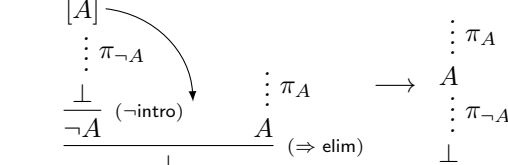
1.2.4 Fragment avec négation et implication

On considère maintenant des déductions pouvant également utiliser les règles de la négation et de l'implication (et donc comporter les coupures associées).

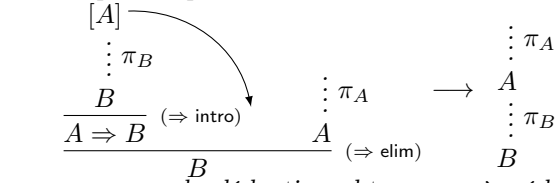
Remarque 1.9

Lorsqu'on considère les réductions des coupures négatives et implicatives définies plus haut :

— Coupure négative :



— Coupure implicative :



on remarque que la déduction obtenue après réduction n'est pas, contrairement aux cas des coupures conjonctives et universelles, de taille plus petite que la dérivation de départ : en effet, la sous-dérivation π_A peut, dans chaque cas, se trouver copiée un nombre arbitraire de fois.

Les arguments précédents ne s'étendent donc pas directement.

On remarquera également que les hypothèses non déchargées de π' sont parmi les hypothèses non déchargées de π . (elles sont identiques dès que l'introduction de l'implication/négation participant à la coupure décharge au moins une hypothèse, dans le cas contraire, il se peut qu'elle ait strictement moins d'hypothèses non déchargées.)

On remarque enfin que, dans les deux réductions ci-dessus, la déduction obtenue est de degré plus petit que le maximum de $\deg(\pi_B)$, $\deg(\pi_A)$ et $h(A)$. Plus généralement, si une coupure implicative sur $A \Rightarrow B$ est réduite dans une dérivation π (et pas nécessairement à sa racine), la déduction π' obtenue peut contenir des coupures présentes dans π (sauf la coupure réduite) ainsi que de nouvelles coupures sur A ou sur B . (On notera que cette dernière situation ne peut pas se présenter pour la négation puisque $\perp$ n'a pas de règle d'élimination.)

En prenant comme mesure sur une preuve π le couple (d, n_d) constitué du degré d de π et du nombre n_d de coupures de degré d , ordonné lexicographiquement, on peut réduire les coupures de manière à faire diminuer cette mesure : il suffit de réduire des coupures de degré maximal et, s'il s'agit d'une coupure implicative, de la choisir le plus haut possible dans l'arbre de preuve (c'est-à-dire telle que π_A et π_B ne contiennent pas de coupure de degré maximale).

En effet, si on réduit une coupure conjonctive ou universelle de degré maximal, on fait toujours réduire le nombre de coupures de degré maximal ou le degré de la preuve. Par ailleurs, si on réduit une coupure implicative de degré maximal qui est située le plus haut possible dans l'arbre, ses sous-dérivations π_A et π_B sont nécessairement de degré strictement inférieur et on a donc fait diminuer le nombre de coupures de degré maximal, ou bien on a fait diminuer le degré de la preuve.

Le raisonnement précédent permet de montrer par induction sur la mesure définie plus haut sur les déductions le théorème d'élimination des coupures :

Proposition 1.10 (Élimination des coupures pour le fragment $\forall \wedge \neg \Rightarrow$)

On peut éliminer les coupures des coupures implicatives, conjonctives et universelles.

Démonstration : Pour cela, on réduit les coupures de degré maximal dans les déductions, en les choisissant le plus haut possible.

On définit la mesure appropriée sur les déductions.

□

Théorème 1.11 (*Propriété de la sous-formule*)

Dans une déduction π du fragment $\wedge \Rightarrow \forall$ de NJ ne contenant aucune coupure, toutes les formules apparaissant dans l'arbre de déduction sont sous-formules de la conclusion ou d'une hypothèse non déchargée.

De plus, si π se termine par une règle d'élimination, alors elle possède une **branche principale** sous la forme d'une suite de formule $F_0, \dots, F_k$ telle que

- (i) F_0 est une hypothèse (non déchargée),
- (ii) F_k est la conclusion de π et
- (iii) pour tout $0 \leq i < k$, F_i est la prémisses principale d'une élimination dont la conclusion est F_{i+1} .

Démonstration : Soit d une déduction et A une formule maximale (pour l'ordre de sous-formule) apparaissant dans d . Si A n'est ni conclusion de la déduction, ni hypothèse non-déchargée, on remarque d'abord que A ne peut pas non plus être une hypothèse déchargée car les hypothèses déchargées sont toutes sous-formules de la conclusion de l'inférence qui les décharge et ne peuvent donc pas être maximales.

A est donc à la fois prémisses et conclusion d'une inférence.

On remarque que l'inférence dont A est conclusion est nécessairement une règle d'introduction tandis que l'inférence dont A est prémisses est nécessairement une règle d'élimination telle que A est la prémisses principale de l'élimination, c'est-à-dire que A est une formule de coupure. Par contraposée, si d ne contient pas de coupure, toute formule apparaissant dans d est sous-formule de la conclusion ou d'une hypothèse non-déchargée.

□

1.3 Coupures commutatives en déduction naturelle

Lorsqu'on considère également les connecteurs $\exists$, $\vee$ ou encore $\perp$, les choses ne se passent plus aussi bien : il existe des preuves **sans coupure** utilisant les règles de $\exists$, $\vee$ ou $\perp$, qui ne satisfont pas la propriété de la sous-formule.

Par exemple :

$$\frac{\frac{A \vee B \quad \frac{[A]^\alpha}{B \vee A} \text{ (vintro}_2\text{)}}{B \vee A} \quad \frac{\frac{[B]^\alpha}{B \vee A} \text{ (vintro}_1\text{)}}{B \vee A} \quad \frac{C \quad C}{C} \text{ (velim)} \quad C}{C} \text{ (velim)}$$

Constitue une déduction de C sous les hypothèses $A \vee B, C$ et donc $B \vee A$ n'est sous formule ni de la conclusion ni des hypothèses non déchargées ; cette déduction ne contient pourtant pas de coupure dans le sens introduit au début du chapitre.

La remarque ci-dessus nous conduit à introduire la notion de **coupure commutative** et de nouvelles règles de transformations de preuves définies ci-dessous, dites **conversions commutatives**.

On notera de manière générique : $\frac{E \dots}{C} \text{ (r)}$ pour désigner que (r) est une règle d'élimination de prémisses principale E (la formule à laquelle on applique l'élimination) et de conclusion C et dénotera par $\dots$ les prémisses et sous-preuves auxiliaires de la déduction.

On appellera **coupure commutative** la configuration suivante dans une déduction : une règle d'élimination de $\exists$, $\vee$ ou $\perp$ de conclusion C qui est prémisses principale d'une règle élimination (quelconque). Ci-dessous, on donne la **coupure commutative disjonctive** et la **conversion commutative** associée :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} [A] \quad [B] \\ \vdots \quad \vdots \\ A \vee B \quad C \end{array} \xrightarrow{\text{(velim)}} \begin{array}{c} \vdots \\ C \end{array} \quad \dots \text{ (r)} \\ \hline C \quad \dots \text{ (r)} \\ \hline D \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{c} [A] \quad [B] \\ \vdots \quad \vdots \\ A \vee B \quad C \end{array} \xrightarrow{\text{(r)}} \begin{array}{c} \vdots \\ D \end{array} \quad \dots \text{ (r)} \\ \hline D \end{array}$$

On notera que la dérivation de droite est bien une déduction naturelle valide puisque C est prémisses principale de $(\rightarrow)$ et les restrictions sur les occurrences libres de variables de $(\exists\text{elim})$ ne concernent pas cette prémisses.

Exercice 1.4

Donner les autres cas de coupure commutative et les règles de commutation associées, en s'assurant de leur correction le cas échéant. (Pour cela, il pourra être utile de nommer les sous-déductions.)

Théorème 1.12 (*Propriété de la sous-formule*)

Une déduction naturelle qui n'utilise pas le raisonnement par l'absurde et qui ne contient ni coupures, ni coupures commutatives, satisfait la propriété de la sous-formule.

Démonstration : À rédiger

□

Théorème 1.13 (*Élimination des coupures*)

On peut éliminer les coupures (incluant les coupures commutatives) pour NJ (avec tous ses connecteurs).

Démonstration : À rédiger

□