M2 LMFI – Cours Fondamental de logique
Théorie de la Démonstration
Théorème de confluence du λ-calcul (version préliminaire du 17/11/21)

Alexis Saurin

Cours du 19 novembre 2021

1 Introduction

Dans ce chapitre, on va démontrer le théorème de Church-Rosser pour le λ-calcul muni de la β-réduction. Ce théorème, établi par Church et Rosser en 1936[**?**], énonce la confluence du λ-calcul muni de la β-réduction, c'est-à-dire essentiellement que pour deux réductions issues d'un λ-terme t quelconque atteignant des termes u et v, on peut toujours trouver un λ-terme w où elles se rejoignent.

L'importance de ce résultat de confluence vient de deux conséquences fondamentales de ce théorème. En effet, la confluence assurant que si un terme possède une forme normale, celle-ci est unique, il entraîne que:

- la théorie de la β-équivalence est consistante;
- la notion de forme normale peut être prise comme notion de valeur dans les versions opérationnelles du λ-calcul.

On commencera par étudier plusieurs notions de confluence (confluence, confluence locale, propriété du diamant) puis on verra quelques relations entre ces propriétés et lemmes importants (dont le lemme de Newman). On énoncera ensuite le théorème de Church-Rosser ainsi que deux conséquences essentielles de ce théorème: la consistance de la β-équivalence et le théorème d'unicité des formes normales. On terminera en donnant la preuve du théorème en utilisant la méthode des réductions parallèle.

2 Diverses notions de confluence

Définition 2.1 (*Confluence, confluence locale (ou faible), propriété du diamant*)

Soit ρ une relation binaire sur un ensemble A. On définit les notions suivantes:

- *on dira que deux éléments $a, b \in A$ sont* **joignables***, et on notera cela $a \downarrow b$, s'il existe $c \in A$ tel que $a \,\rho\, c \,\&\, b \,\rho\, c$;*
- *ρ est* **confluente** *si $\forall a, b, c \in A, a \,\rho^\star\, b \ \& \ a \,\rho^\star\, c \Rightarrow \exists d \in A, b \,\rho^\star\, d \ \& \ c \,\rho^\star\, d$;*
- *ρ est* **localement confluente** *si $\forall a, b, c \in A, a \,\rho\, b \ \& \ a \,\rho\, c \Rightarrow \exists d \in A, b \,\rho^\star\, d \ \& \ c \,\rho^\star\, d$;*
- *ρ a la* **propriété du diamant** *si $\forall a, b, c \in A, a \,\rho\, b \ \& \ a \,\rho\, c \Rightarrow \exists d \in A, b \,\rho\, d \ \& \ c \,\rho\, d$.*

On désignera respectivement par ***CR***, ***WCR*** et ***DP*** les propriétés de confluence, confluence locale et de propriété du diamant[1].

[1] CR pour Church-Rosser et WCR pour Weak Church-Rosser, voir plus bas.

Remarque 2.2

Chacune de ces notions s'exprime de manière sympathique sous forme graphique.
À développer.

Avant de passer au théorème de confluence du λ-calcul, on va d'abord s'intéresser à quelques propriétés reliant les différentes notions de confluence introduites plus haut:

Proposition 2.3 (*Relations entre les différentes formes de confluence*)

On a la chaîne d'implications suivante:

$$DP \Rightarrow CR \Rightarrow WCR$$

Aucune des implications réciproques n'est vraie en général.

Démonstration :

- Les implications sont évidentes par définition de DP, CR et CWR.
- $CR \not\Rightarrow DP$. Le λ-calcul (une fois le théorème de Church-Rosser démontré) en sera un exemple puisqu'il est confluent sans être fortement confluent. mais il suffit de prendre la relation ρ sur $\{a, b, c, d, e\}$ définie par $\rho = \{(a, b), (a, c), (b, e), (c, d), (d, e)\}$.
- $WCR \not\Rightarrow CR$. Cette propriété est plus délicate à démontrer. On en verra un contre-exemple après avoir vu le lemme suivant.

□

Si la confluence locale seule ne suffit pas à obtenir la confluence, le lemme de Newman nous donne une manière d'obtenir des résultats de confluence sous hypothèse de confluence locale:

Lemme 2.4 (*Lemme de Newman, 1942*)

Une réduction fortement normalisante et localement confluente est confluente.

On va donner deux preuves de ce lemme, une preuve dans le cas général et une preuve dans le cas particulier où la relation est à branchement fini, c'est-à-dire que tout élément est en relation avec un nombre fini d'éléments (*i.e.*, se réduit d'un nombre fini de manières).

On commence par le cas particulier des relations finiment branchantes. Dans ce cas particulier, le lemme utilise le lemme de König:

Lemme 2.5 (*Lemme de König, 1936*)

Tout arbre infini à branchement fini contient une branche infinie. (ou encore: Un arbre à branchement fini et dont toutes les branches sont finies est globalement fini.)

Démonstration du lemme de König : Soit A un arbre à branchement fini ayant un nombre infini de nœuds. On obtient une branche infinie B_A de la manière suivante.

On appellera N_∞ l'ensemble des nœuds de A qui sont racines d'un sous-arbre infini et B_∞ l'ensemble des branches de A dont les nœuds sont dans N_∞.

On montre qu'il existe une branche infinie dans B_∞ car toute branche finie de B_∞ peut être prolongée en une branche de B_∞ par ajout d'un nœud de A: si $\beta \in B_\infty$ s'achève en r, $r \in N_\infty$ et l'un des sous-arbres (qui sont en nombre fini) de l'arbre de racine r est infini ce qui nous assure que sa racine r' est dans N_∞ nous permettant d'étendre β avec r' pour obtenir une branche $\beta' \in B_\infty$. Il découle qu'il existe une branche infinie dans B_∞ puisque l'on a l'existence d'une suite $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tel que β_{i+1} étend β_i d'un nœud pour tout $i \in \mathbb{N}$ (cela nécessite d'avoir recours à une version faible d'axiome du choix) et cela conclut la preuve du lemme.

□

Démonstration du lemme de Newman (dans le cas des relations à branchement fini) : Soit ρ une relation satisfaisant aux hypothèses du lemme et qui de plus est à branchement fini (*i.e.*, $\{u \mid t \; \rho \; u\}$ est fini pour tout $t \in \Lambda$).

Considérons $t \in A$, par le lemme de König, on sait que le graphe des réductions (de la relation ρ) issu de t est un arbre globalement fini: on peut donc associer à t un poids $p(t)$ correspondant à la plus longue branche de ce nœud jusqu'à une feuille.

On peut alors prouver la confluence de ρ par induction sur le poids ainsi défini:

- si $p(t) = 0$ alors il n'existe aucune paire u, v telle que $t \,\rho\, u, v$ (t est une forme normale dans ce cas), le résultat est donc trivial;
- sinon, supposons la confluence en tout nœud de poids au plus n et soit t de poids égal à $n+1$. Supposons alors que $u, v \in \Lambda$ sont tels que $t\ \rho^\star\ u, v$ alors si $t = u$ ou $t = v$ la confluence est immédiate et sinon on a $t\ \rho\ u_1\ \rho^\star\ u$ et $t\ \rho\ v_1\ \rho^\star\ v$. On a alors, par confluence locale, qu'il existe w tel que $u_1, v_1\ \rho^\star\ w$ et du fait que u_1, v_1 et w ont des poids au plus égaux à n, on peut appliquer l'hypothèse d'induction pour avoir d'abord l'existence de u_2, v_2 tels que $u, w\ \rho^\star\ u_2$ et $v, w\ \rho^\star\ v_2$ puis l'existence de w' tel que $u_2, v_2\ \rho^\star\ w'$.

Par le principe de récurrence, on a ainsi la confluence pour tout $t \in \Lambda$.

□

On démontre maintenant le cas général. Dans le cas général, on ne peut pas nécessairement assigner une mesure finie à chaque terme, comme ci-dessus, mais on peut utiliser la méthode de descente infinie (ou un principe d'induction bien fondée):

Démonstration : On raisonne pas l'absurde en appliquant la méthode de descente infinie: Supposons que $\longrightarrow$ soit une relation fortement normalisante et localement confluente qui n'est pourtant pas confluente et soit $(t_0, u_0, v_0) \in \Lambda^3$ tels que $\vec{t}\,\rho^+\ u, v$ mais que u et v ne soient pas joignables par ρ. (en effet, on ne peut avoir $t_0 = u_0$ ou $t_0 = v_0$ dans ce cas.)

On a alors $t_0\ \rho\ u'_1\ \rho^\star\ u_0$ et $t_0\ \rho\ v'_1\ \rho^\star\ v_0$ et, par confluence locale, on a t'_1 tel que $u'_1, v'_1\ \rho^\star\ t'_1$. De deux choses l'une:

- Soit t'_1, u_0 ne sont pas joignables, on pose alors $t_1 = u'_1, u_1 = u_0$ et $v_1 = t'_1$;
- Soit t'_1, u_0 sont joignables: il existe w_0 tel que $t'_1, u_0\ \rho^\star\ w_0$. Dans ce cas, nécessairement v_0, w_0 ne sont pas joignables et on pose alors $t_1 = v'_1, u_1 = w_0$ et $v_1 = v_0$.

Dans les deux cas, on a un nouveau triplet $(t_1, u_1, v_1) \in \Lambda^3$ qui satisfait aux conditions précédentes et tel que t_1 est *strictement plus petit* que t_0 pour l'ordre bien fondé induit par ρ. Ce processus pouvant se répéter indéfiniment, on déduit une contradiction par la méthode de descente infinie.

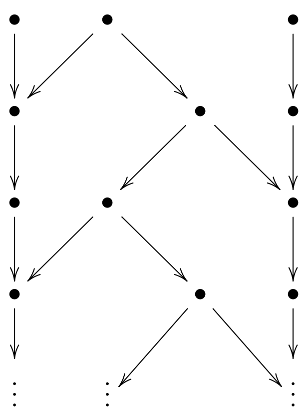
□

On peut maintenant donner un contre-exemple mettant en évidence que la confluence locale n'implique pas la confluence. Par le lemme de Newman, il nous faut bien sûr chercher une relation qui ne soit pas fortement normalisante.

On considère une relation sur l'ensemble $\{a, b, c, d\}$ décrite par le graphe ci-dessous:

$$\begin{tikzcd} a & b \arrow[l] \arrow[r, bend left] & c \arrow[l, bend left] \arrow[r] & d \end{tikzcd}$$

On pourrait également considérer une autre relation selon l'idée suivante:



Pour ces deux exemples, le raisonnement est similaire: on vérifie simplement la confluence locale en traitant les 4 cas distincts puis on vérifie qu'une réduction partant d'un des deux points centraux peut atteindre les deux points extrêmaux qui ne sont pas joignables.

3 Le théorème de Church-Rosser et ses conséquences

On a maintenant de quoi énoncer l'un des théorèmes fondamentaux du λ-calcul, le théorème de Church-Rosser:

Théorème 3.1 (*Church-Rosser 1936 – Confluence du λ-calcul avec la β-réduction*)

La β-réduction est confluente.

Dans l'article de Church et Rosser, c'est une autre propriété, équivalente, qui est démontrée: "*Theorem 1. If A conv B, there is a conversion from A to B in which no expansion precedes any reduction*" qui, avec nos notations (et en notant $\longleftarrow_\beta^\star$ la relation inverse de $\longrightarrow_\beta^\star$), devient:

Théorème 3.2 (*Propriété de Church-Rosser*)

Soient $t, u \in \Lambda$. Si $t =_\beta u$ alors il existe $v \in \Lambda$ tel que $t \longrightarrow_\beta^\star v \longleftarrow_\beta^\star u$.

Proposition 3.3

La propriété de Church-Rosser est équivalente à la confluence.

Démonstration : On démontre facilement que les deux propositions sont équivalentes.

□

Exercice 3.1

Démontrer la proposition 3.3.

Les résultats suivants sont deux corollaires essentiels du théorème de Church-Rosser:

Corollaire 3.4 (*Unicité de la forme normale*)

Soit $t \in \Lambda$. Si t possède une forme normale, celle-ci est unique.

Démonstration : Supposons en effet que $t \in \Lambda$ possède deux formes normales u, v on a alors que $t \longrightarrow_\beta^\star u, v$ et donc par Church-Rosser que $u, v \longrightarrow_\beta^\star w$ or u, v étant des formes normales on a $u \equiv w \equiv v$ ce qui montre l'unicité.

□

Corollaire 3.5 (*Consistance du λ-calcul*)

Le λ-calcul muni de la β-équivalence est consistant. Plus généralement, $\Lambda/=_\beta$ est un ensemble infini.

Démonstration : En effet, deux formes normales β-équivalentes sont forcément (syntaxiquement) égales (modulo α) or $\lambda xy.x$ et $\lambda xy.y$ sont deux formes normales distinctes.

□

4 Méthode des réductions parallèles

On va maintenant démontrer le théorème de Church-Rosser.

4.1 Deux remarques préliminaires

Confluence locale Une étude de cas des situations possibles pour les radicaux nous permet d'établir la confluence locale du λ-calcul:

Proposition 4.1

Le λ-calcul est localement confluent.

Malheureusement, on sait qu'on n'a pas de normalisation forte du λ-calcul; on ne peut donc pas utiliser le lemme de Newman.

Propriété du diamant Par ailleurs, on constate facilement que la propriété du diamant n'est pas satisfaite parce que certains radicaux peuvent être dupliqués comme dans l'exemple:

$$(\lambda x.(x)x)z \longleftarrow_\beta (\lambda x.(x)x)(\lambda y.y)z \longrightarrow_\beta (\lambda y.y)z(\lambda y.y)z$$

Les deux termes peuvent bien se réduire sur $(z)z$ mais celui de droite nécessite deux étapes de β-réduction.

4.2 Introduction de la réduction parallèle

La méthode de démonstration que l'on va utiliser est due à William Tait et Per Martin-Löf et a été encore simplifiée par Masako Takahashi en 1995. Avant de passer à la démonstration proprement dite, on a va décrire informellement l'idée de cette méthode en analysant ce qui se passe mal avec le λ-calcul.

D'un côté, on dispose de la réduction $\longrightarrow_\beta$ qui s'analyse assez facilement mais qui ne vérifie pas la propriété du diamant. De l'autre, on a la relation $\longrightarrow_\beta^\star$ qui, en admettant la confluence du λ-calcul que l'on souhaite justement démontrer, a la propriété du diamant, mais qui ne se décrit pas simplement puisqu'il s'agit de la clôture réflexive et transitive d'une relation définie inductivement. En particulier, un phénomène complique beaucoup cette analyse, la création de radicaux: dans la réduction $(\lambda x.(x)x)\lambda y.y \longrightarrow_\beta (\lambda y.y)\lambda y.y$ on constate que le radical $(\lambda y.y)\lambda y.y$ a été créé par la réduction.

En quelque sorte, $\longrightarrow_\beta$ ne réduit pas assez (pour satisfaire la propriété du diamant) alors que $\longrightarrow_\beta^\star$ réduit trop (pour s'analyser simplement). On va donc chercher à construire une réduction ρ intermédiaire entre les deux qui présentera les avantages de l'une et de l'autre. Par ailleurs, si on a $\longrightarrow_\beta \subset \rho \subset \longrightarrow_\beta^\star$, alors on constate immédiatement que $\rho^\star {=} \longrightarrow_\beta^\star$ et donc que prouver la confluence de ρ suffira à obtenir le résultat souhaité.

En disant cela, on n'a évidemment pas résolu le problème, mais on a déjà fait un grand pas. Le second pas consiste à se demander ce qu'on va mettre dans ρ qui doit réduire suffisamment mais pas trop. Comme on l'a dit plus haut, la complexité de $\longrightarrow_\beta^\star$ vient (en grande partie) de la création de radicaux; nous allons donc prendre le parti de définir une réduction qui pourra réduire ce qu'elle veut, sauf les radicaux créés. Cela nous conduit à la définition de la *réduction parallèle*:

Définition 4.2

La réduction parallèle, notée $\twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\!/$, est définie comme suit:

- $x \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\!/\; x$;
- $\lambda x.t \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\!/\; \lambda x.u$ *si* $t \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\!/\; u$;
- $(t)u \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\!/\; (v)w$ *si* $t \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\!/\; v$ *et* $u \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\!/\; w$;
- $(\lambda x.t)u \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\!/\; v\,\{w/x\}$ *si* $t \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\!/\; v$ *et* $u \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\!/\; w$.

Remarque 4.3

Les deux derniers cas de la définition se superposent si $t = \lambda x.v$. En effet, si $v \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\!/\; v'$ et $w \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\!/\; w'$ alors on a à la fois $t \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\!/\; (\lambda x.v')w'$ et $t \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\!/\; v'\,\{w'/x\}$. La réduction parallèle est donc non-déterministe.

4.3 Démonstration du théorème de Church-Rosser

On doit donc démontrer deux choses pour obtenir la confluence du λ-calcul:

- $\longrightarrow_\beta \subset \;\twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\!/\; \subset \longrightarrow_\beta^\star$;
- $\twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\!/$ satisfaît DP.

On démontre immédiatement les propriétés suivantes:

Propriété 4.4

- $\forall t \in \Lambda, t \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ \, t$;
- $\longrightarrow_\beta \subset \ \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ \ \subset \longrightarrow_\beta^\star$.

Pour obtenir la propriété du diamant pour $\twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ $, le lemme suivant sera utile:

Lemme 4.5

Soient $t, u, v, w \in \Lambda$ et $x \in \mathcal{V}$. Si $t \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ v$ et $u \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ w$, on a $t\{u/x\} \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ v\{w/x\}$.

Démonstration : On montre le résultat par récurrence sur la structure de t:

- Si $t \equiv x$ ou $t \equiv y \neq x$ le résultat est évident.
- Si $t \equiv \lambda y.t'$ alors le résultat est immédiat par induction.
- Si $t \equiv (t')t''$, alors on distingue selon que u a été obtenu par la troisième ou la quatrième clause définissant $\twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ $:
  - Dans le premier cas, on a $t' \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ v'$ et $t'' \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ v''$ et $v \equiv (v')v''$. L'hypothèse d'induction nous assure que $t'\{u/x\} \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ v'\{w/x\}$ et $t''\{u/x\} \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ v''\{w/x\}$ d'où on obtient $(t')t''\{u/x\} \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ (v')v''\{w/x\}$.
  - Dans le second cas, on a $t' \equiv \lambda y.t_0$, $t_0 \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ v'$, $t'' \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ v''$ et $v \equiv v'\{v''/y\}$. Par α, on peut supposer que y n'est pas libre dans u, w, x. On a donc par induction que $t_0\{u/x\} \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ v'\{w/x\}$ et $t''\{u/x\} \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ v''\{w/x\}$ ce qui nous donne donc, par définition de $\twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ $ que $(\lambda y.t_0\{u/x\})t''\{u/x\} \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ v'\{w/x\}\{v''\{w/x\}/y\}$. Puisqu'on a supposé que y n'était pas libre dans u, w, x, on a $t\{u/x\} \equiv (\lambda y.t_0)t''\{u/x\} \equiv (\lambda y.t_0\{u/x\})t''\{u/x\}$ et $v\{w/x\} \equiv v'\{v''/y\}\{w/x\} \equiv v'\{w/x\}\{v''\{w/x\}/y\}$ ce qui achève la preuve.

□

Finalement, on montre que $\twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ $ a la propriété du diamant:

Théorème 4.6

Soient $t, u, v \in \Lambda$, si $t \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ u, v$ alors il existe $w \in \Lambda$ tel que $u, v \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ w$.

Démonstration : On raisonne à nouveau par induction sur la structure de t pour montrer que pour tous $t, u, v \in \Lambda$, si $t \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ u, v$ alors il existe $w \in \Lambda$ tel que $u, v \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ w$.

- Si $t \equiv x$, on a alors nécessairement $t = u = v$ et alors en posant $w = t$, on a $u, v \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ w$ par réflexivité de la réduction parallèle.
- Si $t \equiv \lambda x.t'$, on a alors nécessairement $u \equiv \lambda x.u'$ et $v \equiv \lambda x.v'$ avec $t' \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ u', v'$. Par hypothèse d'induction, on a l'existence d'un w' tel que $u', v' \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ w'$ et on a alors $u, v \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ \lambda x.w'$.
- Si $t \equiv (t')t''$ avec $u \equiv (u')u''$ et $v \equiv (v')v''$ où $t' \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ u', v'$ et $t'' \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ u'', v''$. Par application de l'hypothèse d'induction à t' et t'', on a l'existence de w' et w'' qui permettent de joindre respectivement u', v' et u'', v'' et qui nous assure que $u, v \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ (w')w''$.
- Si $t \equiv (\lambda x.t')t''$, $u \equiv u'\{u''/x\}$ et $v \equiv v'\{v''/x\}$, avec $t' \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ u', v'$ et $t'' \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ u'', v''$, on a l'existence de w' et w'' par hypothèse d'induction appliquée à t', t'' tels que $u', v' \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ w'$ et $u'', v'' \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ w''$.

  D'après le lemme précédent, on a $u'\{u''/x\}, v'\{v''/x\} \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ w'\{w''/x\} = w$.
- Le seul cas non évident est le suivant: t est un radical $(\lambda x.t')t''$ et $u \equiv (\lambda x.u')u''$ tandis que $v \equiv v'\{v''/x\}$, avec $t' \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ u', v'$ et $t'' \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ u'', v''$. Par hypothèse d'induction, on est assuré de l'existence de w' et w'' tels que $u', v' \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ w'$ et $u'', v'' \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ w''$.

  On a alors $u \equiv (\lambda x.u')u'' \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ w'\{w''/x\}$ et $v \equiv v'\{v''/x\} \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!/\ w'\{w''/x\}$ par le lemme précédent, ce qui conclut la preuve.

□

4.4 Variante avec les développements complets

Une autre manière de montrer que $\mathrel{\twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!\!/\!/}$ a la propriété du diamant est de remarquer que $t \mathrel{\twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!\!/\!/} u$ si u est obtenu à partir de t en réduisant un certain nombre de radicaux déjà présents dans t et qu'on peut considérer le terme obtenu en réduisant "tous les radicaux" déjà présents dans t:

Définition 4.7

On appelle développement complet d'un terme t, et on notera $cd(t)$, le terme défini par induction de la manière suivante:

- $cd(x) = x$;
- $cd(\lambda x.t) = \lambda x.cd(t)$;
- $cd((\lambda x.t)u) = cd(t)\,\{cd(u)/x\}$;
- $cd((t)u) = (cd(t))cd(u)$ *si t n'est pas une abstraction.*

On a alors la propriété suivante:

Proposition 4.8

Soient $t, u \in \Lambda$,

$$t \mathrel{\twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!\!/\!/} u \qquad \Rightarrow \qquad u \mathrel{\twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!\!/\!/} cd(t).$$

Dont on déduit immédiatement la propriété du diamant pour $\mathrel{\twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!\!/\!/}$.

Exercice 4.1

Démontrer la propriété précédente et en déduire que $\mathrel{\twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!\!/\!/}$ a DP.

Remarque 4.9

On verra plus tard une autre démonstration du théorème de Church-Rosser comme corollaire d'un théorème dit des développements finis*.*

Exercices du chapitre

Exercice 4.2

Démontrer le lemme de Newman.

Exercice 4.3

Démontrer que la propriété de Church-Rosser est équivalente à la confluence.

Exercice 4.4

Démontrer le lemme suivant:

Soient $t, u, v, w \in \Lambda$ et $x \in \mathcal{V}$. Si $t \mathrel{\twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!\!/\!/} v$ et $u \mathrel{\twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!\!/\!/} w$, on a $t\,\{u/x\} \mathrel{\twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!\!/\!/} v\,\{w/x\}$.

Exercice 4.5

Démontrer la propriété suivante:

Soient $t, u \in \Lambda$,

$$t \mathrel{\twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!\!/\!/} u \qquad \Rightarrow \qquad u \mathrel{\twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!\!/\!/} cd(t).$$

En déduire que $\mathrel{\twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!\!/\!/}$ a DP.